

Correction DM n°1

Exercice 1 : On pose :

$$f: x \mapsto \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f , noté $\mathcal{D}_f$, puis montrer que f est impaire.

2) Démontrer que :

$$\forall x \in]-1; 1[, f'(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$$

3) En déduire les variations de f ainsi que les limites aux bornes de son ensemble de définition.

4) En déduire que f réalise une bijection de $] - 1; 1[$ dans un ensemble à déterminer.

5) Déterminer l'ensemble de définition de f^{-1} puis déterminer f^{-1} .

6) Démontrer que : $g: x \mapsto e^x - e^{-x}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ puis déterminer g^{-1} .

1) On sait que :

$$\mathcal{D}_{\ln} =]0; +\infty[$$

Ainsi f est définie si et seulement si :

$$\frac{1-x}{1+x} > 0$$

On peut faire un tableau de signe :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1-x$	+	+	0	-
$1+x$	-	0	+	+
$\frac{1-x}{1+x}$	-	+	0	-

On en déduit alors d'après le tableau de signe que $\mathcal{D}_f =]-1; 1[$.

De plus on a :

$$\forall x \in]-1; 1[, f(-x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln\left(\frac{1}{\frac{1-x}{1+x}}\right) = -\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -f(x)$$

Ainsi f est **impaire**.

Remarque : Ici on a utilisé la propriété de $\ln$ suivante :

$$\forall a > 0, \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

2) On pose :

$$g: x \mapsto \frac{1-x}{1+x} \text{ pour } x \in]-1; 1[$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1; 1[, f(x) &= \ln(g(x)) \\ \Rightarrow \forall x \in]-1; 1[, f'(x) &= \frac{g'(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

Or on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1; 1[, g'(x) &= \frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2} \\ \Rightarrow \forall x \in]-1; 1[, f'(x) &= \frac{\frac{-2}{(1+x)^2}}{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{-2}{(1-x)^2} \times \frac{1-x}{1+x} = \frac{-2}{x^2 - 1} \end{aligned}$$

3) On sait que :

$$\forall x \in]-1; 1[, x^2 < 1 \Rightarrow \forall x \in]-1; 1[, f'(x) < 0$$

On en déduit donc que f est décroissante sur $] - 1; 1[$.

De plus on sait que :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1-x}{1+x} = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{2}{X} = +\infty$$

Or on sait que :

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$$

Par composé on en déduit donc que :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

Il reste à déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$$

Méthode 1 : Par imparité de f

On sait que :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

On en déduit donc par imparité que :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

Méthode 2 : Par calcul

On sait que :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{1+x} = 0^+$$

Or on sait que :

$$\lim_{X \rightarrow 0^+} \ln(X) = -\infty$$

Par composé on en déduit donc que :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

On a donc le tableau de variation suivant :

x	-1	1
$f'(x)$	$-$	
f	$+\infty$	$-\infty$

4) On sait que f est :

– Continue sur $] - 1; 1[$

– Décroissante sur $] - 1; 1[$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \end{cases}$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit donc que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists ! x \in] - 1; 1[\text{ tel que } f(x) = y$$

Ainsi f réalise une bijection de $] - 1; 1[$ dans $\mathbb{R}$.

5) On sait que $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R}$. Pour déterminer f^{-1} on résout : $f(x) = y$.

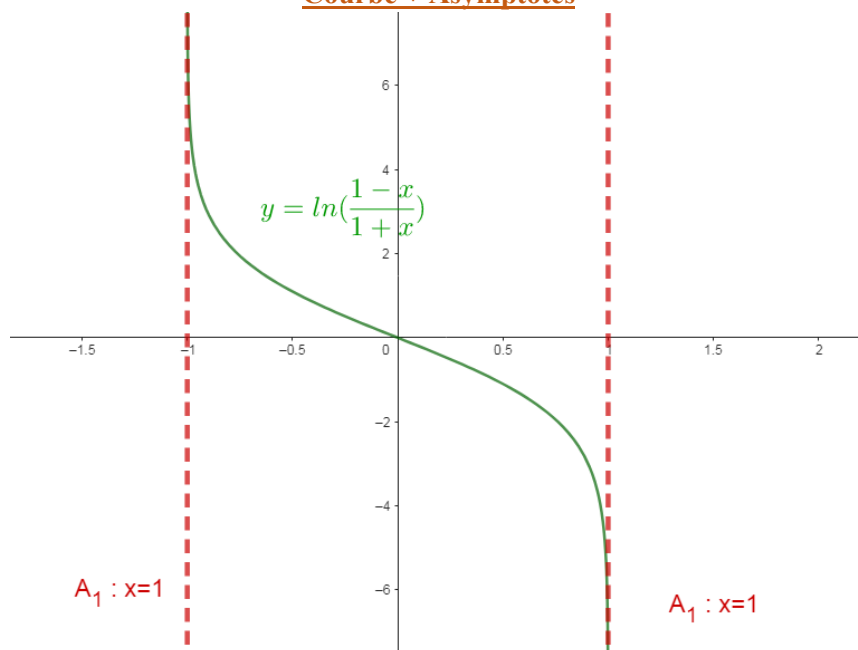
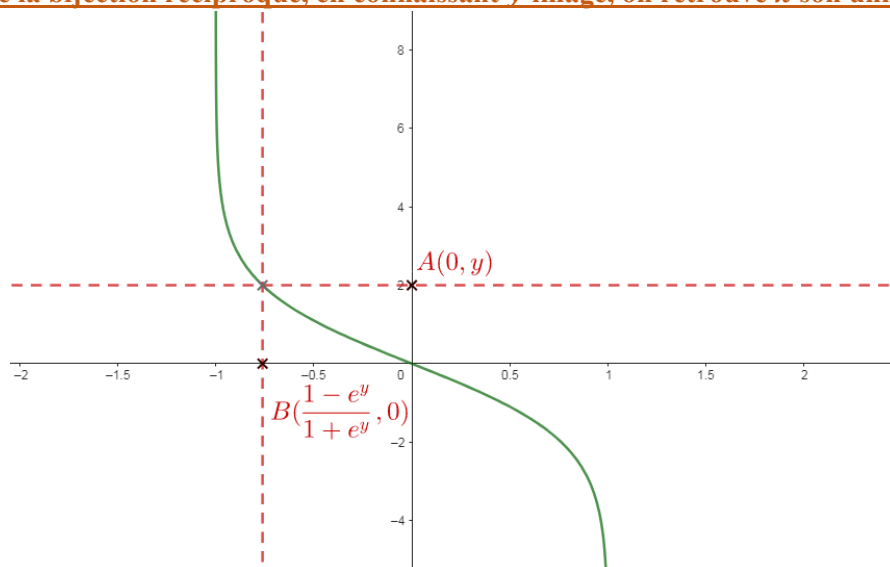
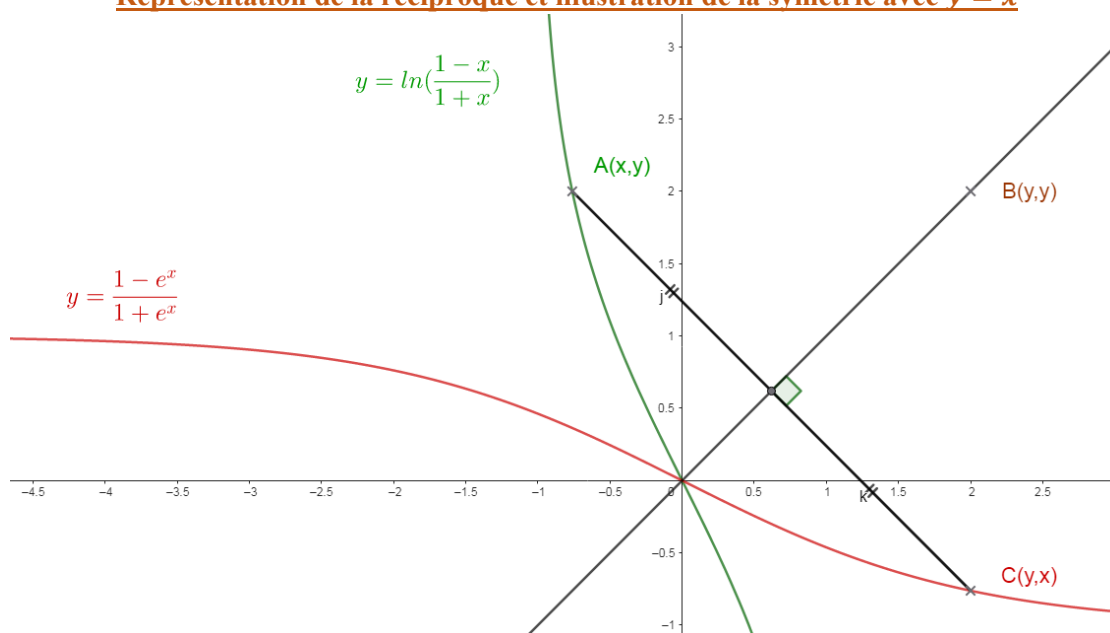
Soit $y \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = y \Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x} = e^y \Leftrightarrow 1 - e^y = x(e^y + 1) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1 - e^y}{1 + e^y} \quad (\text{car } e^y + 1 > 0 \forall y \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$f^{-1}: t \mapsto \frac{1 - e^t}{1 + e^t}$$

On peut représenter tout cela sur les graphiques suivants :

Courbe + AsymptotesIllustration de la bijection réciproque, en connaissant y image, on retrouve x son unique antécédentReprésentation de la réciproque et illustration de la symétrie avec $y = x$ 

6) a) On sait que $\mathcal{D}_{exp} = \mathbb{R}$ donc g est définie sur $\mathbb{R}$. De plus on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = e^{-x} - e^x = -(e^x - e^{-x}) = -g(x)$$

Ainsi g est impaire.

b) On sait que exp est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^x + e^{-x} > 0$$

Ainsi g est croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus on sait que :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0 \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

Par imparité on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

Ainsi on a :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
g	$-\infty$	$+\infty$

c) On sait que f est :

- Continue sur $\mathbb{R}$
- Croissante sur $\mathbb{R}$
- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{cases}$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit donc que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists ! x \in \mathbb{R} \text{ tel que } g(x) = y$$

Ainsi g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

d) Soit $y \in \mathbb{R}$. On résout :

$$g(x) = y \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = y \Leftrightarrow e^x - \frac{1}{e^x} = y \Leftrightarrow (e^x)^2 - y(e^x) - 1 = 0 \Leftrightarrow X^2 - yX - 1 = 0 \text{ (avec } X = e^x \text{)}$$

On a :

$$\Delta = y^2 + 4$$

On en déduit donc que :

$$X^2 - yX - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{y - \sqrt{y^2 + 4}}{2} \\ \text{ou} \\ X = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2} \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$g(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = \frac{y - \sqrt{y^2 + 4}}{2} \\ \text{ou} \\ e^x = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2} \end{cases}$$

Or on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$$

De plus on a :

$$\begin{aligned}
& \forall y \in \mathbb{R}, y^2 + 4 > y^2 \\
\Rightarrow \sqrt{y^2 + 4} & > \sqrt{y^2} \text{ (car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+) \\
& \Rightarrow \sqrt{y^2 + 4} > |y| \geq y \\
& \Rightarrow y - \sqrt{y^2 + 4} < 0
\end{aligned}$$

De même on a :

$$\begin{aligned}
& \forall y \in \mathbb{R}, y^2 + 4 > y^2 \\
\Rightarrow \sqrt{y^2 + 4} & > \sqrt{y^2} \text{ (car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+) \\
& \Rightarrow \sqrt{y^2 + 4} > |y| \geq -y \\
& \Rightarrow y + \sqrt{y^2 + 4} > 0
\end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$g(x) = y \Leftrightarrow e^x = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2}\right)$$

Ainsi on a :

$$\mathbf{g^{-1}: y \mapsto \ln\left(\frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2}\right) \text{ pour } y \in \mathbb{R}}$$