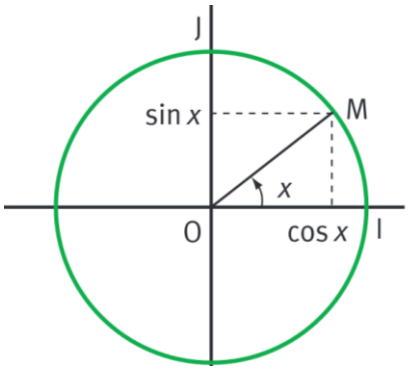
Chapitre 4 : Fonctions usuelles
Partie B : Fonctions trigonométriques

I) Les fonctions cosinus et sinus

a) Les fonctions cosinus et sinus



Définition: On considère un cercle C orienté de centre O et de **rayon 1**.
Soit x un réel et M le point qui lui est associé tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ = x et OM = 1 et OM = 1.
(C'est ce que l'on appelle les coordonnées polaires !)

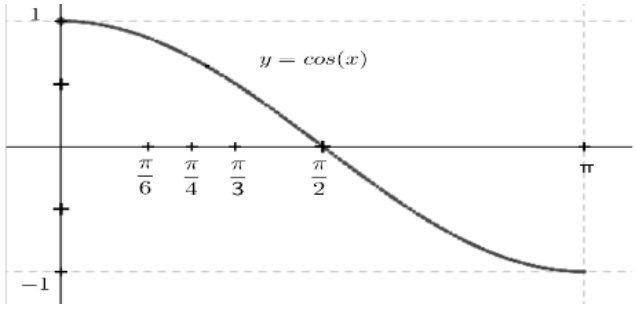
On appelle **cosinus de x et sinus de x les coordonnées de M** dans le repère (O,I,J). On a ainsi **M (cos x ; sin x)**

Exemple I.a.1 : $cos(0) = 1$; $sin(0) = 0$

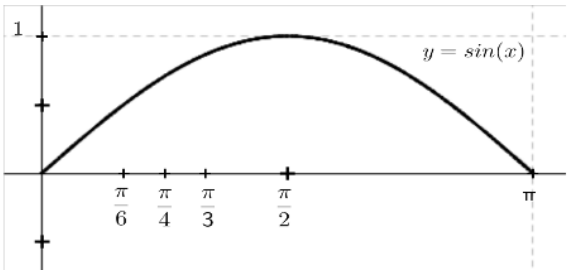
b) Représentation graphique de cos et sin

Propriété I.b.1 : Les fonctions cosinus et sinus étant respectivement paire et impaire et 2π-périodique, on les étudie sur l'intevalle [0 ;π] :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
cos	1	0	-1

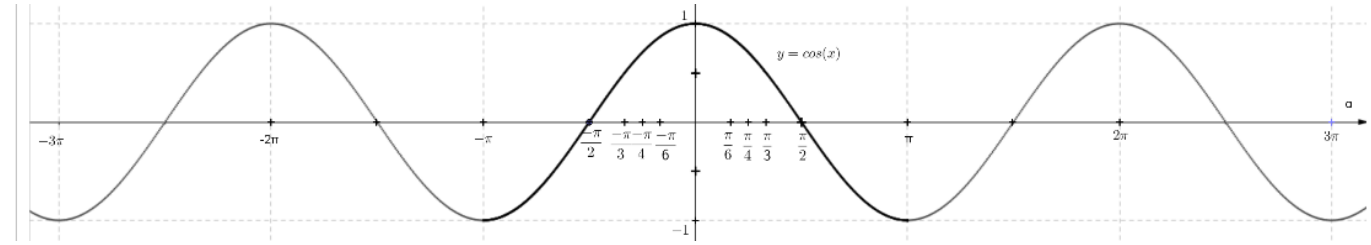


x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	1	0

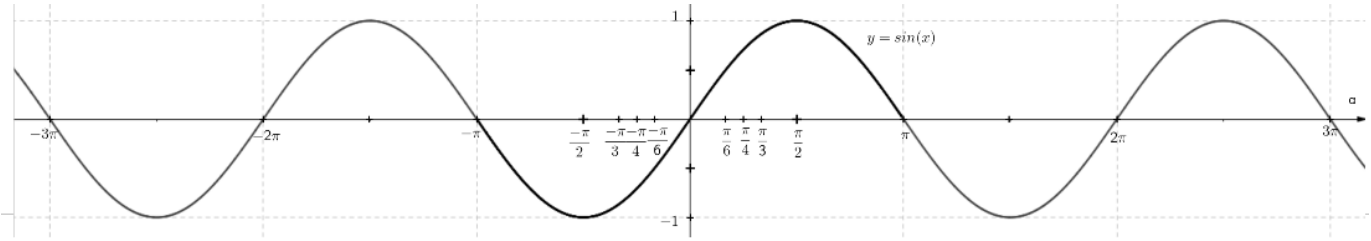


On prolonge ensuite les courbes représentatives par symétrie et 2π-périodique périodicité :

Courbe de cosinus :



Courbe de sinus :



Propriété I.b.2 : On a le résultat suivant :

$$\begin{cases} cos(x) = cos(a) \iff x = a + 2k\pi \quad ou\ x = -a + 2k\pi\ ; k \in \mathbb{Z} \\ sin(x) = sin(a) \iff x = a + 2k\pi \quad ou\ x = \pi - a + 2k\pi\ ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Application I.b.3 : Résoudre l'équation $sin(x) = 0{,}5$

Application I.b.4 : Résoudre l'inéquation $cos(x) > 0{,}5$

c) Formules d'addition, élémentaires, linéarisation…

Propriété I.c.1 (formule d'addition) :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} cos(a+b) = cos(a)\,cos(b) - sin(a)\,sin(b) \\ cos(a-b) = cos(a)\,cos(b) + sin(a)\,sin(b) \\ sin(a+b) = sin(a)\,cos(b) + sin(b)\,cos(a) \\ sin(a-b) = sin(a)\,cos(b) - sin(b)\,cos(a) \end{cases}$$

Application I.c.2 : Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, cos(2x) = 2\,cos^2(x) - 1$$

Propriété I.c.3 (Formules élémentaires, à savoir retrouver sur le cercle trigonométrique) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -sin(x) \\ cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sin(x) \\ cos(x + \pi) = -cos(x) \\ cos(\pi - x) = -cos(x) \end{cases} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = cos(x) \\ sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cos(x) \\ sin(x + \pi) = -sin(x) \\ sin(\pi - x) = sin(x) \end{cases}$$

Application I.c.4 : Déterminer

$$A = cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$$

Propriété I.c.5 (Formule de linéarisation) :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} sin(a)\,sin(b) = \frac{1}{2}(cos(a-b) - cos(a+b)) \\ sin(a)\,cos(b) = \frac{1}{2}(sin(a+b) + sin(a-b)) \\ cos(a)\,cos(b) = \frac{1}{2}(cos(a+b) + cos(a-b)) \end{cases}$$

Application I.c.6 : Calculer :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(x)\,sin(2x)\,dx$$

Propriété I.c.7 (Transformation de somme en produit) :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} cos(a) + cos(b) = 2\,cos\left(\frac{a+b}{2}\right) cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ cos(a) - cos(b) = -2\,sin\left(\frac{a+b}{2}\right) sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ sin(a) + sin(b) = 2\,sin\left(\frac{a+b}{2}\right) cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ sin(a) - sin(b) = 2\,sin\left(\frac{a-b}{2}\right) cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{cases}$$

Application I.c.8 : Résoudre l'équation $\cos(x) + \cos(2x) = 0$

d) Dérivation

Propriété I.d.1 : On a :

$$(cos; sin) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}; [0;1])^2 : \forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} cos'(x) = -sin(x) \\ sin'(x) = cos(x) \end{cases}$$

Application I.d.2 : Démontrer que l'équation *cos(x) = x* admet une unique solution sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Application I.d.3 : Déterminer les limites suivantes :

$$\ell_1 = \lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} \quad ; \quad \ell_2 = \lim_{x \to 0} \frac{cos(x) - 1}{x}$$

e) La bijection réciproque de $\cos|_{[0;\pi]}$: la fonction arccos

Propriété I.e.1 : La fonction $\cos|_{[0;\pi]}$ réalise une bijection de [0 ;π] dans [-1 ;1]. On définit alors la fonction :

$$cos^{-1} = arccos : \begin{cases} [-1;1] \to [0;\pi] \\ x \mapsto arccos(x) \end{cases} \text{ tel que :}$$

$$\forall x \in [0;\pi] \; cos(x) = y \iff arccos(y) = x$$

Exemple I.e.2 : Déterminer les valeurs de $\arccos(0)$; $\arccos(1)$; $\arccos(-1)$; $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ATTENTION : On a :

$$\forall x \in [-1;1], cos(arccos(x)) = x$$

Par contre :

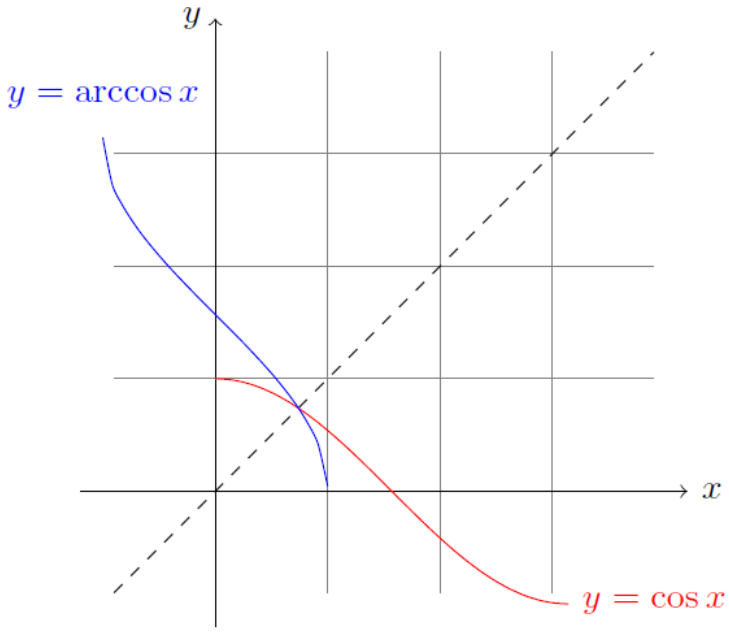
$$arccos\left(cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$$

Application I.e.3 : Déterminer :

$$I = arccos\left(cos\left(\frac{59\pi}{6}\right)\right)$$

Propriété I.e.4 : arccos est dérivable sur $]-1;1[$ et :

$$\forall x \in]-1;1[, arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



f) La bijection réciproque de $\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}$: la fonction arcsin

Propriété I.f.1 : La fonction $\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}$ réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ dans [-1 ;1]. On définit alors la fonction :

$$sin^{-1} = arcsin : \begin{cases} [-1;1] \to \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ x \longmapsto arcsin(x) \end{cases} tel\ que :$$

$$\forall\, x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] sin(x) = y \iff arcsin(y) = x$$

Exemple I.f.2 : Déterminer les valeurs de $\arcsin(0)$; $\arcsin(1)$; $\arcsin(-1)$; $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ATTENTION : On a :

$$\forall\, x \in [-1;1], sin(arcsin(x)) = x$$

Par contre :

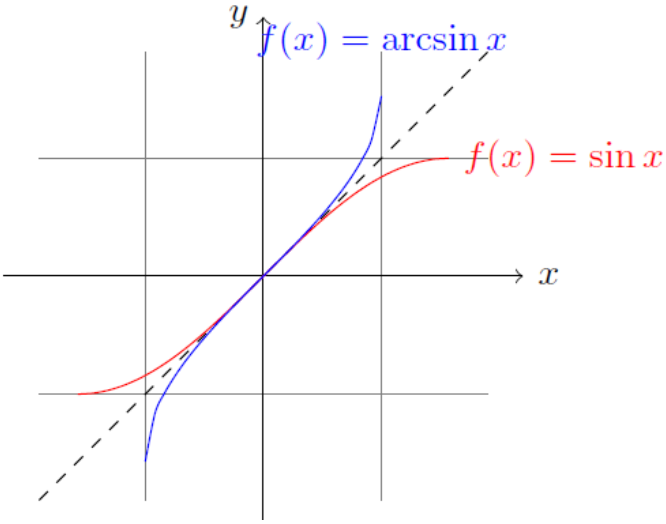
$$arcsin\left(sin\left(\frac{7\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$$

Application I.f.3 : Déterminer :

$$I = arcsin\left(sin\left(\frac{59\pi}{6}\right)\right)$$

Propriété I.f.4 : arcsin est dérivable sur $]-1;1[$ et :

$$\forall\, x \in]-1;1[, arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



II) La fonction tangente

a) Généralités

Définition (tangente) : Pour tout

$$\forall\, x \not\equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]\ tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$$

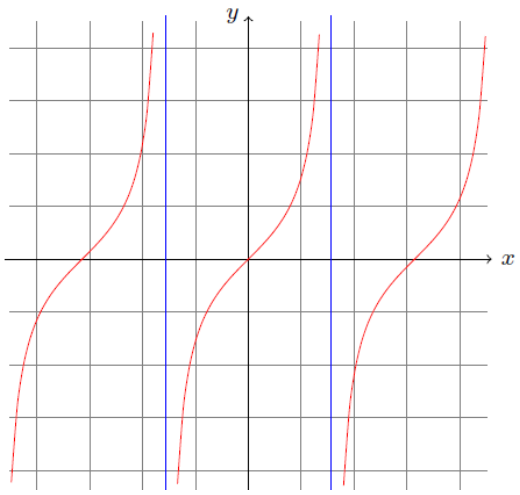
Exemple II.a.1:

$$tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Propriété II.a.2 : On a :
1) tan est π-périodique.
2) tan est impaire.
3) tan est dérivable et :

$$\forall\, x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}k\pi\right[, tan'(x) = \frac{1}{cos^2(x)} = 1 + tan^2(x)$$

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$+\frac{\pi}{2}$
tan	$-\infty$	0	$+\infty$



b) Propriétés

Propriété II.b.1 : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, (quand cela est définie) :

$$tan(x+y) = \frac{tan(x) + tan(y)}{1 - tan(x)\,tan(y)}$$
$$tan(x-y) = \frac{tan(x) - tan(y)}{1 + tan(x)\,tan(y)}$$

Application II.b.2 : Déterminer la valeur de :

$$I = tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Propriété II.b.3 : Si $x \in \mathbb{R}$ et $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ est bien défini, on a alors :

$$cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ; \quad sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \; tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$$

c) La fonction arctangente

Propriété II.c.1 : La fonction $\tan|_{]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[}$ est bijective de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$. On appelle arctan sa bijection réciproque.

$$tan^{-1} = arctan : \begin{cases} \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\\ x \longmapsto arctan(x) \end{cases} tel\ que :$$
$$\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, tan(x) = y \iff arctan(y) = x$$

Exemple II.c.2 : Déterminer les valeurs de $\arctan(0)$; $\arctan(1)$; $\arctan(-1)$; $\arctan\left(\sqrt{3}\right)$

ATTENTION : On a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, tan(arctan(x)) = x$$

Par contre :

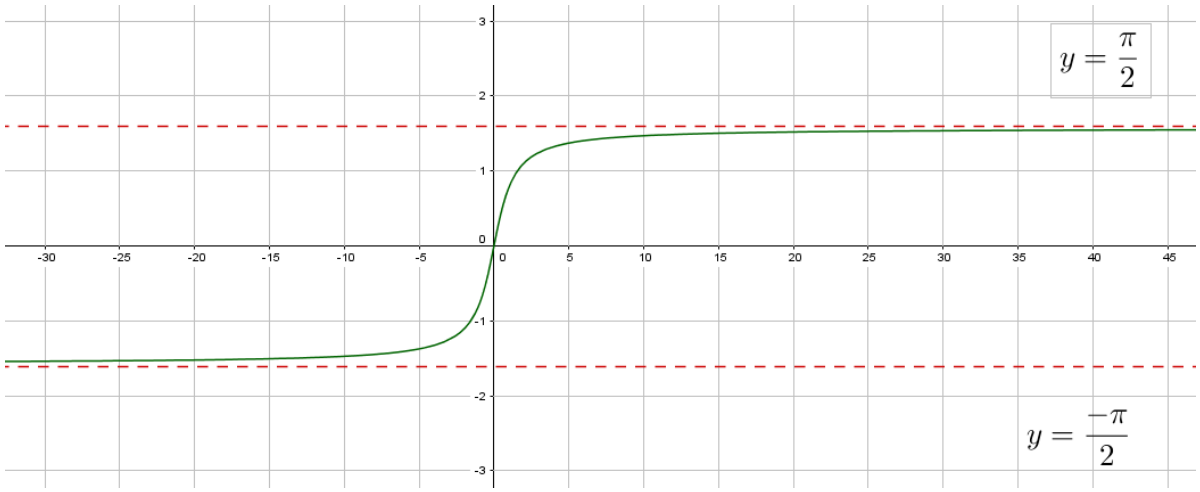
$$arctan\left(tan\left(\frac{7\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$$

Application II.c.3 : Déterminer :

$$I = arctan\left(tan\left(\frac{59\pi}{6}\right)\right)$$

Propriété II.c.4 : arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$



Propriété V.c.5 : On a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, arctan(x) + arctan\left(\frac{1}{x}\right) = signe\,(x)\frac{\pi}{2}$$