

Correction TD 3 : Dérivation

Partie A : Avec la définition

Exercice A.1 : On pose $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \forall h \neq 0, \tau_x(h) &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= 2x + h \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2x$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x}$$

Exercice A.2 : On pose $f(x) = \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$. Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

On a :

$$\forall x > 0, \forall h \in]-x, +\infty[, \tau_x(h) = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

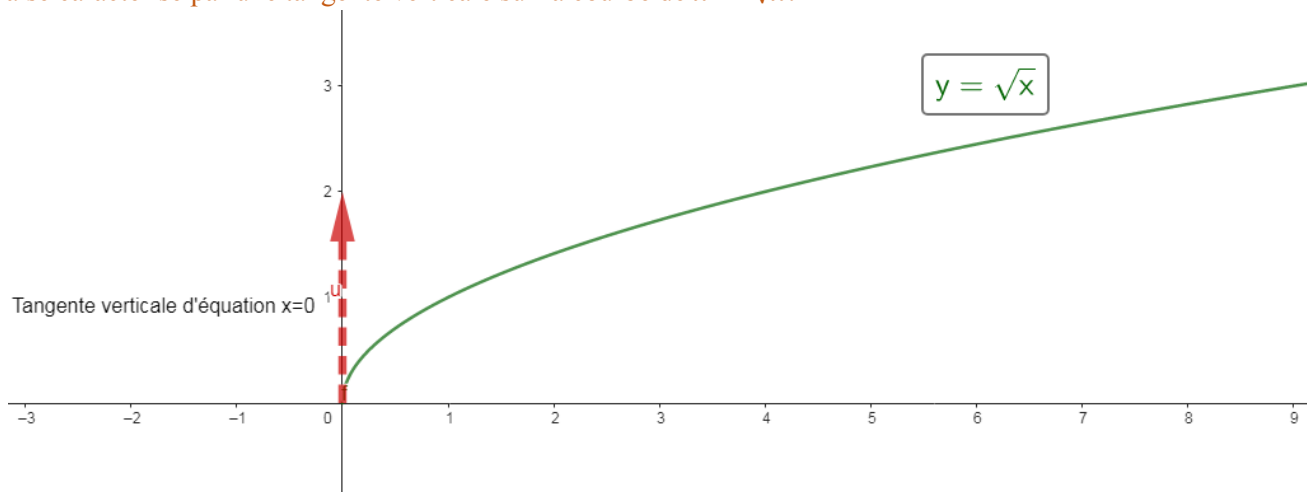
On en déduit donc que :

$$\boxed{\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Remarque : On voit ici que $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 car :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

Cela se caractérise par une tangente verticale sur la courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$.



Exercice A.3 : On pose $f(x) = \frac{1}{x}$ définie sur $]0; +\infty[$. Démontrer que :

$$\forall x > 0, f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \forall h \neq 0, \tau_x(h) &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\ &= \frac{x - (x+h)}{h(x+h)x} \\ &= -\frac{1}{x(x+h)} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\frac{1}{x^2}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\frac{1}{x^2}}$$

Partie B : Calcul de dérivée

Exercice B.1 : Etudier le domaine de définition, de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1: x \mapsto \frac{x}{x^2 - 3x + 2} \quad f_2: x \mapsto (x+2)e^x \quad f_3: x \mapsto \frac{1}{x^4 + x^2 + 5}$$

f_1 est définie si et seulement si $x^2 - 3x + 2 \neq 0$

On sait que :

$$\Delta = 9 - 8 = 1$$

On en déduit donc que :

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3-1}{2} = 1 \\ \text{ou} \\ x = \frac{3+1}{2} = 2 \end{cases}$$

On en déduit donc que $\mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$

De plus f_1 est dérivable sur $] -\infty; 1[$ ou sur $]1; 2[$ ou sur $]2; +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in] -\infty; 1[\cup]1; 2[\cup]2; +\infty[, f'_2(x) = \frac{x^2 - 3x + 2 - (2x - 3)x}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

$$\Rightarrow \forall x \in] -\infty; 1[\cup]1; 2[\cup]2; +\infty[, f'_2(x) = \frac{-x^2 + 2}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

$$f_2: x \mapsto (x+2)e^x$$

f_2 est définie sur $\mathbb{R}$ par produit de fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

De plus on dérive f_2 comme un produit de fonctions :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'_2(x) = e^x + (x+2)e^x = (x+3)e^x}$$

$$f_3: x \mapsto \frac{1}{x^4 + x^2 + 5}$$

f_3 est définie si et seulement si $x^4 + x^2 + 5 \neq 0$.

On résout :

$$x^4 + x^2 + 5 = 0$$

On pose $X = x^2$. On a alors :

$$x^4 + x^2 + 5 = 0 \Rightarrow X^2 + X + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 20 = -19 < 0$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \forall X \in \mathbb{R}, X^2 + X + 5 &\neq 0 \\ \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x^4 + x^2 + 5 &\neq 0 \\ \Rightarrow \mathcal{D}_{f_3} &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

De plus on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_3'(x) = -\frac{4x^3 + 2x}{(x^4 + x^2 + 5)^2}$$

Exercice B.2 : Etudier le domaine de définition, de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1: x \mapsto (\cos(x))^3 \quad f_2: x \mapsto \sqrt{1+x^2} \quad f_3: x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$$

Il faut ici utiliser la formule des dérivées composées.

$$f_1: x \mapsto (\cos(x))^3$$

On a :

$$f_1: x \xrightarrow{g} \cos(x) \xrightarrow{h} (\cos(x))^3 \text{ avec } h: x \mapsto x^3$$

Comme g et h sont définies sur $\mathbb{R}$, f_1 aussi.

De plus on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1'(x) = -\sin(x) \times 3(\cos(x))^2 = -3 \sin(x) \cos^2(x)$$

$$f_2: x \mapsto \sqrt{1+x^2}$$

On a :

$$f_2: x \xrightarrow{g} 1+x^2 \xrightarrow{h} \sqrt{1+x^2} \text{ avec } h: x \mapsto \sqrt{x}$$

On sait que g est définie sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $[1; +\infty[$, et comme h est définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $]0; +\infty[$, on en déduit que f_2 est définie sur $\mathbb{R}$.

De plus on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_2'(x) = 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f_3: x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$$

On a :

$$f_3: x \xrightarrow{g} x + \sqrt{1+x^2} \xrightarrow{h} \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}} \text{ avec } h: x \mapsto \sqrt{x}$$

On a déjà vu dans l'exercice A.1 du TD 2 que f_3 était définie sur $\mathbb{R}$. De plus comme $x \mapsto x + \sqrt{1+x^2}$ est à valeur dans $]0; +\infty[$, on en déduit que f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f_3'(x) &= \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \times \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}} = \left(\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \times \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}} \\ &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f_3'(x) = \frac{\sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

Remarque : On a :

$$\forall a > 0, \frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$$

Exercice B3 : On pose la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x \sin(x)$$

1) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

2) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(x + n \frac{\pi}{4}\right)$$

1) On sait que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{2} \left[\sin(x) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos(x) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] \\ &= \sqrt{2} \left[\sin(x) \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos(x) \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \\ &= \sin(x) + \cos(x) \end{aligned}$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin(x) + \cos(x)$$

2) On raisonne par récurrence. Pour tout entier naturel n on pose la proposition $P(n)$ suivante :

$$P(n): "\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(x + n \frac{\pi}{4}\right) "$$

Initialisation : Pour $n=0$:

$$2^{\frac{0}{2}} e^x \sin\left(x + 0 \times \frac{\pi}{4}\right) = e^x \sin(x) = f(x)$$

Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel fixé. On suppose vraie $P(n)$. On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) &= 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(x + n \frac{\pi}{4}\right) \\ \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n+1)}(x) &= 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(x + n \frac{\pi}{4}\right) + 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos\left(x + n \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2^{\frac{n}{2}} e^x \left(\frac{\sin\left(x + n \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + n \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2} \sin\left(x + n \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)} \right) \\ &= 2^{\frac{n+1}{2}} e^x \sin\left(x + (n+1) \times \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire donc d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est toujours vraie.

Partie C : Application à la tangente

Exercice C.1 : On pose :

$$\forall m \in \mathbb{R}, f_m: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x+m}{x^2+1} \end{cases}$$

On note C_m sa courbe représentative.

1) Montrer que les tangentes aux courbes C_m au point d'abscisse 0 sont parallèles.

2) Montrer que les tangentes aux courbes C_m au point d'abscisse 1 sont concourantes.

1) On a :

$$\forall (m, x) \in \mathbb{R}^2, f'_m(x) = \frac{(x^2+1) - 2x(x+m)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2 - 2xm + 1}{(x^2+1)^2}$$

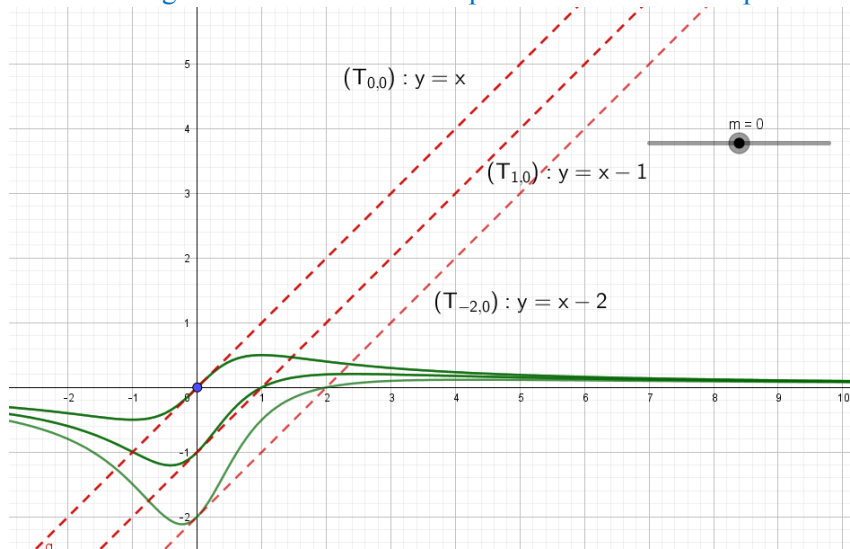
On a donc :

$$\forall m \in \mathbb{R}, f'_m(0) = 1$$

On en déduit donc que si $(T_{m,0})$ représente la tangente en 0 à la courbe de f_m on a alors :

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, (T_{m,0}): y = x + b$$

On en déduit donc que toutes les tangentes aux courbes C_m au point d'abscisse 0 sont parallèles.



2) On sait d'après la question 1 que :

$$\forall (m, x) \in \mathbb{R}^2, f'_m(x) = \frac{-x^2 - 2xm + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

On en déduit donc que :

$$\forall m \in \mathbb{R}, f'_m(1) = \frac{-2m}{4} = -\frac{m}{2}$$

De plus on sait que :

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{R}, (T_{m,1}): y &= f'_m(1)(x-1) + f_m(1) \\ &= -\frac{m}{2}(x-1) + \frac{m+1}{2} \end{aligned}$$

On doit alors trouver un point A qui appartient à toutes les droites d'équation :

$$(T_{m,1}): y = -\frac{m}{2}(x-1) + \frac{m+1}{2}$$

On a pour se faire plusieurs méthodes. Je vais ici présenter la plus « simple », disons la plus intuitive.

On prend deux valeurs distinctes pour m :

$$(T_{0,1}): y = \frac{1}{2} \text{ et } (T_{1,1}): y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

On regarde ensuite l'intersection entre $(T_{0,1})$ et $(T_{1,1})$:

$$A(x_A; y_A) \in (T_{0,1}) \cap (T_{1,1}) \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x_A + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_A = 2$$

On en déduit donc que $A\left(2; \frac{1}{2}\right) \in (T_{0,1}) \cap (T_{1,1})$. Vérifions que $\forall m \in \mathbb{R}, A\left(2; \frac{1}{2}\right) \in (T_{m,1})$.

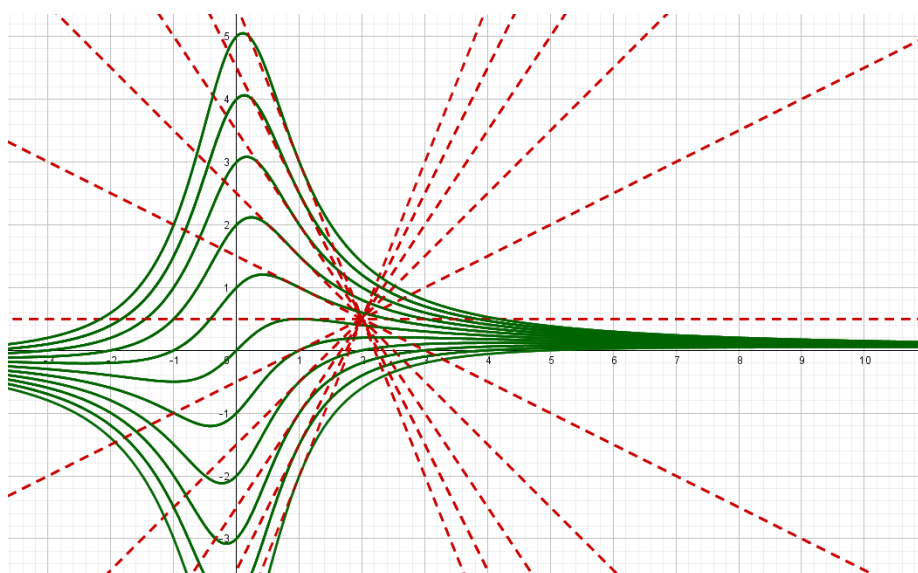
On a :

$$\forall m \in \mathbb{R}, -\frac{m}{2}(2-1) + \frac{m+1}{2} = \frac{1}{2}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{R}, A\left(2; \frac{1}{2}\right) \in (T_{m,1})}$$

Donc les tangentes sont toutes concourantes en un même point !



Exercice C.2 : On pose :

$$f: \begin{cases}]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2} \end{cases}$$

Montrer que (1 ; 0) est l'unique point de la courbe tel que la tangente en ce point soit parallèle à la droite d'équation $y = x$.

On sait que deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont même coefficient directeur.

Il suffit donc de voir pour quelles valeurs de x on a $f'(x) = 1$.

On sait que :

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{x - 2x \ln(x)}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln(x)}{x^3}$$

On a donc :

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1 - 2 \ln(x)}{x^3} = 1 \Leftrightarrow x^3 + 2 \ln(x) - 1 = 0$$

On pose :

$$g: \begin{cases}]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 + 2 \ln(x) - 1 \end{cases}$$

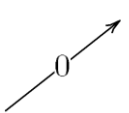
On sait que g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et :

$$\forall x > 0, g'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x} > 0$$

On en déduit donc que g est strictement croissante.

De plus on a $g(1) = 0$.

On en déduit donc d'après les variations de g car $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	+	
g			

Ainsi $A(1 ; 0)$ est l'unique point de la courbe tel que la tangente en ce point soit parallèle à la droite d'équation $y = x$.

Partie D : Etude de fonctions

Exercice D.1 : Etudier la fonction $f : x \mapsto \cos(x) - \cos^2(x)$

1) On étudie son ensemble de définition.

Ici il n'y a aucune difficulté ! $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

2) On étudie sa parité et sa périodicité

On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, f(x + 2\pi) &= \cos(x + 2\pi) - \cos^2(x + 2\pi) \\ &= \cos(x) - \cos^2(x) \\ &= f(x)\end{aligned}$$

Donc f est 2π -périodique, on peut donc l'étudier sur un intervalle de longueur 2π , comme $[-\pi; \pi]$.

De plus on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \cos(-x) - \cos^2(-x) = \cos(x) - \cos^2(x) = f(x)$$

Donc f est paire. On peut donc étudier f sur $[0; \pi]$ puis prolonger sa courbe (ou ses variations) sur $[-\pi; \pi]$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, puis par périodicité !

3) Etude des variations

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\sin(x) + 2\cos(x)\sin(x) = \sin(x)(2\cos(x) - 1)$$

On sait que :

$$\forall x \in [0; \pi], \sin(x) \geq 0$$

On en déduit donc que le signe de $f'(x)$ sur $[0; \pi]$ est le même que celui de $2\cos(x) - 1$.

On a :

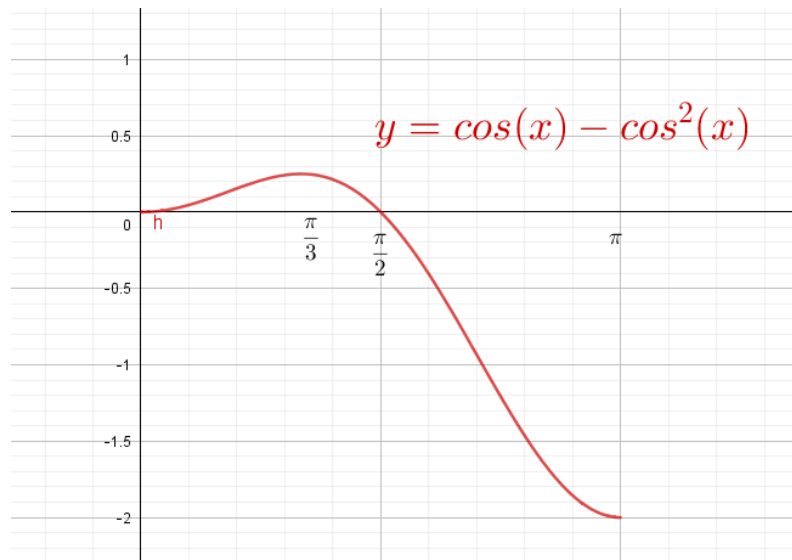
$$\begin{cases} 2\cos(x) - 1 > 0 \\ x \in [0; \pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x) > \frac{1}{2} \\ x \in [0; \pi] \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$$

On a alors le tableau de variations suivant :

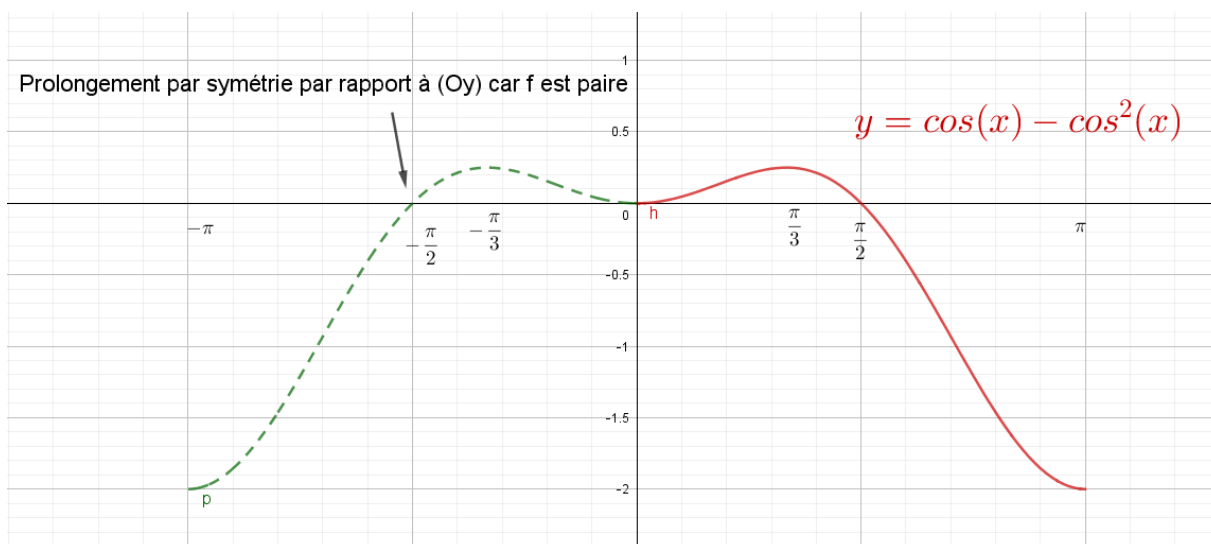
x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$	+	0	-
f	0	$\frac{1}{4}$	-2

On peut alors tracer la courbe de f en trois étapes :

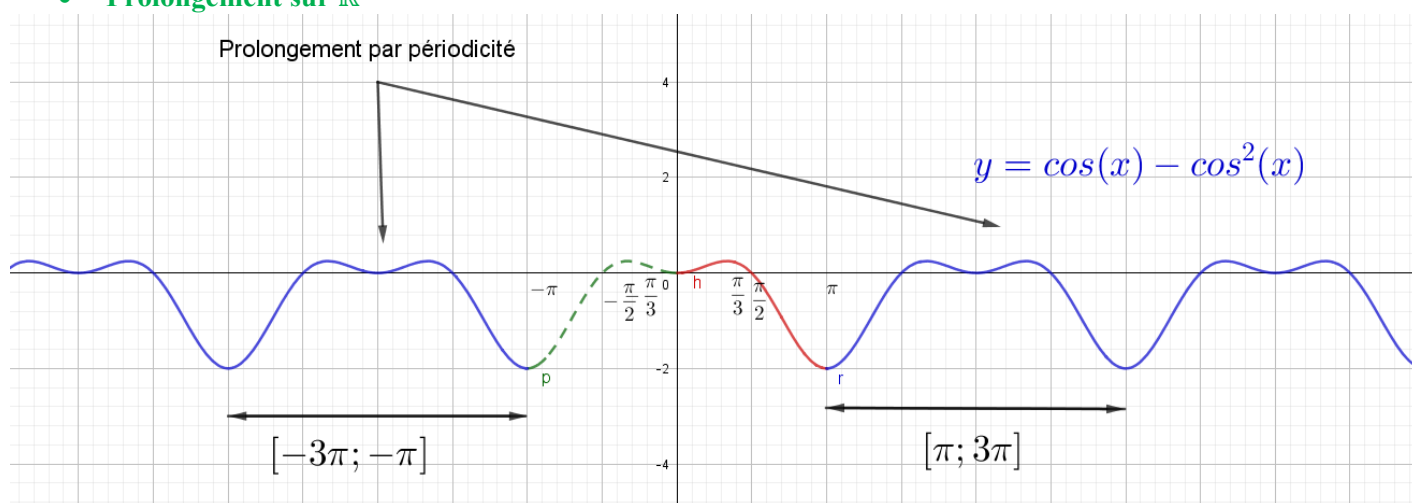
- **Sur $[0; \pi]$:**



- **Sur $[-\pi; \pi]$**



• **Prolongement sur $\mathbb{R}$**



Exercice D.2 : 1) Etudier la fonction :

$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{2-2x}{3+x^2}}$$

2) Est-elle bornée ? Admet-elle des extrema locaux ou globaux sur son ensemble de définition ?

1) On étudie son ensemble de définition.

Ici il faut faire attention.

$$\mathcal{D}_f = \left\{ x \in \mathbb{R}; \frac{2-2x}{3+x^2} \geq 0 \right\} =]-\infty; 1]$$

2) On étudie sa parité et sa périodicité

Ici f n'est pas périodique et ne peut être ni paire ni impaire car son ensemble de définition n'est pas centré en 0 !

3) Etude des variations

On sait que si u est dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs positives, alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur $I \cap \{x \in I; u(x) \neq 0\} = I \setminus \{x \in I; u(x) = 0\}$ et :

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

On pose ici $u : x \mapsto \frac{2-2x}{3+x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = \frac{-2(3+x^2) - 2x(2-2x)}{(3+x^2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 6}{(3+x^2)^2}$$

On en déduit donc que f est dérivable sur $] -\infty; 1[$ et :

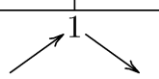
$$\forall x < 1, f'(x) = \frac{\frac{2x^2 - 4x - 6}{(3 + x^2)^2}}{2\sqrt{\frac{2-2x}{3+x^2}}} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(3 + x^2)^{1.5}\sqrt{2-2x}}$$

On en déduit alors que $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 2x - 3$.

Pour déterminer le signe de $P(x) = x^2 - 2x - 3$, on peut chercher les racines de P :

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \text{ou} \\ x = 3 \end{cases}$$

On a alors le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-1	1
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f			

On peut à présent chercher les limites de f . On a :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-2x}{3+x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x} - 2}{\frac{3}{x} + x} = 0^+ \text{ Par composé} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{2-2x}{3+x^2}} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{X} = 0 \end{cases}$$

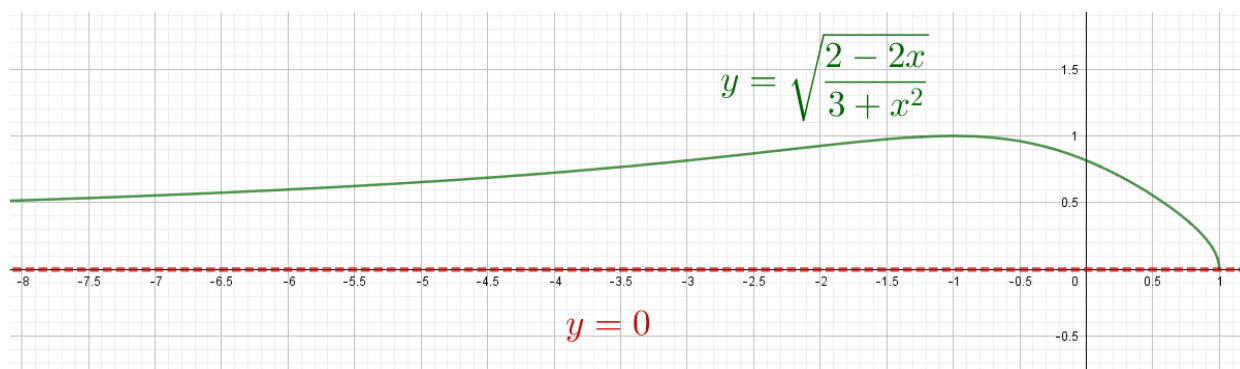
De même on a :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\frac{2-2x}{3+x^2}} = 0 = f(1)$$

On peut compléter les variations :

x	$-\infty$	-1	1
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	0	1	0

On en déduit notamment que C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$!



2) D'après l'étude de f , on peut dire que f admet un maximum global qui est 1, atteint pour $x = -1$.

De même elle admet un minimum global qui est 0 atteint pour $x = 1$. On peut donc en déduire que f est bornée et atteint ses bornes !

Exercice D.3 : On pose :

$$f : x \mapsto \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f

- 2) Montrer que f est impaire.
 3) Etudier les variations de f et les limites aux bornes de son ensemble de définition.

1) On a :

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > x^2 \\ \Rightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} \text{ car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+ \\ \Rightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + 1} > |x| \geq x \\ \Rightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + 1} - x > 0 \end{aligned}$$

On en déduit donc que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

2) On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) &= \ln\left(\sqrt{1 + (-x)^2} - (-x)\right) \\ &= \ln\left(\sqrt{1 + x^2} + x\right) \\ &= \ln\left(\frac{(\sqrt{1 + x^2} - x)(\sqrt{1 + x^2} + x)}{\sqrt{1 + x^2} - x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2} - x}\right) \\ &= -\ln\left(\sqrt{1 + x^2} - x\right) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

On en déduit donc que f est impaire.

Remarque : On a utilisé ici :

$$\begin{aligned} \forall a > 0, \ln\left(\frac{1}{a}\right) &= -\ln(a) \\ \forall (a, b) \in (\mathbb{R}^{++})^2, \sqrt{a} - \sqrt{b} &= \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \end{aligned}$$

3) On étudie f sur $[0; +\infty[$:

$$\forall x \geq 0, f(x) = \ln(u(x)) \text{ avec } u: x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} - x$$

On sait que u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \geq 0, u'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \geq 0, f'(x) = \frac{\frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} < 0$$

On en déduit donc que f est décroissante sur $[0; +\infty[$.

On cherche à présent la limite de f en $+\infty$. On a :

$$\forall x > 0, \sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

Or on sait que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0^+$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = 0^+$$

On a alors :

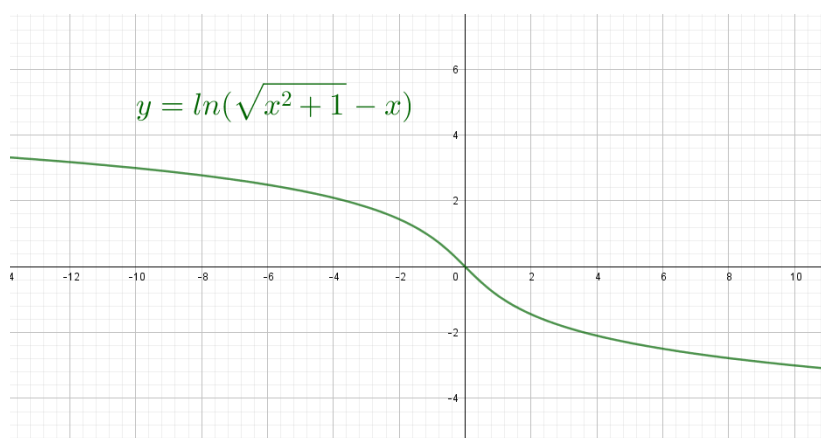
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = 0^+ \text{ par composé} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(X) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) = -\infty$$

On a alors le tableau de variation suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	—	
f	0	$-\infty$

Par imparité on en déduit que :

x	0	$+\infty$
f	$+\infty$	$-\infty$



Exercice D.4 : Faire une étude complète (allure de la courbe aussi) de la fonction :

$$f : x \mapsto \sqrt{|x^2 - 1|}$$

Ici il faut faire attention à l'ensemble de dérivabilité. On peut voir que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x^2 - 1| \geq 0$$

Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Ici il n'y a pas de problème avec l'ensemble de définition.

Cependant on sait que $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est dérivable que sur $]0; +\infty[$.

Or on sait que :

$$|x^2 - 1| = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

De plus on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \sqrt{|(-x)^2 - 1|} = \sqrt{|x^2 - 1|} = f(x)$$

On en déduit que f est dérivable sur chaque intervalle suivant : $]-\infty; -1[$, $]-1; 1[$ et $]1; +\infty[$.

On en déduit que f est paire et il suffit d'étudier f sur $[0; +\infty[$.

On va faire des disjonction de cas :

1^{er} cas : $x \in]1; +\infty[$

On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[, f(x) &= \sqrt{x^2 - 1} \\ \Rightarrow \forall x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[, f'(x) &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned}$$

2^{ème} cas : $x \in [0; 1[$

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1; 1[, f(x) &= \sqrt{1 - x^2} \\ \Rightarrow \forall x \in]-1; 1[, f'(x) &= \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

De plus on a :

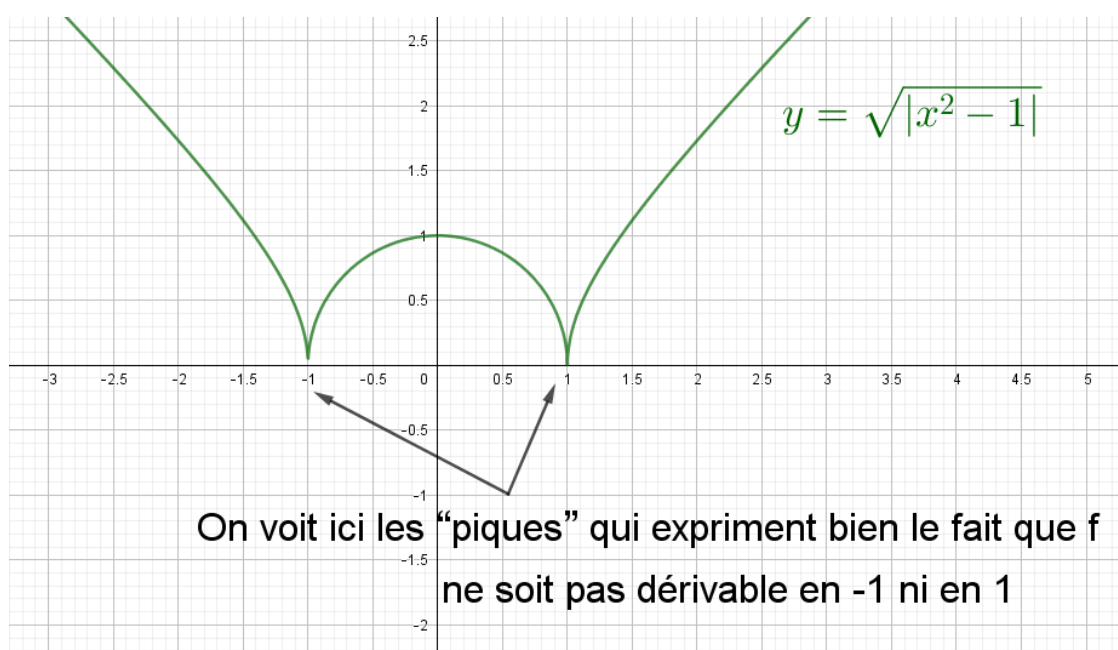
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} |x^2 - 1| = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \end{cases} \text{ par composé } \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

On a alors le tableau de variations suivant :

x	0	1	$+\infty$
$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$			+
$\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$	-		
f	1	0	$+\infty$

Par parité on en déduit que :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	-				+
$\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$		+	0	-	
f	$+\infty$	0	1	0	$+\infty$



On voit ici les “piques” qui expriment bien le fait que f ne soit pas dérivable en -1 ni en 1

Exercice D.5 : On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0; +\infty[\setminus\{1\}]$ par :

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f relativement à un repère orthonormal.

- Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, puis lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures et inférieures. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_f$?
- Montrer que f est croissante sur chacun des intervalles $[0; 1[$, $]1; +\infty[$.
- Préciser l'équation cartésienne de la tangente (T_0) au point A de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 0.
- Prouver que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

a) On a :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$\mathcal{C}_f$ admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

De plus on a :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{-x} = e^{-1} = \frac{1}{e} \text{ par quotient} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (1-x) = 0^- \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

De même on a :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{-x} = e^{-1} = \frac{1}{e} \text{ par quotient} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) = 0^+ \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

On en déduit donc que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

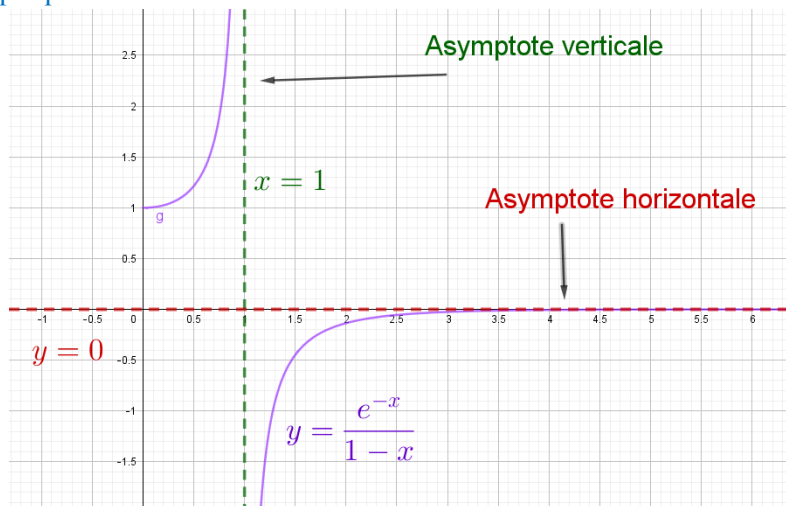
b) On sait que f est dérivable sur chacun des intervalles $[0; 1[$, $]1; +\infty[$, par quotient de fonctions dérivables. De plus on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, f'(x) = \frac{-e^{-x}(1-x) + e^{-x}}{(1-x)^2} = \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2} \geq 0$$

Donc f est croissante sur chacun des intervalles $[0; 1[$, $]1; +\infty[$

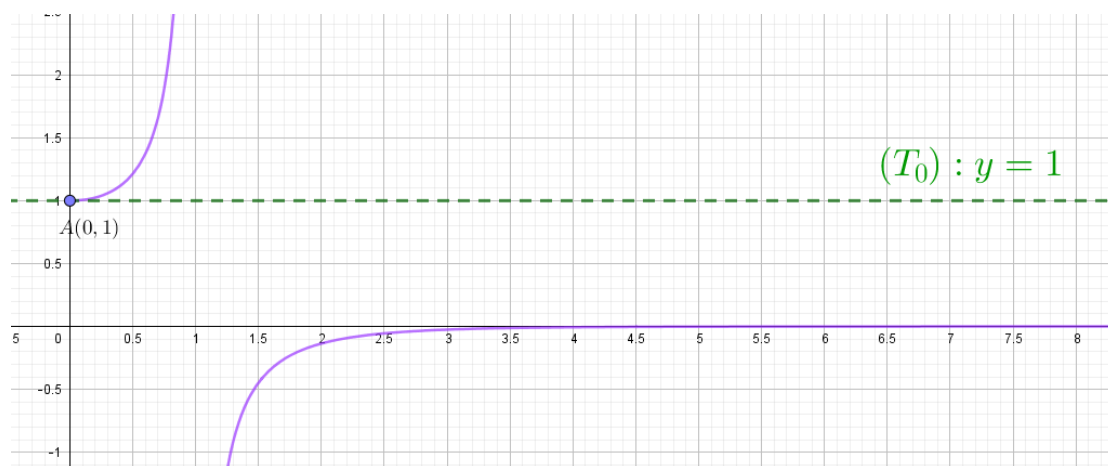
x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
f	1	$+\infty$	0

On peut le voir sur le graphique suivant :



c) On sait que :

$$(T_0): y = f'(0)x + f(0) = 1$$



d) On a les variations suivantes :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
f	1	$+\infty$	0

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} f(x) = -2 \\ x \in [0; 1[\end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

De plus sur $]1; +\infty[$ on sait que :

- f est continue
- f est strictement croissante
- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \end{cases}$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires (ici on peut même parler du théorème de la bijection si certains l'ont vu en terminale), on sait que f prend toutes les valeurs négatives une et une seule fois sur $]1; +\infty[$.

On en déduit donc que $f(x) = -2$ admet un unique antécédent sur $]1; +\infty[$.

On en déduit donc que $f(x) = -2$ admet un unique antécédent sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

Exercice D.6 : On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f et préciser sa parité.
- 2) Etudier les variations de la fonction f et préciser ses limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
- 3) Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[0; +\infty[$ admet une application réciproque, notée g .
- 4) Donner l'ensemble de définition de g , son ensemble de continuité ainsi que son sens de variation.
- 5) Tracer les courbes représentatives des fonctions f et g .
- 6) Expliciter la fonction g .

1) On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x + e^{-x} > 0$$

Donc le dénominateur ne s'annule jamais. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

De plus on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \frac{1}{e^{-x} + e^{-(-x)}} = \frac{1}{e^{-x} + e^x} = f(x)$$

On en déduit que f est paire.

2) f est dérivable par quotient de fonctions dérivables et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} = e^{-x} \frac{1 - e^{2x}}{(e^x + e^{-x})^2}$$

On en déduit que $f'(x)$ est du signe de $1 - e^{2x}$. Or on a :

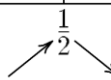
$$1 - e^{2x} > 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} < 1$$

$$\Leftrightarrow 2x < 0 \text{ car } x \mapsto \ln(x) \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^{+*}$$

$$\Leftrightarrow x < 0$$

On a donc le tableau de variation suivant :

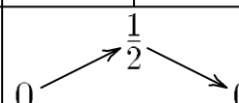
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f			

De plus on sait que :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} = 0$$

On en déduit donc que C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f			

3) On sait que :

- f est continue**
- f est strictement décroissante de $[0; +\infty[$ à valeurs dans $]0; \frac{1}{2}]$**

Donc d'après le théorème de la bijection, on en déduit que :

$$\forall y \in]0; \frac{1}{2}], \exists ! x \in [0; +\infty[, f(x) = y$$

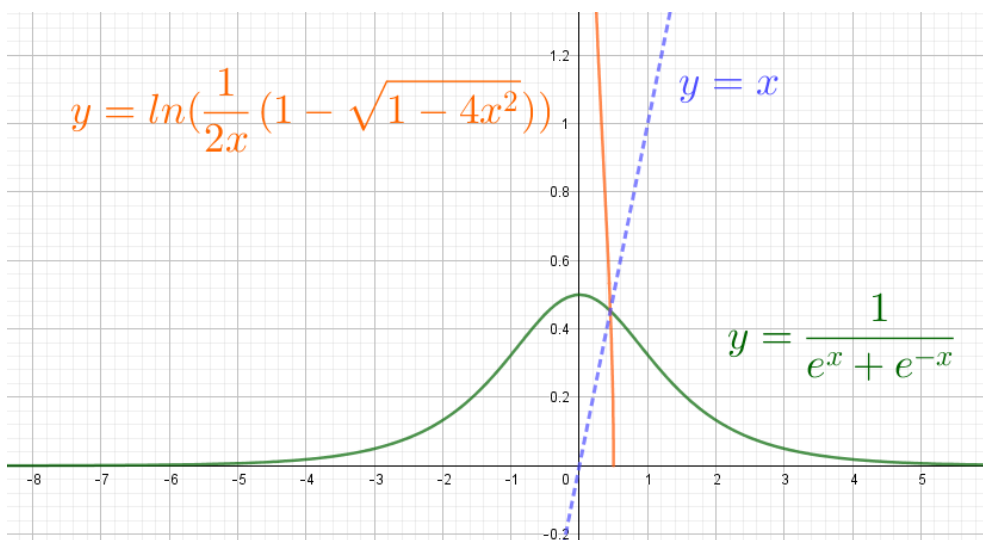
On pose alors la fonction g définie sur $]0; \frac{1}{2}]$ par :

$$\forall y \in]0; \frac{1}{2}], g(y) = x$$

4) Son ensemble de définition et de continuité est le même : $]0; \frac{1}{2}]$.

De plus on sait que les variations de g sont les mêmes que sa fonction réciproque, c'est-à-dire que g est décroissante sur $]0; \frac{1}{2}]$.

5)



6) Soit $y \in \left]0; \frac{1}{2}\right]$. On résout :

$$\begin{aligned}\frac{1}{e^x + e^{-x}} &= y \\ \Leftrightarrow e^x + e^{-x} &= \frac{1}{y} \\ \Leftrightarrow (e^x)^2 - \frac{1}{y}e^x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow X^2 - \frac{1}{y}X + 1 &= 0 \text{ avec } X = e^x\end{aligned}$$

On a

$$\Delta = \left(\frac{1}{y}\right)^2 - 4 = \frac{1 - 4y^2}{y^2}$$

Or on sait que $y \in \left]0; \frac{1}{2}\right]$. On en déduit donc que $\Delta \geq 0$.

On a alors :

$$X^2 - \frac{1}{y}X + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{\frac{1}{y} - \sqrt{\frac{1 - 4y^2}{y^2}}}{2} \\ \text{ou} \\ X = \frac{\frac{1}{y} + \sqrt{\frac{1 - 4y^2}{y^2}}}{2} \end{cases}$$

Or on a :

$$\forall y \in \left]0; \frac{1}{2}\right], \frac{1}{y} - \sqrt{\frac{1 - 4y^2}{y^2}} = \frac{1}{y}(1 - \sqrt{1 - 4y^2}) \geq 0$$

De même :

$$\forall y \in \left]0; \frac{1}{2}\right], \frac{1}{y} + \sqrt{\frac{1 - 4y^2}{y^2}} = \frac{1}{y}(1 + \sqrt{1 - 4y^2}) \geq 0$$

On en déduit donc que :

$$\frac{1}{e^x + e^{-x}} = y \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = \frac{1}{y}(1 - \sqrt{1 - 4y^2}) \\ \text{ou} \\ e^x = \frac{1}{y}(1 + \sqrt{1 - 4y^2}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln\left(\frac{1}{y}(1 - \sqrt{1 - 4y^2})\right) \\ \text{ou} \\ x = \ln\left(\frac{1}{y}(1 + \sqrt{1 - 4y^2})\right) \end{cases}$$

De plus on sait que $g(y) = x \geq 0$.

On en déduit donc que :

$$g(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\left(1 + \sqrt{1 - 4x^2}\right)\right)$$

En effet on a :

$$\forall y \in \left]0; \frac{1}{2}\right], \ln\left(\underbrace{\frac{1}{y}\left(1 - \sqrt{1 - 4y^2}\right)}_{\in]0;1]}\right) \leq 0$$

Partie E : Calcul de limites grâce à la dérivation

Exercice E.1 : Calculer les limites suivantes :

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x - 1} \quad \ell_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin(x))}{x} \quad \ell_3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \quad \ell_4 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-x}}{x}$$

On a :

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \text{ avec } f: x \mapsto \sin(\pi x)$$

Or on sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en 1 et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \pi \cos(\pi x)$$

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = \pi \cos(\pi) = -\pi$$

$$\ell_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin(x))}{x}$$

On a :

$$\ell_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \text{ avec } f: x \mapsto \ln(1 + \sin(x))$$

Or on sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en 0 et :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right], f'(x) = \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)}$$

On a donc $f'(0) = 1$

On en déduit que :

$$\ell_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 1$$

$$\ell_3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

On a :

$$\ell_3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \text{ avec } f: x \mapsto \sqrt{1+x}$$

Or on sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en 0 et :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right], f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

On a donc $f'(0) = \frac{1}{2}$

On en déduit que :

$$\ell_3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = \frac{1}{2}$$

Remarque : On peut aussi utiliser le conjugué réel :

$$\forall x > -1, \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$$

$$\ell_4 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-x}}{x}$$

On a :

$$\ell_4 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \text{ avec } f: x \mapsto e^{2x} - e^{-x}$$

Or on sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en 0 et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2e^{2x} + e^{-x}$$

On a donc $f'(0) = 3$

On en déduit que :

$$\ell_4 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 3$$

Partie F : Application aux inégalités

Exercice F.1 : Démontrer que :

$$\forall x > 1, \frac{x \ln(x)}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}$$

On pose

$$f: \begin{cases}]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x \ln(x)}{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \end{cases}$$

On veut montrer que f est négative pour tout $x \in]1; +\infty[$.

On a :

$$\forall x > 1, \frac{x \ln(x)}{x^2 - 1} - \frac{1}{2} = \frac{2x \ln(x) - x^2 + 1}{2(x^2 - 1)}$$

Sur $]1; +\infty[$, f est du signe de $g: x \mapsto 2x \ln(x) - x^2 + 1$.

On veut donc montrer que $g(x)$ est négative si $x \in]1; +\infty[$. Pour cela nous allons étudier g .
 g est dérivable sur $]1; +\infty[$ et :

$$\forall x > 1, g'(x) = 2 \ln(x) + 2 - 2x = 2(\ln(x) + 1 - x)$$

Le signe de $g'(x)$ n'étant pas facile à étudier, nous allons étudier $g'(x)$:

$$\forall x > 1, g''(x) = 2 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) = 2 \frac{1 - x}{x}$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	1	$+\infty$
$g''(x)$	—	
g'	↘	

De plus on sait que $g'(1) = 2 - 2 = 0$. De même $g(1) = 0$.

On a donc le tableau de variations suivant :

x	1	$+\infty$
$g''(x)$	—	
g'	0	
$g'(x)$	—	
g	0	
$g(x)$	—	

On en déduit donc que :

$$\forall x > 1, g(x) < 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x > 1, \frac{x \ln(x)}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}$$

Exercice F.2 : Démontrer que :

$$\forall x > 0 \ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) < \frac{1}{x} + \ln(x)$$

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & \ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) < \frac{1}{x} + \ln(x) \\ \Leftrightarrow & \ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) \leq \ln\left(xe^{\frac{1}{x}}\right) \\ \Leftrightarrow & 1 + \sqrt{1 + x^2} \leq xe^{\frac{1}{x}} \text{ car } x \mapsto \ln \text{ est croissante sur }]0; +\infty[\\ \Leftrightarrow & \sqrt{1 + x^2} \leq xe^{\frac{1}{x}} - 1 \\ \Leftrightarrow & 1 + x^2 \leq x^2 e^{\frac{2}{x}} + 1 - 2xe^{\frac{1}{x}} \text{ car } x \mapsto x^2 \text{ est croissante sur }]0; +\infty[\\ \Leftrightarrow & x^2 \left(e^{\frac{2}{x}} - 1\right) - 2xe^{\frac{1}{x}} + 1 \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi on doit montrer que :

$$\forall x > 0, x^2 \left(e^{\frac{2}{x}} - 1\right) - 2xe^{\frac{1}{x}} \geq 0$$

On pose :

$$\forall x > 0, f(x) = x^2 \left(e^{\frac{2}{x}} - 1\right) - 2xe^{\frac{1}{x}}$$

On pose :

$$\forall x > 0, X = e^{\frac{1}{x}}$$

On a alors :

$$x \in]0; +\infty[\Leftrightarrow X \in]1; +\infty[\text{ et } x = \frac{1}{\ln(X)}$$

De plus on a :

$$f(x) = f\left(\frac{1}{\ln(X)}\right) = \frac{1}{\ln^2(X)} (X^2 - 1) - \frac{2X}{\ln(X)} = \frac{X^2 - 1 - 2X \ln(X)}{\ln^2(X)}$$

On pose $g: X \mapsto X^2 - 1 - 2X \ln(X)$ définie sur $]1; +\infty[$. On a alors :

$$\begin{aligned} & \forall X > 1, g'(X) = 2X - 2 \ln(X) - 2 \\ \Rightarrow & \forall X > 1, g''(X) = 2 - \frac{2}{X} = \frac{2X - 2}{X} \end{aligned}$$

On en déduit donc les variations et le signe des fonctions suivantes :

x	1	$+\infty$
$g'''(X)$	+	
g'	0	
$g''(X)$	+	
g	0	
$g(X)$	+	

On en déduit donc que :

$$\forall X > 1, f\left(\frac{1}{\ln(X)}\right) > 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x > 0, f(x) > 0$$

On a donc :

$$\forall x > 0 \ln\left(1 + \sqrt{1 + x^2}\right) < \frac{1}{x} + \ln(x)$$

Exercice F.3 : Soit n un entier naturel non nul. Déterminer le nombre de solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} = 0$$

Pour ce genre d'exercices je vous conseille d'écrire les premiers polynômes. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

On a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1(x) = 1 + x \\ P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} \\ P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \\ P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \end{array} \right.$$

On peut voir que :

$$P_1(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$P_2(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset \text{ car } \Delta = 1 - 4 \times \frac{1}{2} = -1$$

On pose la proposition suivante :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$: " Le polynôme P_n admet une unique racine réelle si n est impair et aucune si n est pair "

Initialisation : $n = 1$ et $n = 2$. On peut voir que :

$$P_1(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ donc } \mathcal{P}(1) \text{ est vraie}$$

$$P_2(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset \text{ car } \Delta = 1 - 4 \times \frac{1}{2} = -1 \text{ donc } \mathcal{P}(2) \text{ est vraie}$$

Hérédité : Soit n un entier naturel non nul fixé. On suppose que $\mathcal{P}(2n)$ est vraie.

On a alors $P_{2n}(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$. Comme P_{2n} est continue, il est de signe constant. Or $P_{2n}(0) = 1$ donc on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} > 0$$

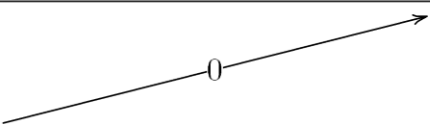
On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_{2n+1}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, P'_{2n+1}(x) = 0 + 1 + x + x^2 + \dots + \frac{(2n)x^{2n-1}}{(2n)!} + \frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$= P_{2n}(x)$$

On en déduit donc les variations de P'_{2n+1} :

x	$-\infty$	α_{2n+1}	$+\infty$
$P'_{2n+1}(x) = P_{2n}(x)$		+	
P_{2n+1}			

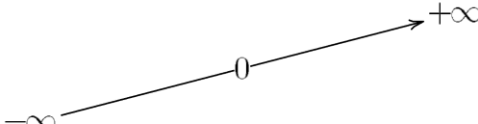
De plus on sait que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n+1} \underbrace{\left(\frac{1}{x^{2n+1}} + \frac{1}{x^{2n}} + \frac{1}{2x^{2n-1}} + \dots + \frac{1}{(2n)!x} + \frac{1}{(2n+1)!} \right)}_{\rightarrow -1} = -\infty$$

De même on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2n+1} \underbrace{\left(\frac{1}{x^{2n+1}} + \frac{1}{x^{2n}} + \frac{1}{2x^{2n-1}} + \dots + \frac{1}{(2n)!x} + \frac{1}{(2n+1)!} \right)}_{\rightarrow 1} = +\infty$$

On a donc les variations suivantes :

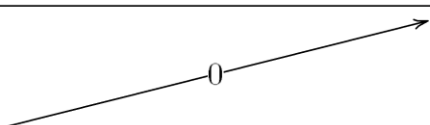
x	$-\infty$	α_{2n+1}	$+\infty$
$P'_{2n+1}(x) = P_{2n}(x)$		+	
P_{2n+1}			

On a :

- P_{2n+1} est continue
- P_{2n+1} est strictement croissante
- P_{2n+1} change de signe sur $\mathbb{R}$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires (ou ici le théorème de la bijection), il existe une unique valeur α_{2n+1} telle que $P_{2n+1}(\alpha_{2n+1}) = 0$.

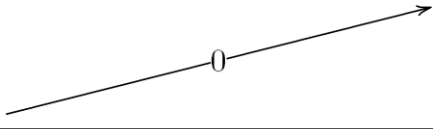
On en déduit donc que :

x	$-\infty$	α_{2n+1}	$+\infty$
$P'_{2n+1}(x) = P_{2n}(x)$		+	
P_{2n+1}			
$P_{2n+1}(x)$	-	0	+

Or on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P'_{2n+2}(x) = P_{2n+1}(x)$$

On en déduit donc que :

x	$-\infty$	α_{2n+1}	$+\infty$
$P'_{2n+1}(x) = P'_{2n}(x)$		+	
P_{2n+1}			
$P_{2n+1}(x)$	-	0	+
$P'_{2n+2}(x)$	-	0	+
P_{2n+2}			

On en déduit donc que le minimum de P_{2n+2} est

$$\begin{aligned}
 P_{2n+2}(\alpha_{2n+1}) &= 1 + (\alpha_{2n+1}) + \underbrace{\frac{(\alpha_{2n+1})^2}{2} + \dots + \frac{(\alpha_{2n+1})^{2n}}{(2n)!} + \frac{(\alpha_{2n+1})^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{P_{2n+1}(\alpha_{2n+1})=0} + \frac{(\alpha_{2n+1})^{2p+2}}{(2p+2)!} \\
 &= \frac{(\alpha_{2n+1})^{2p+2}}{(2p+2)!} \geq 0
 \end{aligned}$$

Or $P_{2n+1}(0) = 1$ donc $\alpha_{2n+1} \neq 0$.

On en déduit donc que :

$$P_{2n+2}(\alpha_{2n+1}) > 0$$

Donc d'après les variations de P_{2n+2} on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_{2n+2}(x) > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, P_{2n+2}(x) \neq 0$$

Conclusion : $\mathcal{P}(2)$ est vraie et si $\mathcal{P}(2n)$ est vraie alors $\mathcal{P}(2n+1)$ et $\mathcal{P}(2n+2)$ aussi. Donc d'après le principe de récurrence, on en déduit que :

$1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} = 0$ admet une unique racine si n est impair et aucune si n est pair.