

Correction TD 1 : Inégalité dans $\mathbb{R}$

Partie A : Résolution d'inégalité

Exercice A1 : Résoudre les inéquations suivantes :

$$a) \frac{x^2 + x - 30}{x + 1} \geq 0 \quad b) \frac{x + 1}{x - 2} \leq \frac{2}{x + 2}$$

a) On doit regarder le signe d'un quotient, il peut être judicieux (c'est un euphémisme !) de faire un tableau de signe afin de regarder le signe du numérateur et du dénominateur.

1^{er} cas : Signe de $x^2 + x - 30$

C'est un polynôme du second degré. On peut donc chercher ses racines.

Méthode 1 : Grâce au discriminant

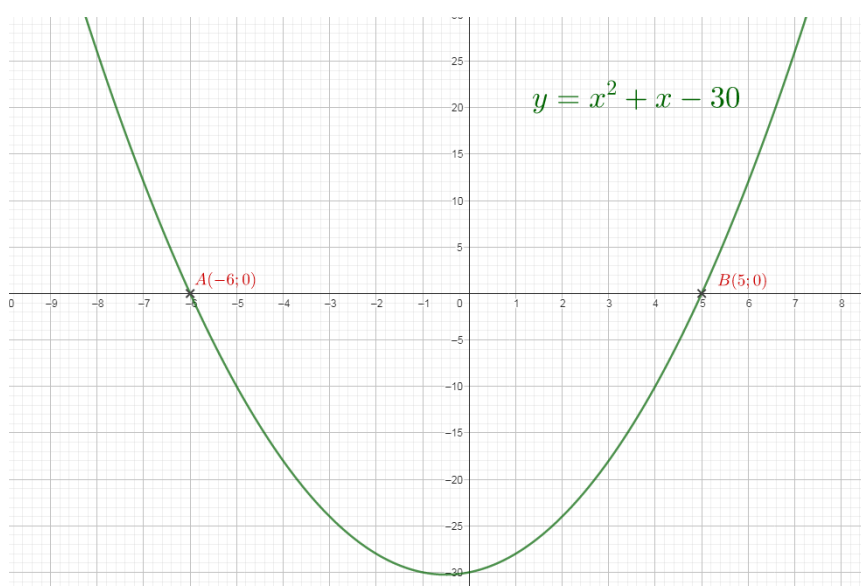
On résout : $x^2 + x - 30 = 0$

On a :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \times 1 \times (-30) = 121 = 11^2$$

On a donc deux solutions pour $x^2 + x - 30 = 0$:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 11}{2} = -6 ; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 11}{2} = 5$$



On peut donc tracer le tableau de signe de $x^2 + x - 30$:

x	$-\infty$	-6	5	$+\infty$	
x^2+x-30	+	0	-	0	+

Méthode 2 : Factorisation

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x - 30 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 30 - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{11}{2}\right)^2 = (x - 5)(x + 6)$$

On a donc :

x	$-\infty$	-6	5	$+\infty$	
$x+6$	$-$	0	$+$	$+$	
$x-5$	$-$	$-$	0	$+$	
x^2+x-30	$+$	0	$-$	0	$+$

2^{ème} cas : Signe de $x + 1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$

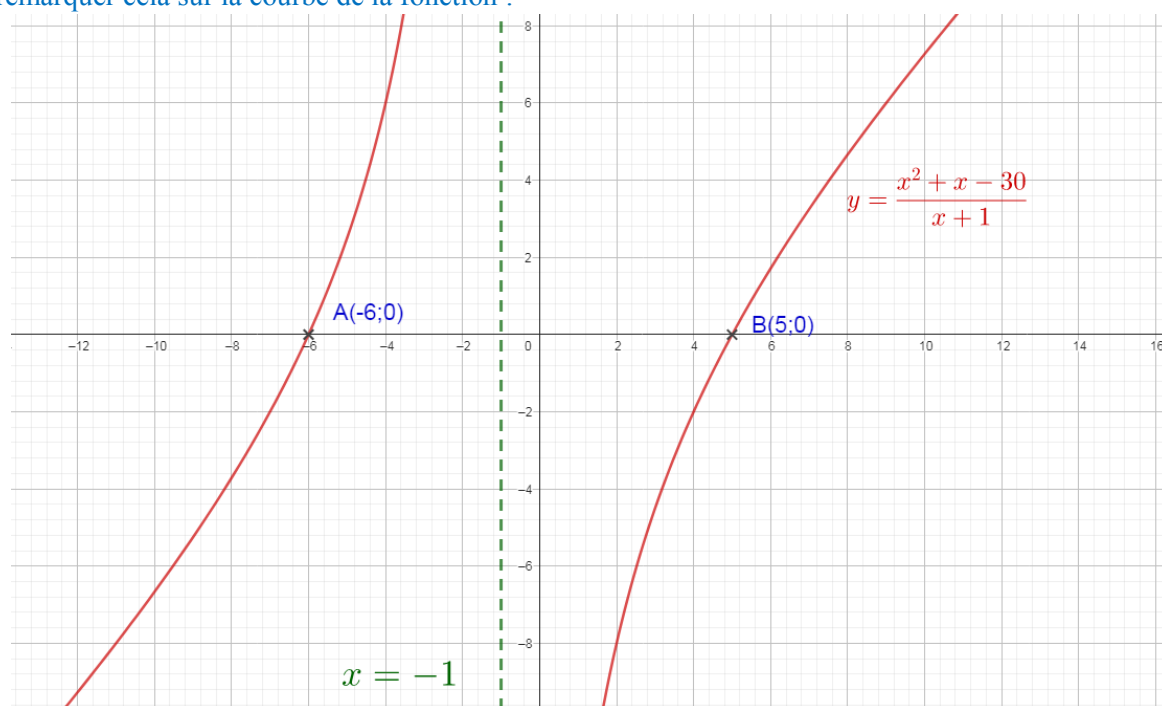
En combinant les deux tableaux de signe (sans oublier que la valeur -1 est interdite !), on obtient :

x	$-\infty$	-6	-1	5	$+\infty$	
x^2+x-30	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x^2+x-30}{x+1}$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$

On en déduit donc que :

$$\frac{x^2 + x - 30}{x + 1} \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-6; -1[\cup]5; +\infty]$$

On peut remarquer cela sur la courbe de la fonction :



On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}, \quad \frac{x+1}{x-2} \leq \frac{2}{x+2} &\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-2} - \frac{2}{x+2} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x+2) - 2(x-2)}{(x-2)(x+2)} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 + x + 6}{(x-2)(x+2)} \leq 0 \end{aligned}$$

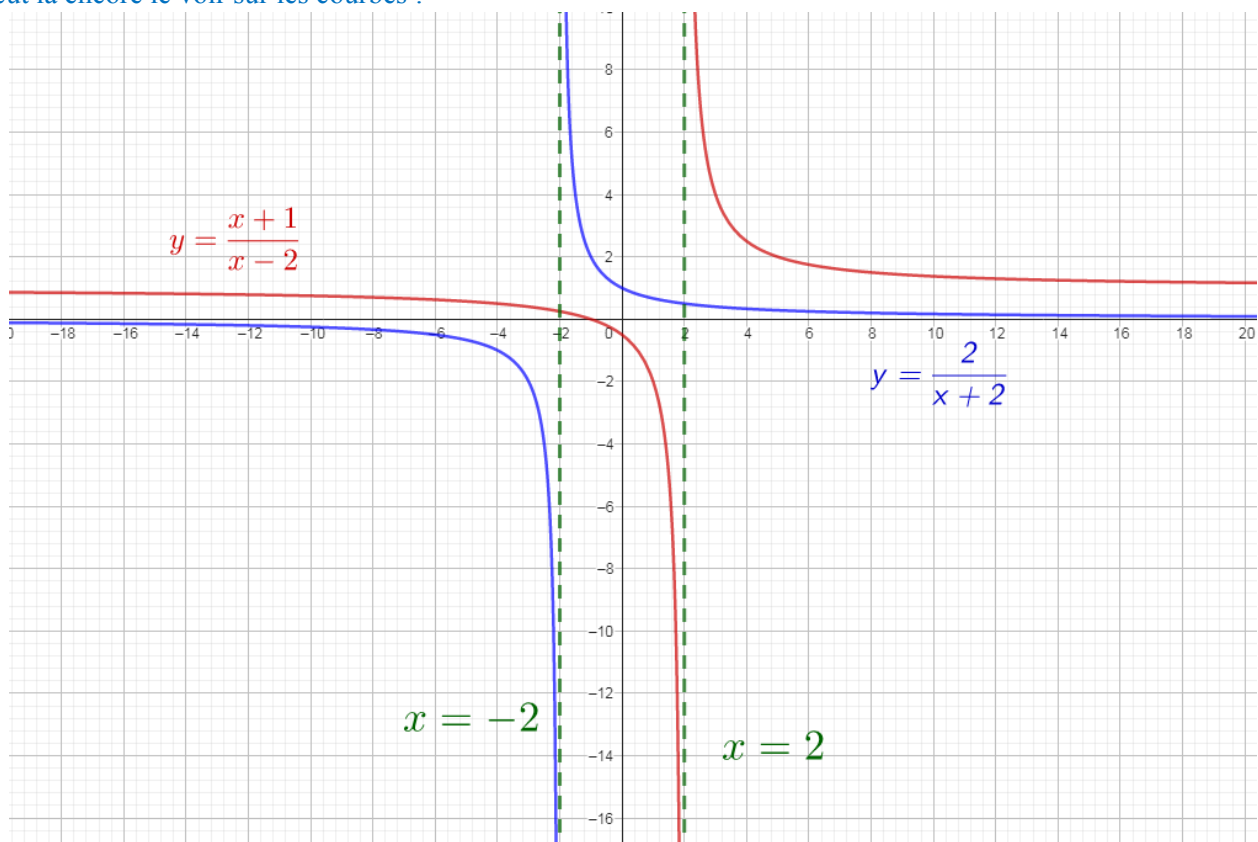
Là encore on détermine le signe du numérateur et celui du dénominateur.

Comme précédemment pour le a) de cet exercice, le numérateur est positif pour tout x réel.

On fait de même avec le dénominateur. On obtient donc :

$$\frac{x+1}{x-2} \leq \frac{2}{x+2} \Leftrightarrow x \in]-2; 2[$$

On peut là encore le voir sur les courbes :



Exercice A.2 : Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

$$\begin{aligned} a) \quad x - 1 &= \sqrt{x+2} & b) \quad \sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{2x - 3} < 0 & c) \quad \sqrt{x+4} + \sqrt{x+2} = 1 \\ d) \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{2x-1} &< \frac{1}{4x^2} \end{aligned}$$

a) On a :

$$x - 1 = \sqrt{x+2} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in [1; +\infty[$$

De plus on a :

$$\begin{cases} x - 1 = \sqrt{x+2} \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = x+2 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 1 = 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Or on sait que :

$$x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \leq 1 \\ \text{ou} \\ x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \geq 1 \end{cases} \quad (\text{avec } \Delta = 9 + 4 = 13)$$

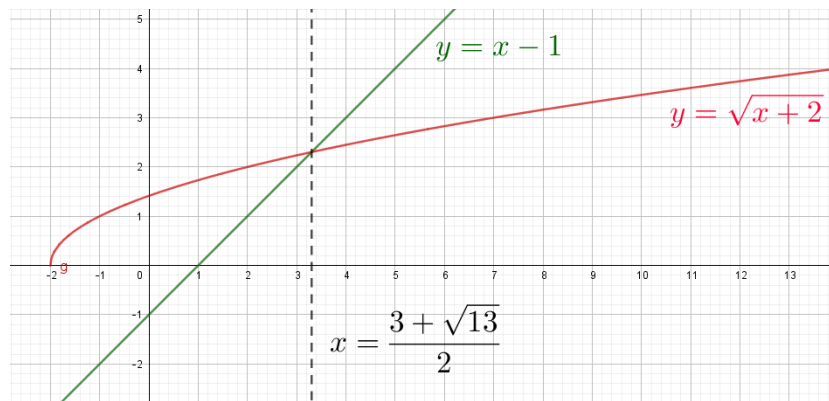
On en déduit donc que :

$$\begin{cases} x - 1 = \sqrt{x + 2} \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

On en déduit donc que :

$$x - 1 = \sqrt{x + 2} \Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

Remarque : On peut voir cela sur une courbe :



b) $\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{2x - 3} < 0$

On doit déjà étudier les valeurs de x pour lesquelles les racines carrées sont définies.

On doit avoir :

$$\begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ 2x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 2) \geq 0 \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$$

De plus on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{2x - 3} < 0 &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x} < \sqrt{2x - 3} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x < 2x - 3 \\ x \geq 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 < 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

On cherche les zéros (ou les racines) de $x \mapsto x^2 - 4x + 3$:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \text{ou} \\ x = 1 \end{cases}$$

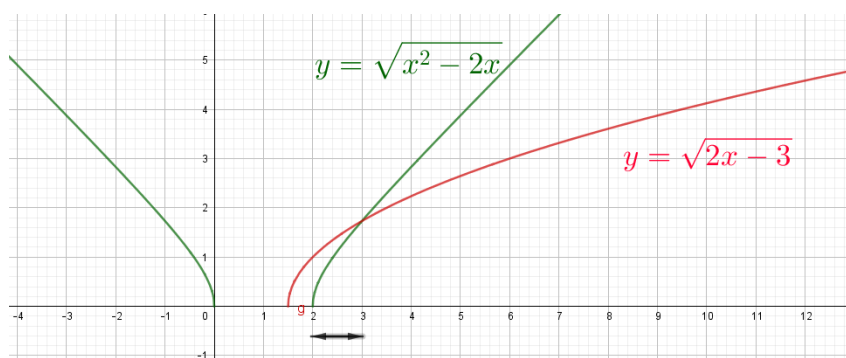
On en déduit donc que :

$$x^2 - 4x + 3 < 0 \Leftrightarrow x \in]1; 3[$$

On en déduit donc que :

$$\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{2x - 3} < 0 \Leftrightarrow x \in [2; 3]$$

Remarque : On peut le voir graphiquement :



c) $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+2} = 1$

On doit déjà étudier les valeurs de x pour lesquelles les racines carrées sont définies.

On doit avoir :

$$\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -2$$

On peut analyser le fait que la fonction $x \mapsto \sqrt{x+4} + \sqrt{x+2}$ est strictement croissante (par somme et composée de fonctions croissantes). On pose alors $f : x \mapsto \sqrt{x+4} + \sqrt{x+2}$. On a $\mathcal{D}_f = [-2; +\infty[$ et $f(-2) = \sqrt{2} > 1$.

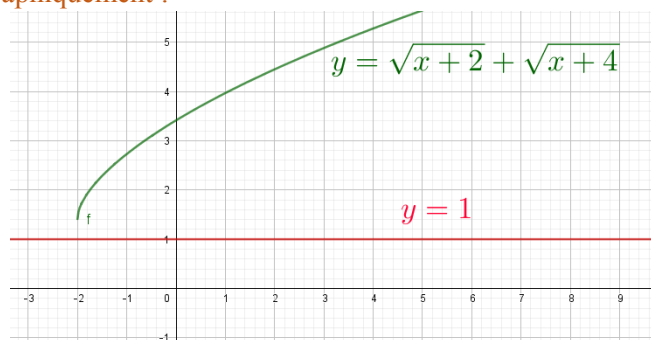
On a donc le tableau de variation suivant :

x	-2	$+\infty$
f	$\sqrt{2}$	$\nearrow$

On a donc :

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{x+2} = 1 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Remarque : On peut le voir graphiquement :



d) $\frac{1}{x} - \frac{1}{2x-1} < \frac{1}{4x^2}$

On doit déjà étudier les valeurs de x pour lesquelles l'inéquation est définie.

On doit avoir :

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

De plus on a :

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{2x-1} < \frac{1}{4x^2} \Leftrightarrow \frac{2x-1-x}{(2x-1)x} - \frac{1}{4x^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{4x(x-1) - (2x-1)}{(2x-1)4x^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 6x + 1}{(2x-1)4x^2} < 0$$

On doit étudier séparément le signe du numérateur et du dénominateur.

$$4x^2 - 6x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 36 - 16 = 20$$

On a donc :

$$4x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6 - \sqrt{20}}{8} = \frac{3 - \sqrt{5}}{4} \\ \text{ou} \\ x = \frac{6 + \sqrt{20}}{8} = \frac{3 + \sqrt{5}}{4} \end{cases}$$

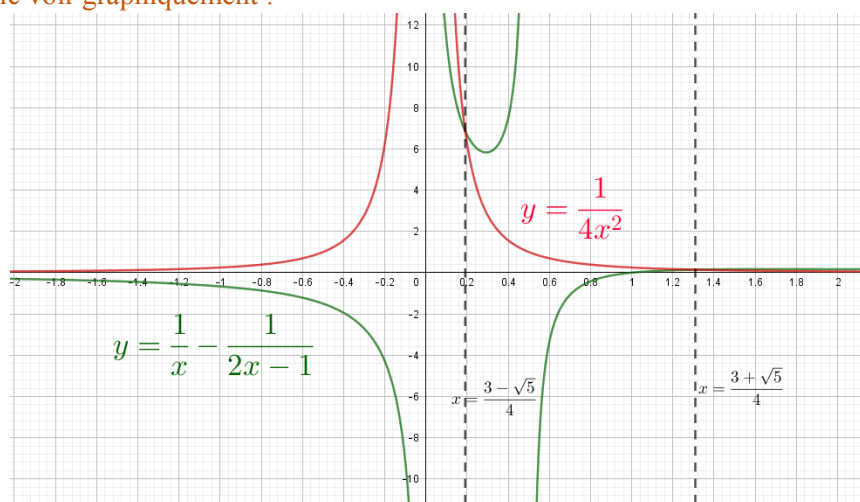
On a donc :

x	$-\infty$	0	$\frac{3-\sqrt{5}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3+\sqrt{5}}{4}$	$+\infty$	
$4x^2-6x+1$	+	+	0	-	-	0	+
$2x-1$	-	-	-	0	+	+	+
$\frac{4x^2-6x+1}{2x-1}$	-	-	0	+	-	0	+

On en déduit donc que :

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{2x-1} < \frac{1}{4x^2} \Leftrightarrow x \in]-\infty; 0[\cup \left] 0; \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right]$$

Remarque : On peut le voir graphiquement :



Exercice A3 : Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x+1|} = 1 & 2) \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x+1|} \geq 1 & 3) x|x-1| < |x|(x-1) \\ 4) \left| x + \frac{1}{x} \right| > 3 & 5) |x+4| \leq |2x+1| & 6) \left| \frac{x-1}{x+3} \right| \leq 2 \end{array}$$

$$1) \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x+1|} = 1$$

On va ici distinguer trois cas :

1^{er} cas : $x < -1$

On a alors :

$$\begin{cases} \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x+1|} = 1 \\ x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = 1 \\ x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2x-1}{x(x+1)} = 1 \\ x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x + 1 = 0 \\ x < -1 \end{cases}$$

On résout indépendamment $x^2 + 3x + 1 = 0$.

$$x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 5$$

On a alors :

$$x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} < -1 \\ \text{ou} \\ x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} > -1 \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{cases} \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x+1|} = 1 \\ x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$$

1^{er} cas : $x \in]-1; 0[$

On a alors :

$$\begin{cases} \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x+1|} = 1 \\ x \in]-1; 0[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = 1 \\ x \in]-1; 0[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-1}{x(x+1)} = 1 \\ x \in]-1; 0[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 1 = 0 \\ x \in]-1; 0[\end{cases}$$

On résout indépendamment $x^2 + x + 1 = 0$.

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = -3 < 0$$

On a alors :

$$\begin{cases} \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x+1|} = 1 \\ x \in]-1; 0[\end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

1^{er} cas : $x > 0$

On a alors :

$$\begin{cases} \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x+1|} = 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x+1}{x(x+1)} = 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 1 = 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

On résout indépendamment $x^2 - x - 1 = 0$.

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 5$$

On a alors :

$$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0 \\ \text{ou} \\ x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0 \end{cases}$$

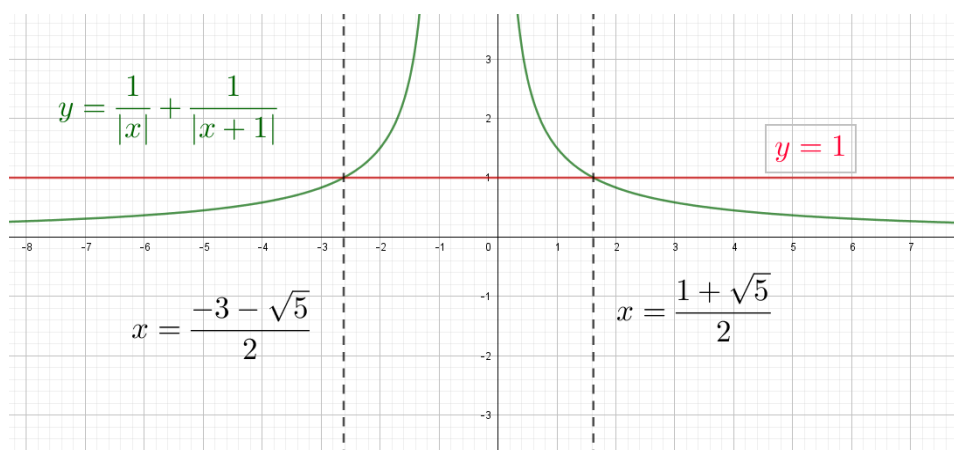
On a alors :

$$\begin{cases} \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x+1|} = 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

On en déduit donc que :

$$\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x+1|} = 1 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$$

Remarque : On peut le voir graphiquement :



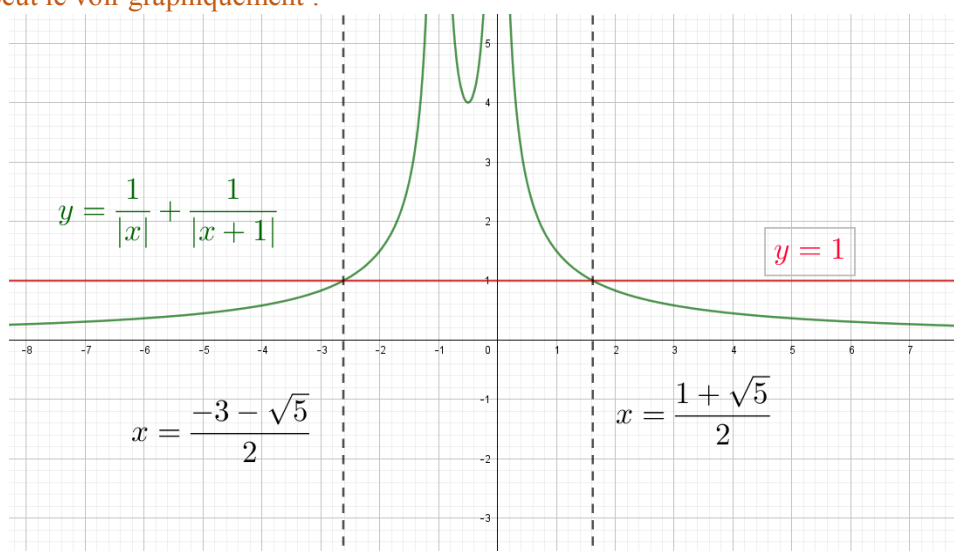
$$2) \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x+1|} \geq 1$$

Il suffit de reprendre ce que l'on a fait précédemment, avec des inégalités au lieu d'égalité !

On a alors :

$$\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x+1|} \geq 1 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right] \setminus \{-1; 0\}$$

Remarque : On peut le voir graphiquement :



$$3) x|x-1| < |x|(x-1)$$

On peut déjà voir que $x = 0$ et $x = 1$ ne sont pas solution de l'inéquation !

De plus on a :

$$x|x-1| < |x|(x-1) \Leftrightarrow \frac{x}{|x|} < \frac{x-1}{|x-1|}$$

De plus on sait que :

$$\frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

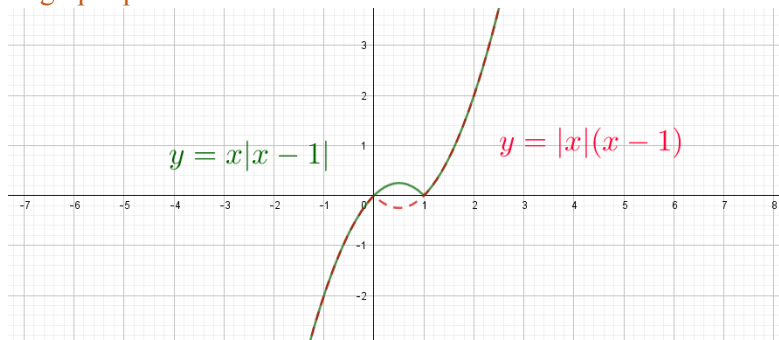
On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \forall x < 0, -1 &= \frac{x}{|x|} = \frac{x-1}{|x-1|} \\ \forall x \in]0; 1[, 1 &= \frac{x}{|x|} > \frac{x-1}{|x-1|} = -1 \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$x|x-1| < |x|(x-1) \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Remarque : On peut le voir graphiquement :



4) $\left|x + \frac{1}{x}\right| > 3$

On a :

$$\left|x + \frac{1}{x}\right| > 3 \Leftrightarrow \left|\frac{x^2 + 1}{x}\right| > 3 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{|x|} > 3$$

Là encore on peut distinguer deux cas.

1^{er} cas : $x < 0$:

On a alors :

$$\begin{cases} \frac{x^2 + 1}{|x|} > 3 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{-x} > 3 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x + 1 > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

On résout $x^2 + 3x + 1 = 0$:

$$\Delta = 9 - 4 = 5$$

On en déduit donc que :

$$x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \\ \text{ou} \\ x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$x^2 + 3x + 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty; \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} \frac{x^2 + 1}{|x|} > 3 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left]-\infty; \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}; 0\right[$$

2^{ème} cas : $x > 0$:

On a alors :

$$\begin{cases} \frac{x^2 + 1}{|x|} > 3 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{x} > 3 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

On résout $x^2 - 3x + 1 = 0$:

$$\Delta = 9 - 4 = 5$$

On en déduit donc que :

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \\ \text{ou} \\ x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$x^2 - 3x + 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\infty; \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right[\cup \left] \frac{3 + \sqrt{5}}{2}; +\infty \right[$$

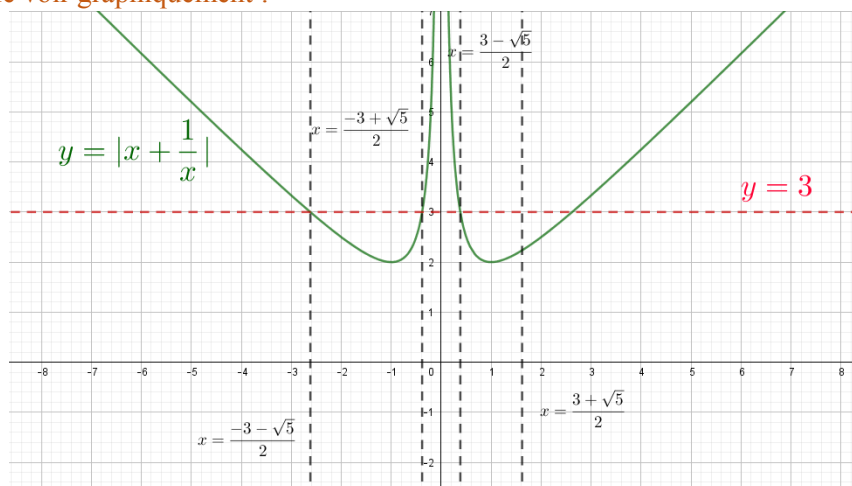
On en déduit donc que :

$$\begin{cases} \frac{x^2 + 1}{|x|} > 3 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left] 0; \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right[\cup \left] \frac{3 + \sqrt{5}}{2}; +\infty \right[$$

On en déduit donc que :

$$\left| x + \frac{1}{x} \right| > 3 \Leftrightarrow x \in \left] -\infty; \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \right[\cup \left] \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}; 0 \right[\cup \left] 0; \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right[\cup \left] \frac{3 + \sqrt{5}}{2}; +\infty \right[$$

Remarque : On peut le voir graphiquement :



5) $|x + 4| \leq |2x + 1|$

Là encore on distingue trois cas.

1^{er} cas : $x \leq -4$

$$\begin{cases} |x + 4| \leq |2x + 1| \\ x \leq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 4 \leq -2x - 1 \\ x \leq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x \leq -4 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -4$$

2^{ième} cas : $x \in] -4; -\frac{1}{2} [$

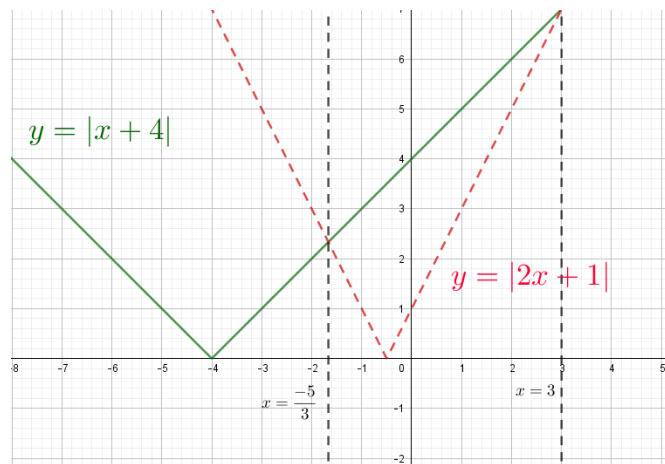
$$\begin{cases} |x + 4| \leq |2x + 1| \\ x \in] -4; -\frac{1}{2} [\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 < -2x - 1 \\ x \in] -4; -\frac{1}{2} [\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{5}{3} \\ x \in] -4; -\frac{1}{2} [\end{cases} \Leftrightarrow x \in] -4; -\frac{5}{3} [$$

3^{ième} cas : $x \geq -\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} |x + 4| \leq |2x + 1| \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 \leq 2x + 1 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3$$

On en déduit donc que :

$$|x + 4| \leq |2x + 1| \Leftrightarrow x \in \left] -\infty; -\frac{5}{3} \right[\cup [3; +\infty[$$



$$6) \left| \frac{x-1}{x+3} \right| \leq 2$$

Là encore on distingue trois cas.

1^{er} cas : $x < -3$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{x-1}{x+3} \right| \leq 2 \\ x < -3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1-x}{-x-3} \leq 2 \\ x < -3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \leq -7 \\ x \leq -4 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \leq -7$$

2^{ième} cas : $x \in]-3; 1]$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{x-1}{x+3} \right| \leq 2 \\ x \in]-3; 1] \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1-x}{x+3} \leq 2 \\ x \in]-3; 1] \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq -\frac{5}{3} \\ x \in]-3; 1] \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{5}{3}; 1 \right]$$

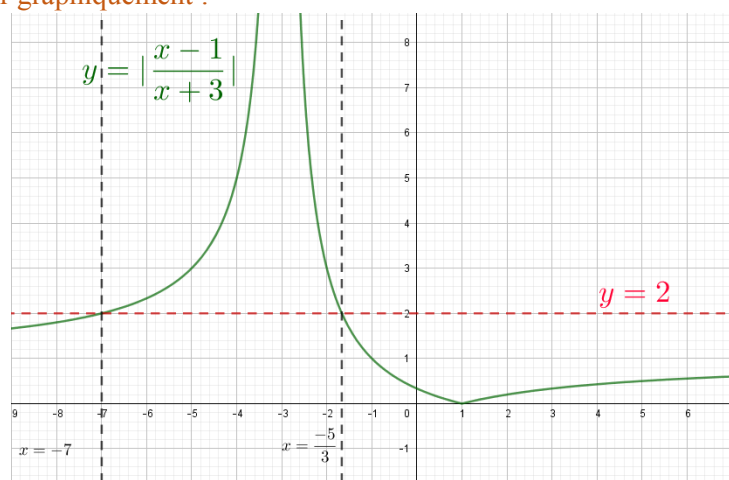
3^{ième} cas : $x > 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{x-1}{x+3} \right| \leq 2 \\ x > 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-1}{x+3} \leq 2 \\ x > 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq -7 \\ x > 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow x > 1$$

On en déduit donc que :

$$\left| \frac{x-1}{x+3} \right| \leq 2 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -7] \cup \left[-\frac{5}{3}; +\infty \right]$$

Remarque : On peut le voir graphiquement :



Exercice A.4 : Soient $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - 2| \leq 1$ et $y \in \mathbb{R}$ tel que $2 \leq y \leq 5$. Encadrer $x+y$, xy et $\frac{x}{y}$.

Il suffit de voir l'équivalence :

$$|x - 2| \leq 1 \Leftrightarrow x \in [1; 3]$$

On a alors :

$$\begin{cases} |x-2| \leq 1 \\ 2 \leq y \leq 5 \end{cases} \Rightarrow 3 \leq x+y \leq 8$$

$$\begin{cases} |x-2| \leq 1 \\ 2 \leq y \leq 5 \end{cases} \Rightarrow 2 \leq xy \leq 15$$

$$\begin{cases} |x-2| \leq 1 \\ 2 \leq y \leq 5 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{3}{2}$$

Exercice A.5 : On a :

$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ -3 \leq y \leq 6 \end{cases}$$

Encadrer $x+y$, xy et $\frac{x}{y}$.

On a :

$$-1 \leq x+y \leq 11$$

Ici il n'y a aucun problème.

ATTENTION pour le produit car y change de signe. On peut donc distinguer les cas :

1^{er} cas : $-3 \leq y \leq 0$

On a :

$$2 \leq x \leq 5 \Rightarrow 5y \leq xy \leq 2y \Rightarrow -15 \leq xy \leq 0$$

2^{ième} cas : $0 \leq y \leq 6$

On a :

$$2 \leq x \leq 5 \Rightarrow 2y \leq xy \leq 5y \Rightarrow 0 \leq xy \leq 30$$

Ainsi on a :

$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ -3 \leq y \leq 6 \end{cases} \Rightarrow -15 \leq xy \leq 30$$

De même il faut faire **ATTENTION** pour le quotient. On doit déjà voir que $y \neq 0$.

1^{er} cas : $-3 \leq y < 0$

$$-3 \leq y < 0 \Rightarrow \frac{1}{y} \leq -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x}{y} \leq -\frac{x}{3} \leq -\frac{2}{3}$$

2^{ième} cas : $0 < y \leq 6$

$$0 < y \leq 6 \Rightarrow \frac{1}{y} \geq \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{x}{y} \geq \frac{x}{6} \geq \frac{2}{6}$$

On a donc :

$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ -3 \leq y \leq 6 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} \in \left] -\infty; -\frac{2}{3} \right] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty \right]$$

Partie B : Démonstration d'inégalité

Exercice B.1 : Démontrer les inégalités suivantes :

$$a) \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \quad b) \forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, ab + ac + bc \leq (a^2 + b^2 + c^2)$$

a) C'est un grand classique !!! On étudie la différence :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - ab = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{2} = \frac{(a-b)^2}{2} \geq 0 \Rightarrow \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

b) On peut utiliser la question a) :

On a :

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) + \frac{1}{2}(a^2 + c^2) + \frac{1}{2}(b^2 + c^2) \geq ab + ac + bc$$

Exercice B.2 : Démontrer que pour tout x, y réels strictement positifs :

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

Cela revient au même de démontrer que :

$$\forall X > 0, X + \frac{1}{X} \geq 2$$

On sait que :

$$\forall x > 0, (x - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x - 2 + \frac{1}{x} \geq 0 \text{ (car } x > 0) \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$$

Il suffit ensuite de poser $X = \frac{x}{y}$

Remarque : On peut aussi étudier la fonction définie sur $]0; +\infty[$:

$$f: x \mapsto x + \frac{1}{x}$$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et :

$$\forall x > 0, f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

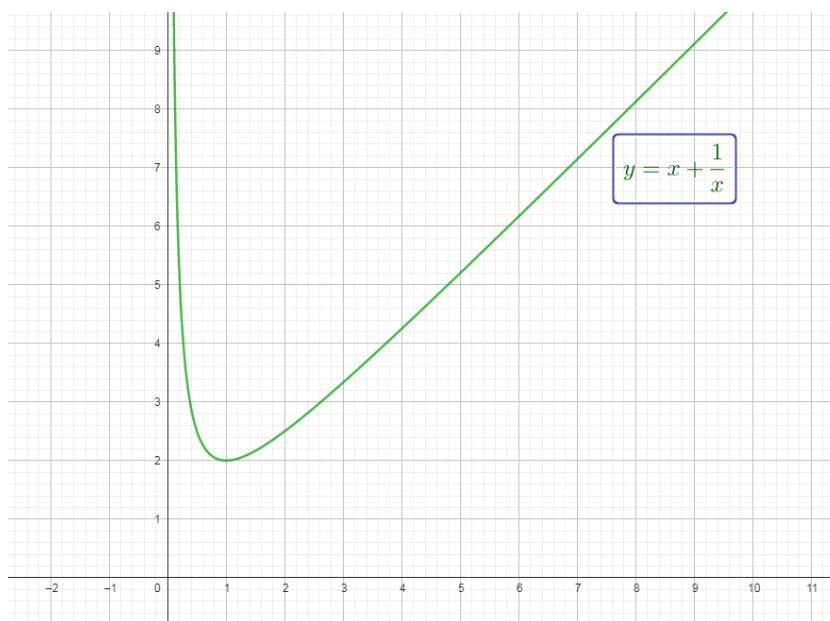
On a donc :

x	0	1	$+\infty$
$x^2 - 1$	-	0	+
f			

D'après le tableau de variation on en déduit donc que :

$$\forall x > 0, f(x) \geq 2$$

D'où l'égalité.



Remarque 2 : On peut le montrer directement :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 = \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{xy} = \frac{(x - y)^2}{xy} \geq 0$$

Remarque 3 : On peut aussi fixer une des variables et étudier la fonction en faisant varier l'autre variable. Soit $y \in]0; +\infty[$. On pose :

$$g_y: x \mapsto \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \text{ pour } x > 0$$

g_y est dérivable sur $]0; +\infty[$. On a :

$$\forall x > 0, g'_y(x) = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 y} = \frac{(x - y)(x + y)}{x^2 y}$$

On sait que x et y sont strictement positifs. On a donc $g'_y(x)$ est du signe de $x - y$. On a alors :

x	0	y	$+\infty$
$g'_y(x)$	-	0	+
g_y			

On a :

$$g_y(y) = 2$$

On en déduit donc que :

$$\forall y > 0, \forall x > 0, g_y(x) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

Exercice B.3 : Démontrer que pour tout x et y réels strictement positifs :

$$\frac{xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{4}$$

Méthode 1 : On étudie la différence

Là encore on étudie la différence. On sait que :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \frac{xy}{x+y} - \frac{x+y}{4} = \frac{4xy - (x+y)^2}{4(x+y)} = -\frac{(x-y)^2}{4(x+y)} \leq 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \frac{xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{4}$$

Méthode 2 : On fixe une des deux variables et on étudie la fonction

On peut aussi fixer une des variables et étudier la fonction en faisant varier l'autre variable.

Soit $y \in]0; +\infty[$. On pose :

$$g_y: x \mapsto \frac{xy}{x+y} - \frac{x+y}{4} \text{ pour } x > 0$$

g_y est dérivable sur $]0; +\infty[$. On a :

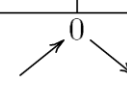
$$\forall x > 0, g'_y(x) = \frac{y(x+y) - xy}{(x+y)^2} - \frac{1}{4} = \frac{4y^2 - (x+y)^2}{4(x+y)^2} = -\frac{x^2 + 2xy - 3y^2}{4(x+y)^2}$$

On sait que x et y sont strictement positifs. On a donc $g'_y(x)$ est du signe de $-(x^2 + 2xy - 3y^2)$.

On peut faire calculer le discriminant ou bien utiliser la forme canonique.

$$\forall y > 0, \forall x > 0, x^2 + 2xy - 3y^2 = (x+y)^2 - 4y^2 = (x+3y)(x-y)$$

Ainsi $g'_y(x)$ est du signe de $y - x$ car $x + 3y > 0$.

x	0	y	$+\infty$
$g'_y(x)$	+	0	-
g_y			

On en déduit donc que :

$$\forall y > 0, \forall x > 0, g_y(x) = \frac{xy}{x+y} - \frac{x+y}{4} \leq 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{++})^2, \frac{xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{4}$$

Exercice B.4 : Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + 2x + 2} \leq 3$$

C'est une inégalité double. On peut déjà démontrer l'inégalité de gauche !

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 > 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + 2x + 2}$$

De plus on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + 2x + 2} = \frac{(x+1)^2 + 3}{(x+1)^2 + 1} = 1 + \frac{2}{(x+1)^2 + 1}$$

Or on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x+1)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow \frac{2}{(x+1)^2 + 1} \leq 2$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + 2x + 2} = 1 + \frac{2}{(x+1)^2 + 1} \leq 3$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + 2x + 2} \leq 3$$

Exercice B.5 : Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Or on sait que $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$. On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{n+1} \geq \sqrt{n}$$

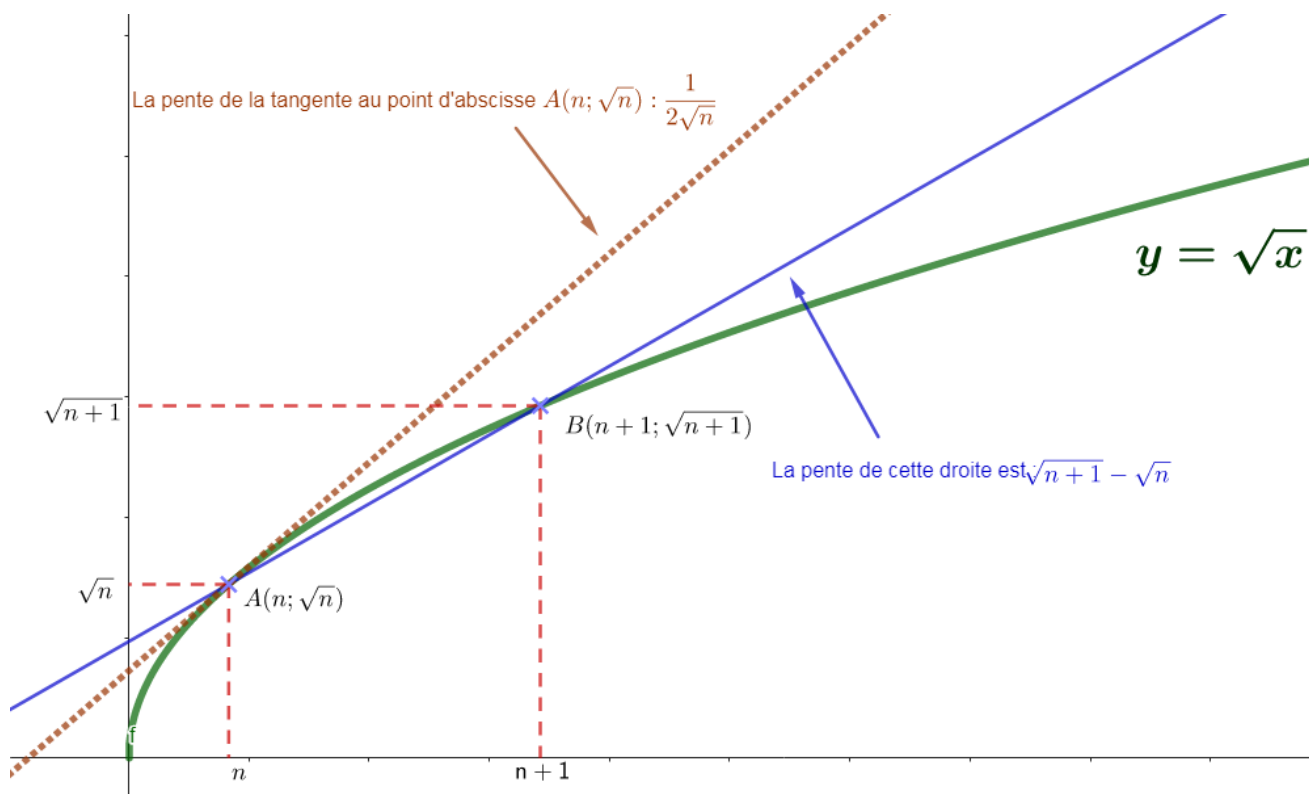
On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Remarque : On peut illustrer cette inégalité avec la concavité de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.



On verra dans l'année que l'on pourra démontrer cette inégalité grâce à un théorème que l'on appelle le théorème de l'inégalité des accroissements finis.

Exercice B.6 : Soit $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^{++})^n$. On veut démontrer que :

$$(a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) = \left(\sum_{k=1}^n a_i \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_i} \right) \geq n^2$$

1) Démontrer que :

$$\forall x > 0, x + \frac{1}{x} \geq 2$$

2) En déduire par récurrence que :

$$\left(\sum_{k=1}^n a_i \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_i} \right) \geq n^2$$

1) On sait que :

$$\forall x > 0, (x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x - 2 + \frac{1}{x} \geq 0 \text{ (car } x > 0) \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$$

2) On raisonne par récurrence :

On pose :

$$\forall (a_1; \dots; a_n) \in (\mathbb{R}^{++})^n, P_n = \left(\sum_{k=1}^n a_i \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_i} \right) \geq n^2$$

Initialisation : Pour $n = 1$:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) = a_1 \times \frac{1}{a_1} = 1 \geq 1^2$$

Donc P_1 est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel non nul fixé. On suppose vraie P_n . On a alors :

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) \geq n^2$$

On veut montrer que :

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right) \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{a_i}\right) \geq (n+1)^2$$

On a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right) \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{a_i}\right) = \left(\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) + a_{n+1}\right) \left(\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right) + \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

On développe :

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right) \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{a_i}\right) = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right)}_{\geq n^2 \text{ d'après } HR_n} + \left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \frac{1}{a_{n+1}} + a_{n+1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right) + 1$$

On a donc d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right) \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{a_i}\right) &\geq n^2 + \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{n+1}}\right) + \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_{n+1}}{a_i}\right) + 1 \\ \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right) \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{a_i}\right) &\geq n^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_i}\right) + 1 \end{aligned}$$

Or on a vu à la question 1) que :

$$\forall x > 0, x + \frac{1}{x} \geq 2$$

On pose alors :

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, x = \frac{a_i}{a_{n+1}} &\Rightarrow \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \frac{a_i}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_i} \geq 2 \\ \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right) \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{a_i}\right) &\geq n^2 + \sum_{k=1}^n 2 + 1 \\ \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right) \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{a_i}\right) &\geq n^2 + 2n + 1 \\ \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right) \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{a_i}\right) &\geq (n+1)^2 \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : P_1 est vraie et P_n est héréditaire donc d'après le principe de récurrence P_n est vraie pour tout entier naturel n non nul.

Remarque 1 : Si vous avez des difficultés à « apprivoiser » le symbole somme c'est normal ! Je ne peux que vous conseiller d'illustrer l'hérédité sur un petit exemple, puis avec l'écriture développée des sommes :

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \underbrace{a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}}_{\text{Parfois moins pratique mais plus clair au début}}$$

Illustration de l'hérédité avec l'hypothèse P_3 vraie pour démontrer que P_4 est vraie :

On suppose que :

$$\forall a_1 > 0, \forall a_2 > 0, \forall a_3 > 0, (a_1 + a_2 + a_3) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) \geq 9$$

On prend alors 4 nombres réels strictement positifs :

Soit $b_1 > 0, b_2 > 0, b_3 > 0$ et $b_4 > 0$. On a :

$$(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \frac{1}{b_4}\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= (b_1 + b_2 + b_3) \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} \right) + b_4 \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} \right) + \frac{1}{b_4} (b_1 + b_2 + b_3) + 1 \\
&\geq 9 + \frac{b_4}{b_1} + \frac{b_4}{b_2} + \frac{b_4}{b_3} + \frac{b_1}{b_4} + \frac{b_2}{b_4} + \frac{b_3}{b_4} + 1 \\
&\geq 10 + \underbrace{\left(\frac{b_4}{b_1} + \frac{b_1}{b_4} \right)}_{\geq 2} + \underbrace{\left(\frac{b_4}{b_2} + \frac{b_2}{b_4} \right)}_{\geq 2} + \underbrace{\left(\frac{b_4}{b_3} + \frac{b_3}{b_4} \right)}_{\geq 2} \\
&\geq 16
\end{aligned}$$

Remarque 2 : On aurait aussi pu le faire directement en développant, mais c'est un peu plus difficile à écrire et à visualiser :

On a :

$$\begin{aligned}
&\forall (a_1; \dots; a_n) \in (\mathbb{R}^{*+})^n, (a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \\
&= 1 + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_1}{a_3} + \dots + \frac{a_1}{a_n} + \\
&\quad + \frac{a_2}{a_1} + 1 + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_2}{a_n} + \\
&\quad \quad \quad + \dots + \\
&\quad \quad \quad + \vdots + \\
&\quad \quad \quad + \frac{a_n}{a_1} + \frac{a_n}{a_2} + \dots + \frac{a_n}{a_{n-1}} + 1 \\
&= n + \left[\left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} \right) + \dots + \left(\frac{a_1}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \right) \right] + \left[\left(\frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_2} \right) + \dots + \left(\frac{a_2}{a_n} + \frac{a_n}{a_2} \right) \right] + \dots + \left[\frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_{n-1}} \right] \\
&\geq n + 2(n-1) + 2(n-2) + \dots + 2 \times 1 \\
&\geq n + 2 \times \frac{n(n-1)}{2} \\
&\geq n^2
\end{aligned}$$

Avec l'écriture Σ cela donnerait :

$$\begin{aligned}
&(a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \right) = n + \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{a_k} \right) = n + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=i+1}^n \left(\frac{a_i}{a_k} + \frac{a_k}{a_i} \right) \right) \geq n + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=i+1}^n 2 \right) \\
&\geq n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \geq n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} i \geq n^2
\end{aligned}$$

Exercice B.7 : On pose :

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{|x|}{1+|x|} \end{cases}$$

Montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x+y) \leq g(x) + g(y)$$

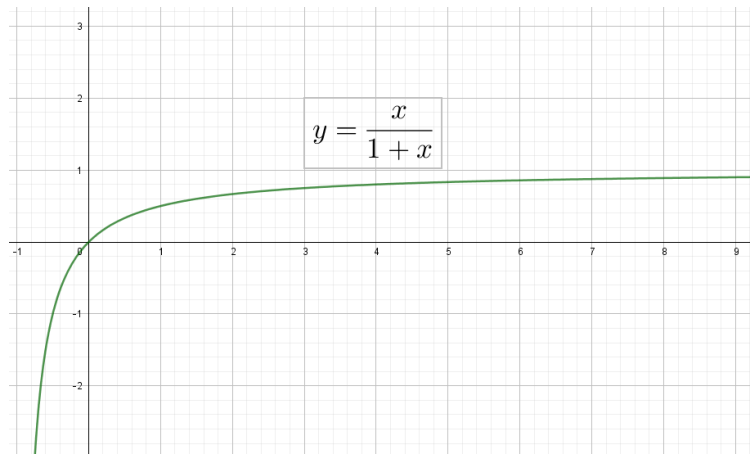
On pose

$$f: \begin{cases}]-1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{1+x} \end{cases}$$

f est dérivable sur $]-1; +\infty[$ et :

$$\forall x > -1, f'(x) = \frac{(1+x) - x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$$

On en déduit donc que f est croissante sur $]-1; +\infty[$.



On en déduit donc que :

$$\forall (x, y) \in]-1; +\infty[^2, x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$$

Or on sait d'après l'inégalité triangulaire que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x + y| \leq |x| + |y|$$

On en déduit donc que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(|x + y|) \leq f(|x| + |y|)$$

On a donc :

$$g(x + y) = \frac{|x + y|}{1 + |x + y|} \leq \frac{|x| + |y|}{1 + |x| + |y|} \Rightarrow g(x + y) \leq \frac{|x|}{1 + |x| + |y|} + \frac{|y|}{1 + |x| + |y|}$$

De plus on a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 + |x| + |y| \geq 1 + |x| \text{ et } 1 + |x| + |y| \geq 1 + |y|$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, & \begin{cases} \frac{1}{1 + |x| + |y|} \leq \frac{1}{1 + |x|} \\ \frac{1}{1 + |x| + |y|} \leq \frac{1}{1 + |y|} \end{cases} \text{ car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur }]0; +\infty[\\ \Rightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, & \begin{cases} \frac{|x|}{1 + |x| + |y|} \leq \frac{|x|}{1 + |x|} \\ \frac{|y|}{1 + |x| + |y|} \leq \frac{|y|}{1 + |y|} \end{cases} \text{ car } |x| \geq 0 \text{ et } |y| \geq 0 \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{|x + y|}{1 + |x + y|} \leq \frac{|x|}{1 + |x|} + \frac{|y|}{1 + |y|}$$

On a donc :

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x + y) \leq g(x) + g(y)}$$