

Chapitre 3 : Dérivation

Dans toute cette partie, on considère I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$. On rappelle ici les grands principes vus au lycée sans entrée dans la rigueur (celle-ci sera vue dans un chapitre ultérieur). L'objectif ici est de bien maîtriser les techniques de dérivation !).

I) Notion de dérivabilité

a) Définition

Définition (Taux de variation) : Soit $a \in I$ et $h \neq 0$ tel que $a + h \in I$. On appelle taux de variation de f entre a et $a+h$ le nombre :

$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Définition (Dérivabilité et nombre dérivé) : Si quand $h \ll 0$, le taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un nombre A , on dit que f est dérivable en a et on note ce nombre dérivé $f'(a)$.

On a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Exemple I.a.1 : On pose $f(x) = x^3$. Alors pour tout x réel, $f'(x) = 3x^2$.

Définition : Si f est dérivable en chaque point de I , on dit que f est dérivable sur I et on note f' la fonction dérivée.

On note :

$$\mathcal{D}(I, \mathbb{R}) = \mathcal{D}(I) = \{f: I \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ est dérivable sur } I\}$$

Remarque : Dans l'histoire de la dérivation, la notation f' nous vient de Laplace, à la fin du 18^{ème} siècle. Cependant il y a eu plusieurs notations précédentes (Newton, Leibniz, Varignon) encore en usage aujourd'hui, notation dans les autres disciplines scientifiques :

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(f(x)) \text{ ou } x'(t) = \frac{d}{dt}(x(t)) = \dot{x}(t)$$

Il arrive aussi (en mathématiques, physique, chimie... Nous verrons cela à la fin de l'année) qu'une fonction dépend de plusieurs variables. Si l'on souhaite étudier « l'évolution ponctuelle » (on peut parler de « vitesse » d'évolution) de la fonction par rapport à une seule variable, on utilise alors ce que l'on appelle des dérivées partielles (des d ronds ∂) :

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(x, y))$$

Application I.a.2 : Démontrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + \frac{3}{2}xy + \frac{10}{9}y^2 \geq 0$$

ATTENTION : Toutes les fonctions définies ne sont pas dérivables.

Contre-exemple I.a.2 : Déterminer une fonction définie sur $\mathbb{R}$ mais pas dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \text{ et } f \notin \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

b) Fonctions dérivées usuelles

Propriété I.b.1 : Les fonctions monômes, inverse, sont dérivables sur leur ensemble de définition (ATTENTION à la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ définie en 0 mais non dérivable en 0 !) et on a le tableau suivant :

$f(x)$	I	$f'(x)$
$\lambda \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
$x^n (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x^n} (n \in \mathbb{N}^*)$	$] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$] 0; +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Exemple I.b.2 : Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^7 \end{cases} \quad g: \begin{cases}]0; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[\\ x \mapsto \frac{1}{x^5} \end{cases}$$

Remarque : Le tableau précédent peut être résumé en une seule formule :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, f_\alpha(x) = x^\alpha \Rightarrow f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

Attention cependant à l'intervalle de dérivation suivant la valeur de α .

c) Opérations sur la dérivation

Proposition I.c.1 : Soient $(f; g) \in \mathcal{D}(I)^2, \lambda \in \mathbb{R}$. Alors la somme, le produit, le quotient de ces deux fonctions sont dérivables sur leur ensemble de définition et on a le tableau suivant :

- 1) $(f + g)' = f' + g'$
- 2) $(\lambda \times f)' = \lambda f'$
- 3) $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$
- 4) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- 5) $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$

Exemple I.c.2 : Dériver les fonctions suivantes en précisant sur quel intervalle elles sont dérivables.

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^7 + 3x^2 \end{cases} \quad g: \begin{cases}]0; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[\\ x \mapsto \frac{1}{x^5} + \frac{1}{\sqrt{x}} \end{cases} \quad h: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{x^2 + 1} \end{cases}$$

d) Dérivée d'une composée

Proposition I.d.1 : Soit f une fonction définie de I de $\mathbb{R}$ et g une fonction définie sur un intervalle J à valeur dans I . Si f et g sont dérivables sur leur ensemble de définition alors $h = f \circ g$ est dérivable sur J et :

$$\forall x \in J, (f \circ g)'(x) = g'(x)f'(g(x))$$

Exemple I.d.2 : Dériver les fonctions suivantes :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (x^3 - 2x + 1)^4 \end{cases} \quad g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3x^2 + 1}} \end{cases} \quad h: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos\left(\frac{1}{(x^2 + 1)^4}\right) \end{cases}$$

e) Dérivée d'ordre supérieur

Définition : Soit f une fonction définie et dérivable sur I . Il se peut que l'on ait besoin de dériver plusieurs fois la fonction f sur I . Si cela est possible on parle de :

- Dérivée première pour f'
- Dérivée seconde pour f''
- Déterminer n -ième noté $f^{(n)}$

On note :

$$\mathcal{D}^n(I, \mathbb{R}) = \mathcal{D}^n(I) = \{f: I \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ } n\text{-fois dérivable sur } I\}$$

Exemple I.e.1 : On pose :

$$g: \begin{cases}]0; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[\\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$$

a) Déterminer g' , $g^{(2)}$ et $g^{(3)}$.

b) Déterminer $g^{(n)}$ pour tout entier naturel non nul.

II) Application de la dérivation

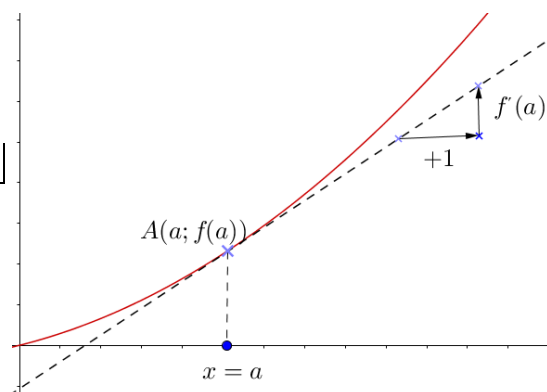
a) Equation de la tangente et approximation affine

Proposition (Equation de la tangente) II.a.1 : Soit f une fonction dérivable en $x=a$. Alors l'équation de la tangente en $x=a$ est donnée par :

$$(T_a): y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exemple II.a.2: On pose $f(x) = x^2 + 2x + 3$. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = -2$.

Application (Approximation affine) II.a.3 : Déterminer une valeur approchée de $\sqrt{1,021}$



b) Calcul de limite

Remarque : Si f est dérivable en a on a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

On peut alors se servir de la dérivation pour calculer des limites.

Application II.b.1 : Calculer les limites suivantes :

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

$$\ell_2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x - 1}$$

$$\ell_3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{\ln(x + 1)}$$

III) Monotonie d'une fonction

a) Une propriété bien pratique

Proposition III.a.1 : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On a alors :

— f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ sur I .

— f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ sur I .

Exemple II.a.2 : Déterminer le sens de variation de la fonction :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 - 6x^2 - 36x + 2 \end{cases}$$

b) Démonstration d'inégalité

Remarque : En étudiant les variations d'une fonction on peut démontrer des inégalités (vu au chapitre 1 et 2 !).

Application III.b.1: Démontrer que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, x + \frac{1}{x} \geq 2$$

Application III.b.2 : Démontrer que :

$$\forall x \geq 0, e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

c) Fonctions bijectives

Proposition III.c.3 : Soit f une fonction de I dans J bijective et dérivable. Alors si f' ne s'annule pas sur I , f^{-1} est dérivable sur l'ensemble J et :

$$\forall x \in J, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Exemple III.c.4 : On pose la fonction suivante :

$$f: x \mapsto \cos(x) \text{ définie sur } [0; \pi]$$

Démontrer que f est bijective et déterminer $(f^{-1})'$ sur un ensemble à déterminer.