

Correction TD 2 : Généralité sur les fonctions

Partie A : Ensemble de définition

Exercice A.1 : Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}} \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{2 - x}} \quad h(x) = \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$$

a) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$

On a :

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \geq x^2 \\ \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + 1} & \geq \sqrt{x^2} \text{ car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+ \\ \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + 1} & \geq |x| \geq -x \\ \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + 1} + x & \geq 0 \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}} \Rightarrow \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

b) $g(x) = \frac{x}{\sqrt{2 - x}}$

On doit avoir :

$$\begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ \sqrt{2 - x} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < 2$$

On a donc :

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{2 - x}} \Rightarrow \mathcal{D}_g =]-\infty; 2[$$

c) $h(x) = \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$

On doit avoir :

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} > 0 \Rightarrow e^{2x} > 1 \Rightarrow x > 0$$

On a donc :

$$h(x) = \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \Rightarrow \mathcal{D}_h =]0; +\infty[= \mathbb{R}^{++}$$

Exercice A.2 : Déterminer si les fonctions suivantes sont bornées ou non sur leur ensemble de définition (qu'il faut déterminer aussi !) :

$$f(x) = \frac{x - 3}{x^2 + 1} ; \quad g(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 1} ; \quad h(x) = \sin\left(\ln\left(\frac{e^{2x} + 1}{e^{3x} + 1}\right)\right) ; \quad i(x) = \ln\left(\sin\left(\frac{e^{x^2} + 1}{e^{x^2+1} + 1}\right)\right)$$

a) $f(x) = \frac{x - 3}{x^2 + 1}$

On peut déjà voir que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \neq 0$$

On en déduit donc que

$$f(x) = \frac{x - 3}{x^2 + 1} \Rightarrow \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

De plus on a :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x - 3}{x^2 + 1} = 0$$

On en déduit donc que f est bornée sur son ensemble de définition.

Remarque : Pour voir les extrema, on peut étudier la fonction.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{x-3}{x^2+1} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{x^2+1-2x(x-3)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+6x+1}{(x^2+1)^2}$$

On cherche le signe de $-x^2+6x+1$.

On cherche $\Delta = 36+4 = 40$

On a alors deux solutions à l'équation $-x^2+6x+1=0$:

$$-x^2+6x+1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6+\sqrt{40}}{2} = 3+\sqrt{10} \\ \text{ou} \\ x = 3-\sqrt{10} \end{cases}$$

On en déduit donc le signe de $f'(x)$ puis les variations de f :

De plus on a :

$$f(3-\sqrt{10}) = \frac{-\sqrt{10}}{(3-\sqrt{10})^2+1} = \frac{-\sqrt{10}}{(20-6\sqrt{10})} = \frac{-1}{2\sqrt{10}-6} = -\frac{1}{2}(\sqrt{10}+3)$$

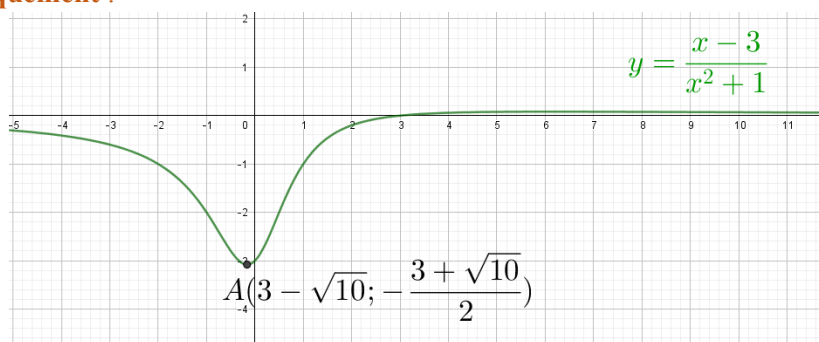
$$\text{et } f(3+\sqrt{10}) = \frac{\sqrt{10}}{(3+\sqrt{10})^2+1} = \frac{\sqrt{10}}{(20+6\sqrt{10})} = \frac{1}{2\sqrt{10}+6} = \frac{1}{2}(\sqrt{10}-3)$$

On a alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$3-\sqrt{10}$		$3+\sqrt{10}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
f	$ \begin{array}{c} \nearrow \quad \searrow \\ 0 \quad \quad \quad \frac{-3+\sqrt{10}}{2} \\ \quad \quad \quad \nearrow \quad \searrow \\ \quad \quad \quad \frac{-3+\sqrt{10}}{2} \quad \quad 0 \end{array} $				

Ainsi le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est $-\frac{1}{2}(\sqrt{10}+3)$ atteint pour $x = 3-\sqrt{10}$ et le maximum est $\frac{1}{2}(\sqrt{10}-3)$ atteint pour $x = 3+\sqrt{10}$.

On peut le voir **graphiquement** :



b) $g(x) = \frac{x-3}{x^2-1}$

On peut déjà voir que :

$$\mathcal{D}_g = \{x \in \mathbb{R}, x^2-1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$$

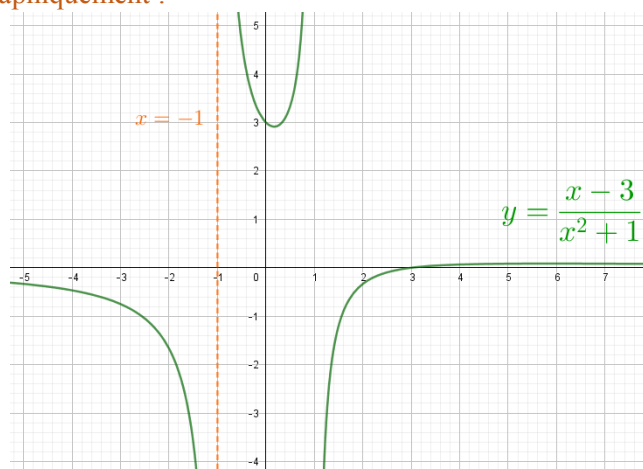
De plus on a :

$$\begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} (x-3) = -4 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} (x^2-1) = 0^- \end{cases} \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{x-3}{x^2-1} = +\infty \Rightarrow g \text{ n'est pas majorée}$$

De même on a :

$$\begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} (x - 3) = -4 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} (x^2 - 1) = 0^+ \end{cases} \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{x - 3}{x^2 - 1} = -\infty \Rightarrow g \text{ n'est pas minorée}$$

Remarque : On peut le voir graphiquement :



On a une **asymptote verticale** d'équation $x = -1$. (On a de même une équation verticale d'équation $x = 1$)

c) $h(x) = \sin\left(\ln\left(\frac{e^{2x} + 1}{e^{3x} + 1}\right)\right)$

On a déjà que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{e^{2x} + 1}{e^{3x} + 1} > 0$$

Ainsi $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$. De plus on sait que :

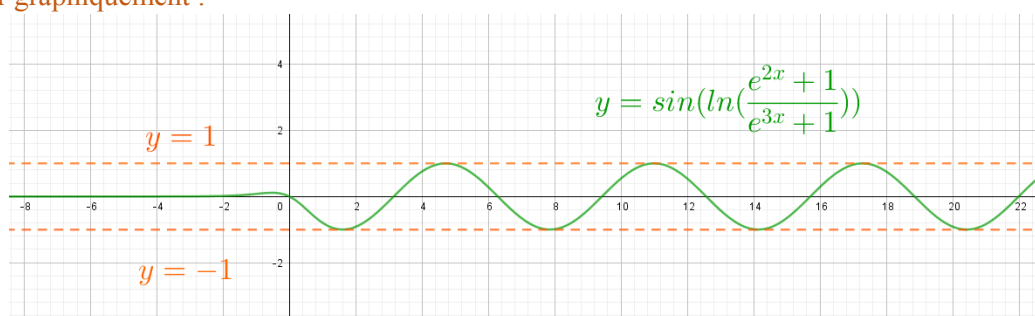
$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) \in [-1; 1]$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) \in [-1; 1]$$

Donc h est bornée sur $\mathbb{R}$.

On peut le voir graphiquement :



d) $i(x) = \ln\left(\sin\left(\frac{e^{x^2} + 1}{e^{x^2+1} + 1}\right)\right)$

On peut voir que :

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{R}, x^2 < x^2 + 1 \\ \Rightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, e^{x^2} + 1 < e^{x^2+1} + 1 \text{ car } x \mapsto e^x \text{ est croissante sur } \mathbb{R} \\ \Rightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, \frac{e^{x^2} + 1}{e^{x^2+1} + 1} \in]0; 1[\end{aligned}$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin\left(\frac{e^{x^2} + 1}{e^{x^2+1} + 1}\right) \in \left]0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right[$$

On en déduit donc que :

$$\mathcal{D}_i = \mathbb{R}$$

Il reste à voir si i est bornée. Pour cela on va étudier

$$f: x \mapsto \frac{e^{x^2} + 1}{e^{x^2+1} + 1}$$

f est paire, on peut donc étudier f sur $[0; +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) &= \frac{2xe^{x^2}(e^{x^2+1} + 1) - 2xe^{x^2+1}(e^{x^2} + 1)}{(e^{x^2+1} + 1)^2} \\ &= \frac{2xe^{x^2}(1 - e)}{(e^{x^2+1} + 1)^2} \\ &< 0 \end{aligned}$$

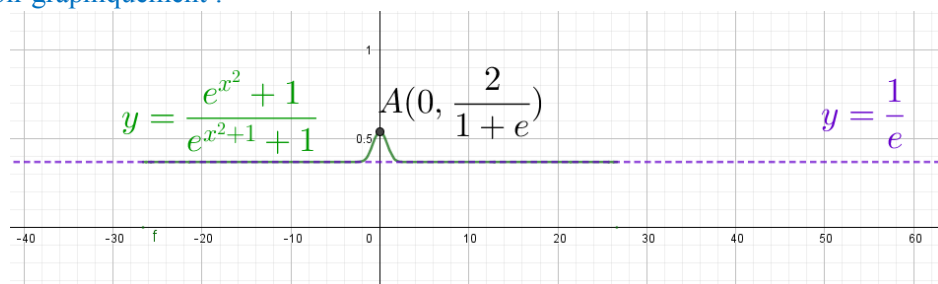
On en déduit donc que f est décroissante sur $[0; +\infty[$. De plus on a :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2} + 1}{e^{x^2+1} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^{-x^2}}{e + e^{-x^2}} = \frac{1}{e} \\ f(0) = \frac{2}{1 + e} \end{cases}$$

On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$\frac{1}{e}$	$\frac{2}{1+e}$	$\frac{1}{e}$

On peut aussi le voir graphiquement :



On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 < \frac{1}{e} \leq \frac{e^{x^2} + 1}{e^{x^2+1} + 1} \leq \frac{2}{1 + e} < \frac{\pi}{2}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin\left(\frac{1}{e}\right) \leq \sin\left(\frac{e^{x^2} + 1}{e^{x^2+1} + 1}\right) \leq \sin\left(\frac{2}{1 + e}\right) \text{ car sin est croissante sur } \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

On a donc au final :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ln\left(\sin\left(\frac{1}{e}\right)\right) \leq \ln\left(\sin\left(\frac{e^{x^2} + 1}{e^{x^2+1} + 1}\right)\right) \leq \ln\left(\sin\left(\frac{2}{1 + e}\right)\right)$$

Donc i est bornée sur $\mathbb{R}$.

Remarque : Le maximum de i , $\ln\left(\sin\left(\frac{2}{1+e}\right)\right)$ est atteint pour $x = 0$. Par contre i n'a pas de minimum car son plus grand minorant, $\ln\left(\sin\left(\frac{1}{e}\right)\right)$, n'est pas atteint. On parle alors de borne inférieure et non de minimum !

Partie B : Symétrie

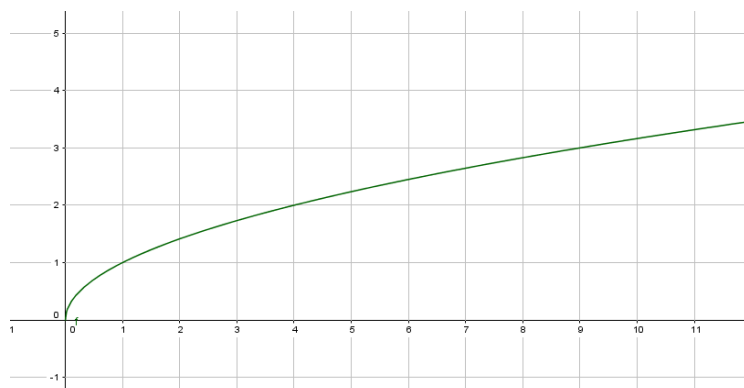
Exercice B.1 : On a tracé ci-dessous le graphe de la fonction :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$$

A l'aide de ce graphe tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes :

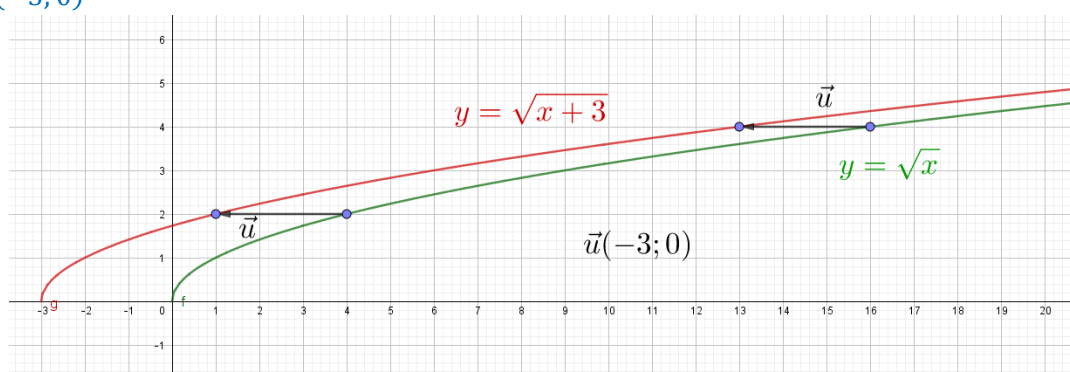
On a représenté sa courbe sur la figure ci-contre.

- $f_1: x \mapsto \sqrt{x+3}$
- $f_2: x \mapsto \sqrt{x} + 3$
- $f_3: x \mapsto \sqrt{4x}$
- $f_4: x \mapsto 4\sqrt{x}$
- $f_5: x \mapsto \sqrt{x-4} + 2$



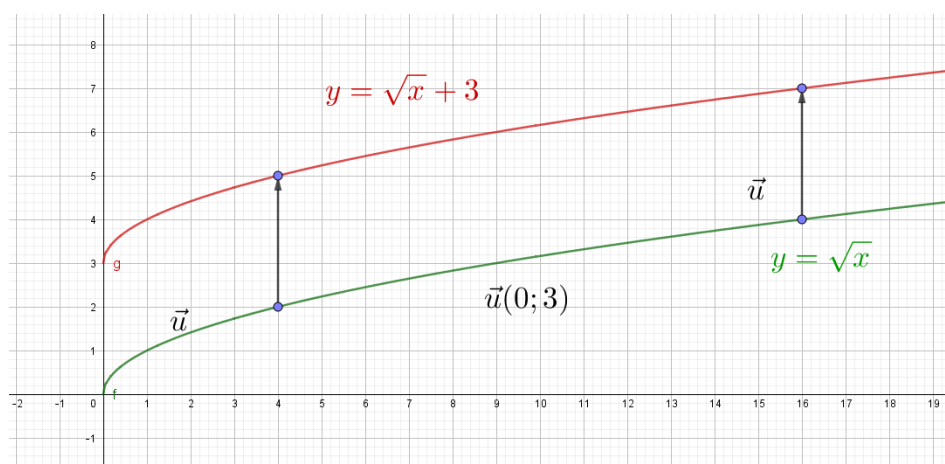
a) $f_1: x \mapsto \sqrt{x+3}$

La courbe représentative de $f_1: x \mapsto \sqrt{x+3}$ s'obtient à partir de la courbe de $f: x \mapsto \sqrt{x}$ en effectuant une translation de vecteur $\vec{u}(-3; 0)$



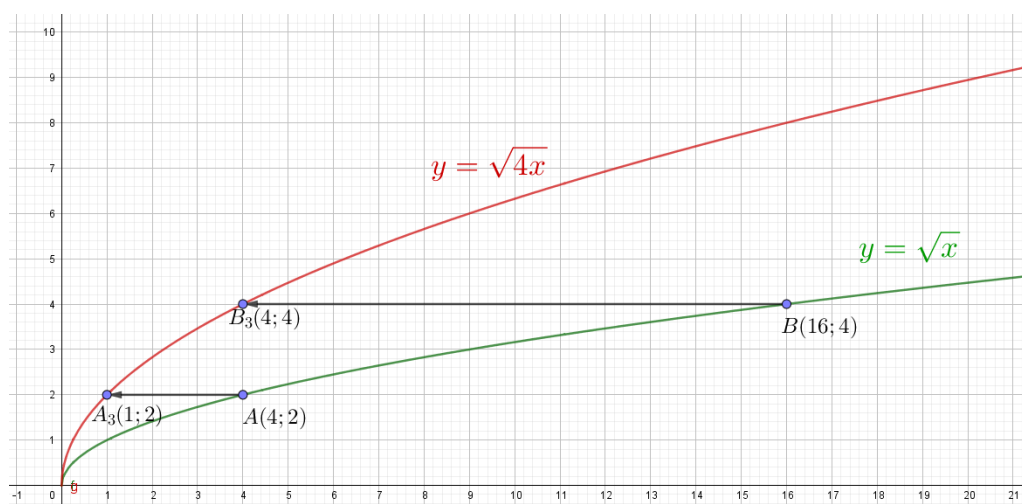
b) $f_2: x \mapsto \sqrt{x} + 3$

La courbe représentative de $f_2: x \mapsto \sqrt{x} + 3$ s'obtient à partir de la courbe de $f: x \mapsto \sqrt{x}$ en effectuant une translation de vecteur $\vec{u}(0; 3)$



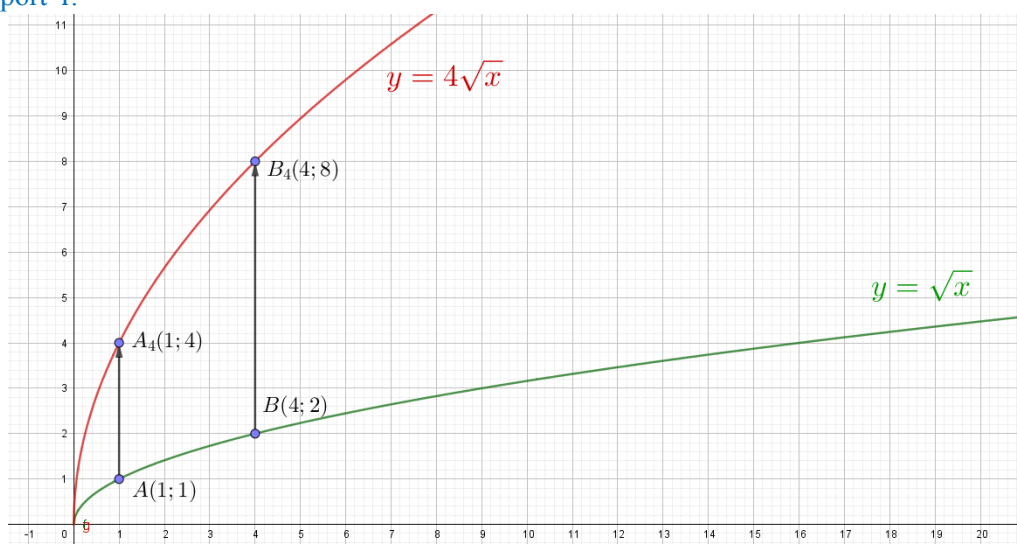
c) $f_3: x \mapsto \sqrt{4x}$

La courbe représentative de $f_3: x \mapsto \sqrt{4x}$ s'obtient à partir de la courbe de $f: x \mapsto \sqrt{x}$ en effectuant une dilatation horizontale de rapport $\frac{1}{4}$.



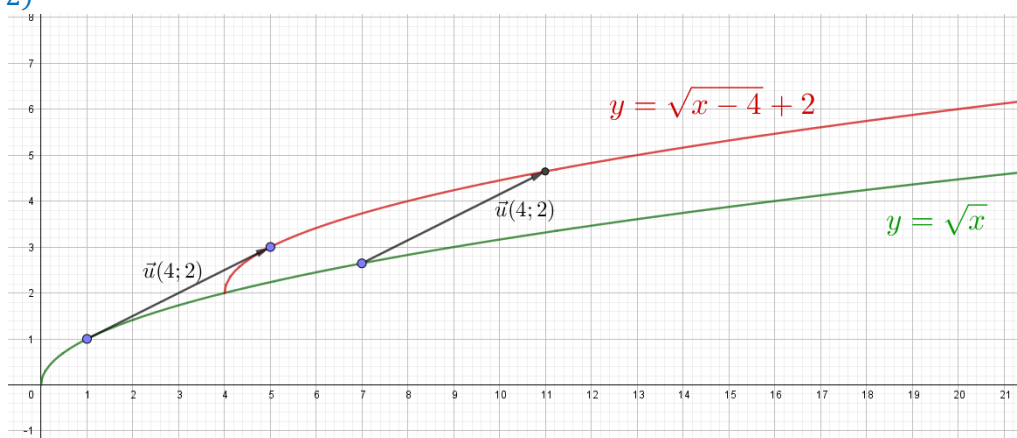
d) $f_3: x \mapsto 4\sqrt{x}$

La courbe représentative de $f_4: x \mapsto 4\sqrt{x}$ s'obtient à partir de la courbe de $f: x \mapsto \sqrt{x}$ en effectuant une dilatation verticale de rapport 4.



e) $f_5: x \mapsto \sqrt{x-4} + 2$

La courbe représentative de $f_1: x \mapsto \sqrt{x+3}$ s'obtient à partir de la courbe de $f: x \mapsto \sqrt{x}$ en effectuant une translation de vecteur $\vec{u}(4; 2)$



Exercice B.2 : Etudier la parité, la périodicité des fonctions suivantes afin de réduire le domaine d'étude à son minimum.

$$f(x) = \sqrt{1+x^2}$$

$$g(x) = \frac{\cos(x)}{\sin^2(2x) + 1}$$

$$h(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} + x)$$

a) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

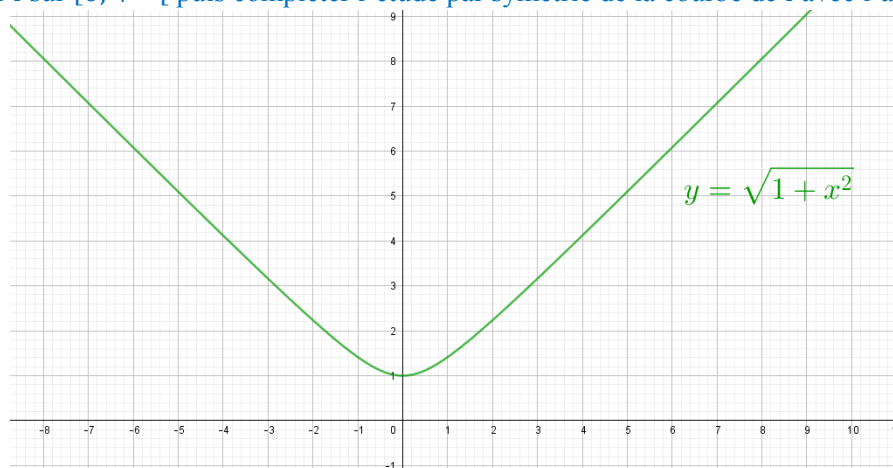
$$\forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 > 0 \Rightarrow \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

De plus on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \sqrt{1+(-x)^2} = \sqrt{1+x^2}$$

Donc f est paire.

On peut donc étudier f sur $[0; +\infty[$ puis compléter l'étude par symétrie de la courbe de f avec l'axe des ordonnées.



b) $g(x) = \frac{\cos(x)}{\sin^2(2x) + 1}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2(2x) + 1 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{D}_g = \mathbb{R}$$

De plus on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x+2\pi) = \frac{\cos(x+2\pi)}{\sin^2(2(x+2\pi)) + 1} = \frac{\cos(x)}{\sin^2(2x+4\pi) + 1} = \frac{\cos(x)}{\sin^2(2x) + 1} = g(x)$$

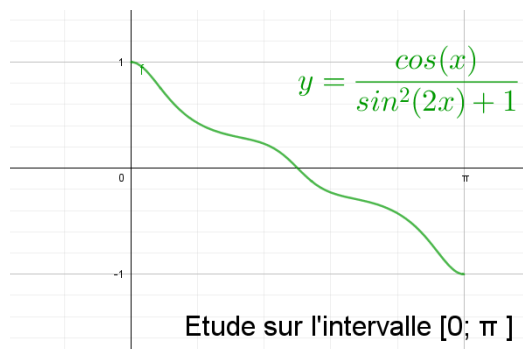
Comme g est 2π -périodique, on peut réduire le domaine d'étude à un intervalle de longueur 2π , par exemple $[-\pi; \pi]$ puis on prolonge par périodicité.

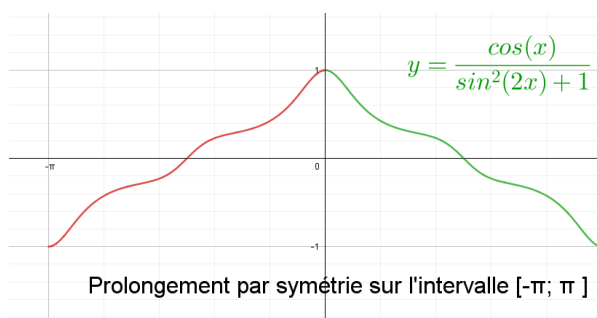
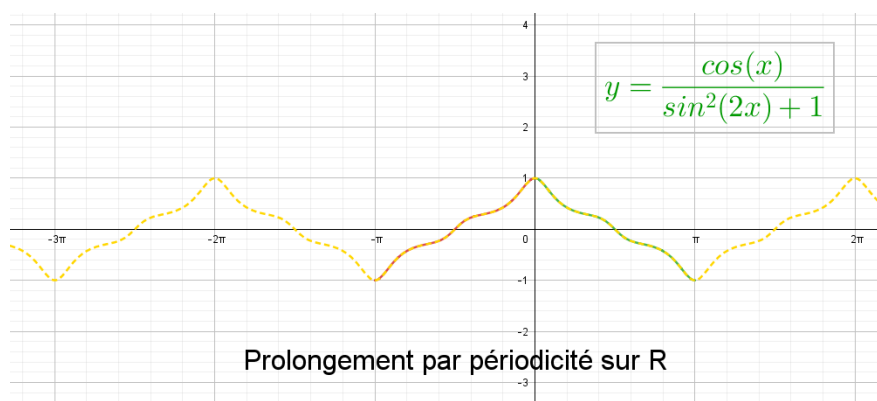
De plus on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin^2(-2x) + 1} = \frac{\cos(x)}{\sin^2(2x) + 1} = g(x)$$

Comme g est paire, on peut réduire le domaine d'étude à l'intervalle $[0; \pi]$ puis prolonger la courbe sur $[-\pi; \pi]$ par symétrie avec l'axe des ordonnées.

1) $[0; \pi]$

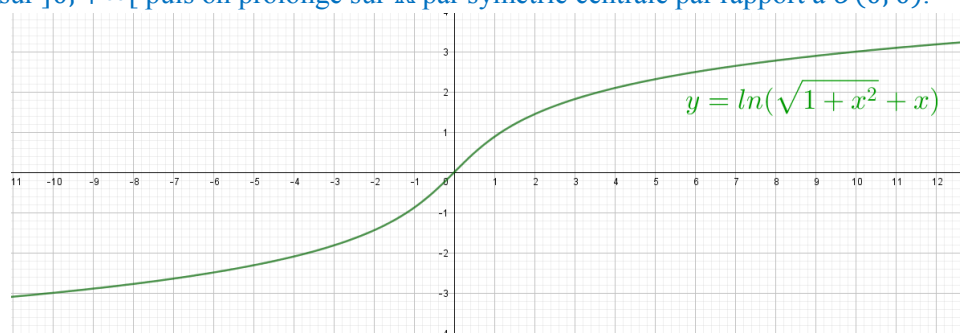


2) $[-\pi; \pi]$ 3) $\mathbb{R}$ c) $h(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} + x)$

$$\begin{aligned}
 &\forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 > x^2 \\
 \Rightarrow &\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} \text{ car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+ \\
 \Rightarrow &\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{1+x^2} > |x| \geq -x \\
 \Rightarrow &\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{1+x^2} + x > 0 \\
 \Rightarrow &\mathcal{D}_h = \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

De plus on a :

$$\begin{aligned}
 \forall x \in \mathbb{R}, h(-x) &= \ln(\sqrt{1+(-x)^2} + (-x)) \\
 &= \ln(\sqrt{1+x^2} - x) \\
 &= \ln\left(\frac{(\sqrt{1+x^2} - x)(\sqrt{1+x^2} + x)}{\sqrt{1+x^2} + x}\right) \\
 &= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x}\right) \\
 &= -\ln(\sqrt{1+x^2} + x) \\
 &= -h(x)
 \end{aligned}$$

On en déduit donc que h est impaire.On l'étudie donc sur $]0; +\infty[$ puis on prolonge sur $\mathbb{R}$ par symétrie centrale par rapport à $O(0; 0)$.

Remarque : Ici on peut voir plusieurs choses :

- $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$
- $\forall a > 0, \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- Si f est impaire alors $f(0) = 0$ (Démo : $f(-0) = -f(0) = f(0) \Rightarrow f(0) = 0$)

Partie C : Limite d'une fonction

Exercice C.1 : Determiner les limites suivantes (en déduire alors une éventuelle asymptote pour la courbe représentative) :

$$f_1: x \mapsto \frac{1-5x}{5+x} \text{ en } -5, \pm\infty ; f_2: x \mapsto \frac{3x^2-x-2}{x^4-1} \text{ en } 1, \pm\infty ; f_3: x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{1+x}} \text{ en } \pm\infty$$

$$f_4: x \mapsto \sqrt{x^2-4x+1} - x + 2 \text{ en } +\infty ; f_5: x \mapsto \sqrt{x^2-4x+1} + x - 3 \text{ en } -\infty$$

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-5; 0\}, \frac{1-5x}{5+x} = \frac{\frac{1}{x} - 5}{\frac{5}{x} + 1}$$

De plus on a :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x} - 5\right) = -5 \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{5}{x} + 1\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-5x}{5+x} = -5$$

On a donc une asymptote horizontale d'équation $y = -5$ en $+\infty$ et $-\infty$.

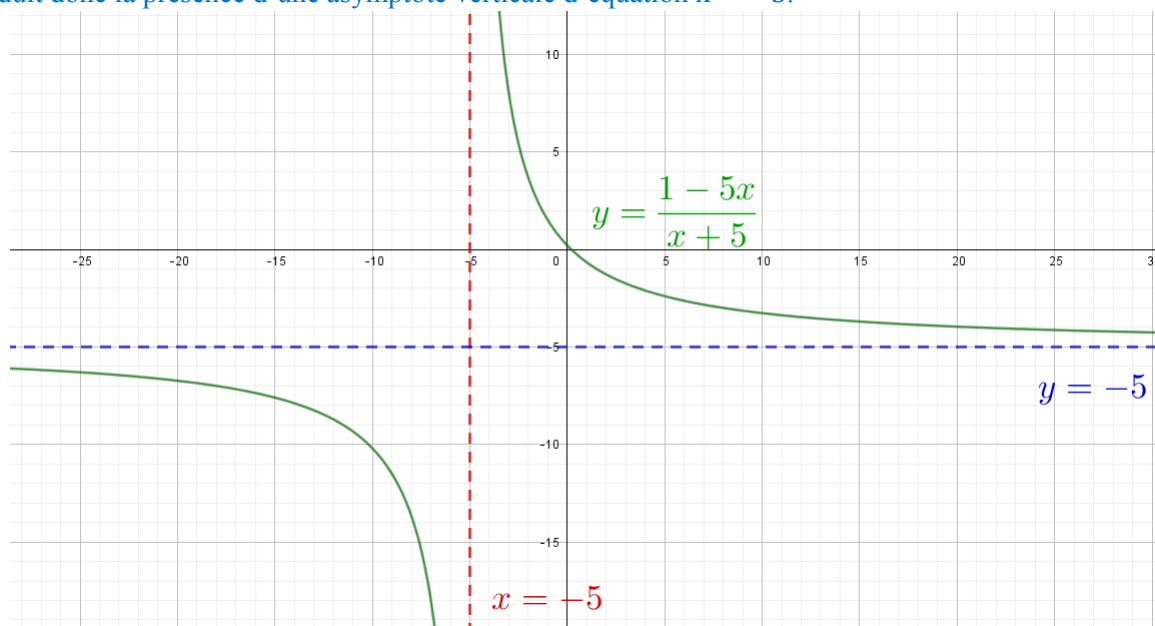
De plus on a :

$$\begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow -5 \\ x < -5}} (1-5x) = 26 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow -5 \\ x < -5}} (5+x) = 0^- \end{cases} \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow -5 \\ x < -5}} \frac{1-5x}{5+x} = -\infty$$

De même on a :

$$\begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow -5 \\ x > -5}} (1-5x) = 26 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow -5 \\ x > -5}} (5+x) = 0^+ \end{cases} \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow -5 \\ x > -5}} \frac{1-5x}{5+x} = +\infty$$

On en déduit donc la présence d'une asymptote verticale d'équation $x = -5$.



On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}, \frac{3x^2 - x - 2}{x^4 - 1} = \frac{3 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{x^2 - \frac{1}{x^2}}$$

Or on a :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(3 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{x^4 - 1} = 0$$

On a donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

De plus on a :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - x - 2) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1} (x^4 - 1) = 0 \end{cases}$$

On tombe donc sur une forme indéterminée. Il faut factoriser le numérateur et le dénominateur par $x - 1$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, 3x^2 - x - 2 &= 3(x - 1) \left(x + \frac{2}{3}\right) \\ \forall x \in \mathbb{R}, x^4 - 1 &= (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}, \frac{3x^2 - x - 2}{x^4 - 1} = \frac{3x + 2}{(x + 1)(x^2 + 1)}$$

De plus on a :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} (3x + 2) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1)(x^2 + 1) = 4 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{x^4 - 1} = \frac{5}{4}$$

Remarque : Pour un polynôme P , on peut toujours factoriser par $(x - x_0)$ où x_0 est une racine de P . On reverra et on démontrera ce théorème plus tard dans l'année.

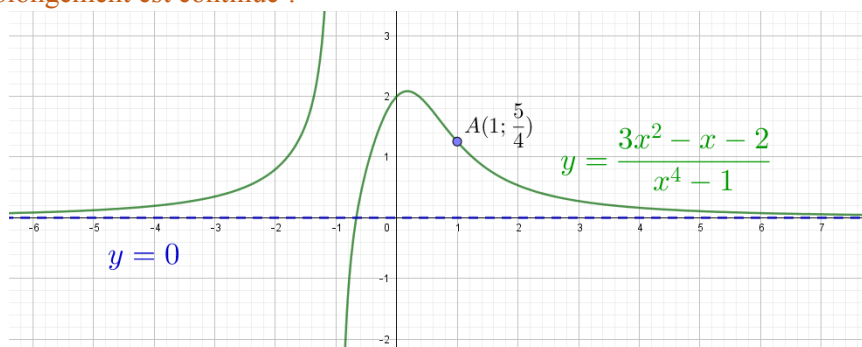
Remarque 2 : On peut alors prolonger la fonction :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{3x^2 - x - 2}{x^4 - 1} \end{cases}$$

Par la prolongée de f , noté $\tilde{f}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :

$$\tilde{f}: \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{3x^2 - x - 2}{x^4 - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ \frac{5}{4} & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

On dit alors que le prolongement est continue !



On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1; 0[, \sqrt{\frac{x^3}{1+x}} = \sqrt{\frac{x^2 \times x}{1+x}} = |x| \times \sqrt{\frac{x}{1+x}}$$

De plus on sait que :

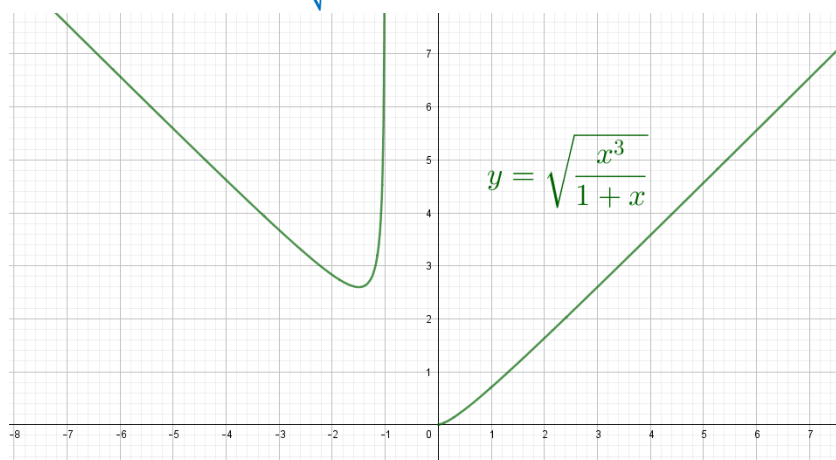
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{1+x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + 1} = 1$$

On en déduit donc par composée que :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{x}{1+x}} = \sqrt{1} = 1$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{x^3}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x| = +\infty$$



On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in]4, +\infty[, \sqrt{x^2 - 4x + 1} - x + 2 &= \sqrt{x^2 - 4x + 1} - (x - 2) \\ &= \frac{(\sqrt{x^2 - 4x + 1} - (x - 2))(\sqrt{x^2 - 4x + 1} + (x - 2))}{\sqrt{x^2 - 4x + 1} + (x - 2)} \\ &= \frac{-3}{\sqrt{x^2 - 4x + 1} + (x - 2)} \end{aligned}$$

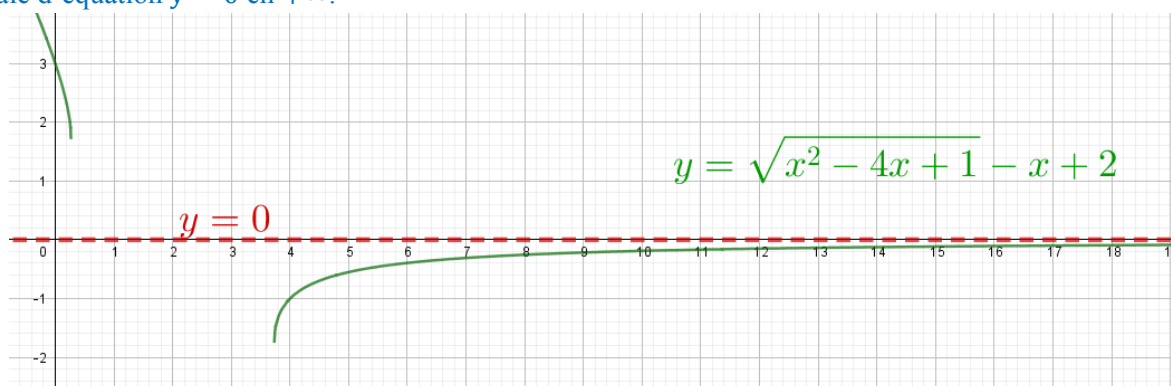
Or on sait que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 1} + (x - 2)) = +\infty$$

On en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 1} - x + 2) = 0$$

On en déduit donc que la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 1} - x + 2$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.



On a :

$$\begin{aligned}\forall x < 0, \sqrt{x^2 - 4x + 1} + x - 3 &= \sqrt{x^2 - 4x + 1} - (3 - x) \\ &= \frac{(\sqrt{x^2 - 4x + 1} - (3 - x))(\sqrt{x^2 - 4x + 1} + (3 - x))}{\sqrt{x^2 - 4x + 1} + (3 - x)} \\ &= \frac{2x - 8}{\sqrt{x^2 - 4x + 1} + (3 - x)}\end{aligned}$$

Or on sait que :

$$\begin{aligned}\forall x < 0, \sqrt{x^2 - 4x + 1} + (3 - x) &= \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} + x \left(\frac{3}{x} - 1\right) \\ &= |x| \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} + x \left(\frac{3}{x} - 1\right) \\ &= x \left(\frac{3}{x} - 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}\right)\end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall x < 0, \sqrt{x^2 - 4x + 1} + x - 3 = \frac{2 - \frac{8}{x}}{\frac{3}{x} - 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}}$$

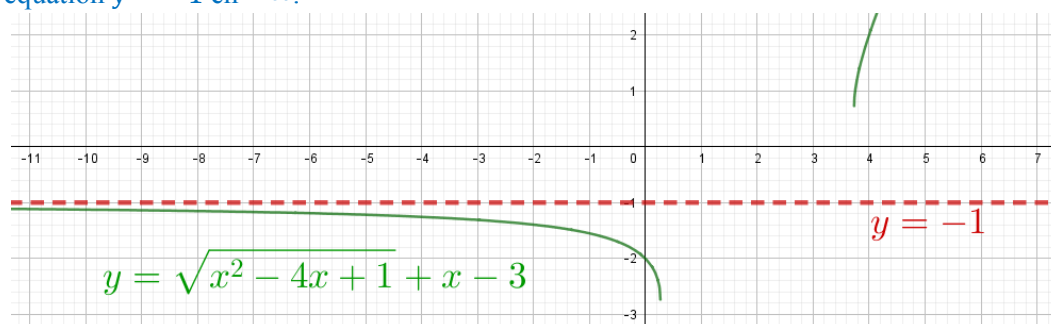
De plus on sait que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{x} - 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) = -2$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 4x + 1} + x - 3 = -1$$

On en déduit donc que la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 1} + x - 3$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ en $-\infty$.



Exercice C.2 : Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x - 2} - \sqrt{4 - x}}$$

On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in]2; 4[\setminus \{3\}, \frac{x - 3}{\sqrt{x - 2} - \sqrt{4 - x}} &= \frac{(\sqrt{x - 2} + \sqrt{4 - x})(x - 3)}{(\sqrt{x - 2} - \sqrt{4 - x})(\sqrt{x - 2} + \sqrt{4 - x})} \\ &= \frac{(\sqrt{x - 2} + \sqrt{4 - x})(x - 3)}{(x - 2) - (4 - x)} \\ &= \frac{(\sqrt{x - 2} + \sqrt{4 - x})(x - 3)}{2x - 6}\end{aligned}$$

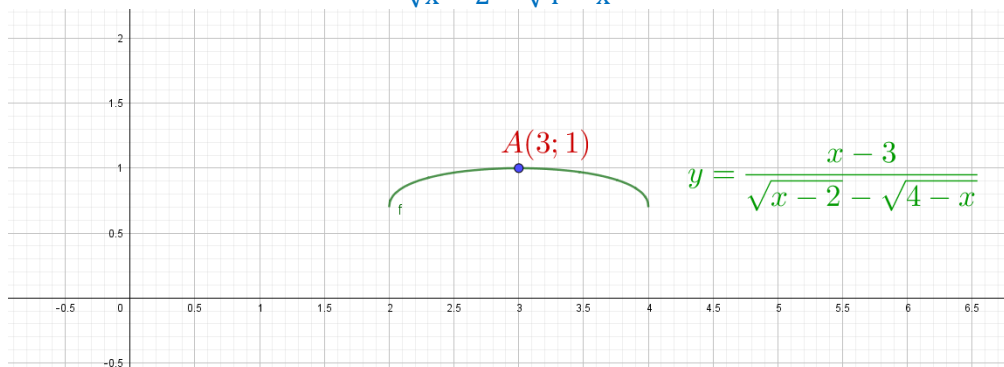
$$= \frac{\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}}{2}$$

Or on sait que :

$$\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}) = 2$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}} = 1$$



Remarque : Là aussi on peut prolonger par continuité la fonction :

$$f: \begin{cases}]2; 4[\setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x-3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}} \end{cases}$$

Sur l'intervalle $]2; 4[$ en posant :

$$\tilde{f}: \begin{cases}]2; 4[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{x-3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}} & \text{si } x \neq 3 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Exercice C.3 : Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}$$

On a :

$$\forall x > 0, \ln(1+x) = \ln\left(x\left(\frac{1}{x} + 1\right)\right) = \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

On en déduit donc que :

$$\forall x > 0, \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} = \frac{\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}$$

Or on sait que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$$

On en déduit donc par composée que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$$

De plus on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

Par quotient on en déduit donc que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} = 1$$

On en déduit donc que la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$.

