TD 1 : Inégalité dans $\mathbb{R}$

Partie A : Résolution d'inégalité

Exercice A1 : Résoudre les inéquations suivantes :

$$a)\frac{x^2+x-30}{x+1}\geq 0 \qquad b)\ \frac{x+1}{x-2}\leq\frac{2}{x+2}$$

Exercice A.2 : Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

$$a)\ x-1=\sqrt{x+2} \quad b)\ \sqrt{x^2-2x}-\sqrt{2x-3}<0 \quad c)\ \sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}=1$$

$$d)\ \frac{1}{x}-\frac{1}{2x-1}<\frac{1}{4x^2}$$

Exercice A3 : Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$$1)\ \frac{1}{|x|}+\frac{1}{|x+1|}=1 \qquad 2)\ \frac{1}{|x|}+\frac{1}{|x+1|}\geq 1 \qquad 3)\ x|x-1|<|x|(x-1)$$

$$4)\ \left|x+\frac{1}{x}\right|>3 \qquad 5)\ |x+4|\leq|2x+1| \qquad 6)\ \left|\frac{x-1}{x+3}\right|\leq 2$$

Exercice A.4 : Soient $\mathrm{x}\in\mathbb{R}$ tel que $|\mathrm{x}-2|\leq 1$ et $\mathrm{y}\in\mathbb{R}$ tel que $2\leq \mathrm{y}\leq 5$. Encadrer x+y, xy et $\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}}$.

Exercice A.5 : On a :

$$\begin{cases} 2\leq x\leq 5\\ -3\leq y\leq 6\end{cases}$$

Encadrer *x+y, xy* et $\frac{x}{y}$.

Partie B : Démonstration d'inégalité

Exercice B.1 : Démontrer les inégalités suivantes :

$$a)\ \forall(a,b)\in\mathbb{R}^2, ab\leq\frac{1}{2}(a^2+b^2) \qquad b)\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3, ab+ac+bc\leq a^2+b^2+c^2$$

Exercice B.2 : Démontrer que pour tout x,y réels strictement positifs :

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$$

Exercice B.3 : Démontrer que pour tout x et y réels strictement positifs :

$$\frac{xy}{x+y}\leq\frac{x+y}{4}$$

Exercice B.4 : Démontrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R}, 0\leq\frac{x^2+2x+4}{x^2+2x+2}\leq 3$$

Exercice B.5 : Démontrer que :

$$\forall\ n\ \in\mathbb{N}^*, \sqrt{n+1}-\sqrt{n}\leq\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Exercice B.6 : Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $(a_1,\dots,a_n)\in(\mathbb{R}^{*+})^n$. On veut démontrer que :

$$(a_1+\dots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}\right)=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\geq n^2$$

1) Démontrer que :

$$\forall\ x>0, x+\frac{1}{x}\geq 2$$

2) En déduire par récurrence que :

$$(\mathrm{a}_1,\dots,\mathrm{a}_\mathrm{n})\in(\mathbb{R}^{*+})^\mathrm{n}, \left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}\mathrm{a}_\mathrm{k}\right)\left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}\frac{1}{\mathrm{a}_\mathrm{k}}\right)\geq \mathrm{n}^2$$

Exercice B.7 : On pose :

$$g: \begin{cases} \mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\dfrac{|x|}{1+|x|}\end{cases}$$

Montrer que :

$$\forall\ (x,y)\in\mathbb{R}^2, g(x+y)\leq g(x)+g(y)$$