TD 4 : Fonctions usuelles

Partie A : Les fonctions exponentielle, logarithme et puissances

Exercice A.1 : Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$:

1) $2\,ln(x+1) + ln(3x+5) + ln(2) = ln(6x+1) + ln(x-2) + ln(x+2)$
2) $e^{2x} - 2e^{x} - 3 = 0$
3) $5^{x} - 5^{x+1} + 2^{3x-1} = 0$
4) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+6} = 3$
5) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{x}$
6) $4^{x+1} + 2^{2-x} = 65$

Exercice A.2 : Résoudre les systèmes suivants :

$$a)\ \begin{cases} 8^{x} = 10y \\ 2^{x} = 5y \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x+y = 7 \\ log(x) + log(y) = 1 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} xy = a^2 \\ (ln(x))^2 + (ln(y))^2 = \dfrac{5}{2}(ln(a))^2 \end{cases} ,avec\ a > 0\ donnée\ d)\ \begin{cases} x+y = 520 \\ log(x) + log(y) = 4 \end{cases}$$

Exercice A.3 : Démontrer que :

$$\forall\, x \in]0;1[, x^{x}(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$$

Exercice A.4 :

a) Montrer que :

$$\forall x > -1, \frac{x}{x+1} \leq ln(1+x) \leq x$$

b) Interprétez graphiquement l'inégalité de droite.

Exercice A.5 : Calculer les limites suivantes :

$$a)\ \lim_{x\to 1^+} ln(x)\,ln(ln(x)) \qquad b)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{ln(1+x^2)}{2x} \qquad c)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{e^{x}-1}$$

$$d)\ \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} \qquad e)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}} \quad (1 < a < b) \qquad f)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$$

Exercice A.6 : a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, e^{x} \geq x+1$. Interpréter ce résultat graphiquement.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En posant $x = \frac{1}{n}$ et $x = -\frac{1}{n+1}$, en déduire l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} \leq e \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

c) En déduire l'encadrement suivant du nombre e pour $n \geq 1$:

$$0 \leq e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \leq \frac{3}{n}$$

d) En déduire :

$$\lim_{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$$

Exercice A.7 :

On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0; +\infty[\backslash\{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

On note $\mathcal{C}_{f}$ la représentation graphique de f relativement à un repère orthonormal.

a) Déterminer la limite de f(x) lorsque x tend vers $+\infty$, puis lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieurs et inférieurs. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_{f}$?

b) Montrer que f est croissante sur chacun des intervalles $[0;1[,]1;+\infty[$.

c) Préciser l'équation cartésienne de la tangente (T_0) au point A de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 0.
d) Prouver que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+\backslash\{1\}$.

Exercice A.8 : On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f et préciser sa parité.
2) Etudier les variations de la fonction f et préciser ses limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
3) Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[0; +\infty[$ admet une application réciproque, notée g.
4) Donner l'ensemble de définition de g, son ensemble de continuité ainsi que son sens de variation.
5) Tracer les courbes représentatives des fonctions f et g.
6) Expliciter la fonction g.

Exercice A.9 : On pose :

$$f : x \longmapsto ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f
2) Montrer que f est impaire.
3) Etudier les variations de f et les limites aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice A.10 : Démontrer que :

$$\forall\, x > 1, \frac{x\, ln(x)}{x^2-1} < \frac{1}{2}$$

Exercice A.11 : Démontrer que :

$$\forall\, x > 0\; ln\left(1 + \sqrt{1+x^2}\right) < \frac{1}{x} + ln(x)$$

Exercice A.12 : Etudier les fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{1}{2}x + ln\left(\frac{x-1}{3x-4}\right)$ 2) $f(x) = \frac{x^2-x}{x-3}$ 3) $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{8}{x+1}$

4) $f(x) = x^2e^{-x^2}$ 5) $f(x) = ln(x^2+1)$ 6) $f(x) = xln\left(e + \frac{1}{x}\right)$ 7) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ 8) $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$

9) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{2a-x}}$ (où $a > 0$) 10) $f(x) = \sqrt{x^2\frac{3a-x}{a+x}}$ (où $a > 0$) 11) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)}$

Partie B : Fonction trigonométrique

Exercice B.1 : Montrer que :

$$\forall\, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x \leq sin(x) \leq x$$

Exercice B.2 : Résoudre les équations suivantes, de variable x réelle :

$$a)\, cos(x) = \frac{1}{2} \quad b)\, \sqrt{2}\, sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 1 \quad c) 2\, cos(2x) = \sqrt{3} \quad d) 2\, cos^2(2x) - 3\, cos(2x) = -1$$

$$e)\, cos(2x) = cos(x) \quad f)\, sin(2x) + sin(x) = 0 \quad g)\, sin(2x) + sin\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) = 0 \quad h)\, cos(3x) + sin(x) = 0$$

Exercice B.3 : Résoudre les inéquations suivantes, de variable x réelle :

$$a)\, cos(x) > 0 \quad b)\, sin(x) \leq \frac{1}{2} \quad c)\, tan(x) > \frac{\sqrt{3}}{3} \quad d)\, sin^2(x) \geq \frac{1}{4} \;\; sur\; [\pi; \pi]$$

Exercice B.4 : Déterminer le domaine de définition et la dérivée de :

$$f(x) = (1 + sin(x))^{cos(x)}$$

Exercice B.5 : Etudier la fonction : $f : x \longmapsto cos(x) - cos^2(x)$

Partie C : Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice C.1 : Simplifier les expressions suivantes :

$a)\ arccos\left(cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ $\quad b)\ arccos(cos(4\pi))$ $\quad c)\ arccos\left(cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ $\quad d)\ arctan\left(tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

$e)\ cos(arctan(x))\,, x \in \mathbb{R}$ $\quad f)\ sin(3\,arctan(x))\,, x \in \mathbb{R},$ $\quad g)\ tan(arcsin(x))\ x \in]-1; 1[$

$h)\ arccos(x) + arccos(-x)\,, x \in [-1; 1]$ $\quad i)\ arctan(1/2) + arctan(1/5) + arctan(1/8)$

Exercice C.2 : Résoudre les équations suivantes, de variable x réelle :

1) $arcsin(sin(x)) = \frac{\pi}{9}$ 2) $arccos(x) = arcsin(x)$ 3) $arccos(x) = arcsin(2x)$ 4) $arccos(x) = arcsin(1 - x)$

5) $2\,arcsin(x) = arccos(|2x^2 - 1|)$ 6) $arcsin(x) + arcsin\left(\frac{x}{2}\right) = \pi$ 7) $2\,arcsin(x) = arcsin\left(2x\sqrt{1 - x^2}\right)$

8) $arcsin(2x) - arcsin(x\sqrt{3}) = arcsin(x)$ 9) $arctan(x - 1) + arctan(x) + arctan(x + 1) = \frac{\pi}{2}$

Exercice C.3 : Après avoir précisé le domaine de validité, montrer les formules :

1) $arcsin(x) + arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ 2) $2\,arctan\left(\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}\right) + arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$

3) $arcsin(x) = arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$ 4) $2\,arctan\left(\sqrt{1 + x^2} - x\right) + arctan(x) = \frac{\pi}{2}$

Exercice C.4 : Etudier la fonction $f : x \mapsto arccos(cos(3x))$

Exercice C.5 : Etudier la fonction $f : x \mapsto sin(2\,arctan(x))$

Exercice C.6 : Déterminer le domaine de dérivabilité des fonctions suivantes et calculer leurs dérivées.

$$f(x) = arcsin\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) \ ; g(x) = arctan\left(\frac{1}{1 + x^2}\right)$$

Exercice C.7 : Soit n un entier naturel. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme S_n :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} arctan\left(\frac{1}{k^2 + k + 1}\right)$$

a) Montrer que :

$$\forall x \geq 0, arctan\left(\frac{1}{x^2 + x + 1}\right) = arctan(x + 1) - arctan(x)$$

b) En déduire la valeur de S_n puis la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice C.8 : a) Démontrer que :

$$\forall x \geq 0, 0 \leq x - arctan(x) \leq \frac{x^3}{3}$$

b) En déduire que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - arctan(x)}{x^2}$$

Partie D : Fonctions trigonométriques hyperboliques

Exercice D.1 : On pose :

$$\forall\, x \geq 0, f(x) = \frac{1}{ch(x)}$$

1) Montrer que f réalise une bijection vers un intervalle I à préciser.
2) Représenter les courbes de f et de sa réciproque g.
3) Démontrer que :

$$\forall y \geq 1, ch\big(g(y)\big) = \frac{1}{y} \text{ et } sh\big(g(y)\big) = \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1}$$

4) Etudier le domaine de dérivabilité et la dérivée de g.

Exercice D.2 : Montrer que :

$$\forall\, x \geq 0, arctan\big(sh(x)\big) = arccos\left(\frac{1}{ch(x)}\right)$$