Correction TD 4

Partie A : Les fonctions exponentielle, logarithme et puissances

Exercice A.1 : Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$:

1) $2\,ln(x+1)+ln(3x+5)+ln(2)=ln(6x+1)+ln(x-2)+ln(x+2)$
2) $e^{2x}-2e^{x}-3=0$
3) $5^{x}-5^{x+1}+2^{3x-1}=0$
4) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}+\sqrt{x+6}=3$
5) $x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x}^{x}$
6) $4^{x+1}+2^{2-x}=65$

1) $2\,ln(x+1)+ln(3x+5)+ln(2)=ln(6x+1)+ln(x-2)+ln(x+2)$

Cette équation a du sens si et seulement si :

$$\begin{cases} x\geq -1 \\ x\geq -\dfrac{5}{3} \\ x\geq -\dfrac{1}{6} \\ x\geq 2 \\ x\geq -2 \end{cases}$$

On en déduit donc que x doit être supérieur ou égale à 2.

De plus on a :

$$\forall x\in]2;+\infty[,2\,ln(x+1)+ln(3x+5)+ln(2)=ln(6x+1)+ln(x-2)+ln(x+2)$$
$$\Longrightarrow ln((x+1)^2(3x+5)2)=ln\big((6x+1)(x-2)(x+2)\big)$$
$$\Leftrightarrow (x^2+2x+1)(6x+10)=(6x+1)(x^2-4)$$
$$\Leftrightarrow 6x^3+22x^2+26x+10=6x^3+x^2-24x-4$$
$$\Leftrightarrow 21x^2+50x+14=0$$

On a :

$$\Delta=2500-4\times 21\times 14=1324$$

On a alors :

$$21x^2+50x+14=0\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{-50-\sqrt{1324}}{42}<2 \\ x_2=\dfrac{-50+\sqrt{1324}}{42}<2 \end{cases}$$

On en déduit que :

$$2\,ln(x+1)+ln(3x+5)+ln(2)=ln(6x+1)+ln(x-2)+ln(x+2)\Leftrightarrow x\in\emptyset$$

---

2) **Méthode 1 : Par factorisation immédiate**

$$e^{2x}-2e^{x}-3=0\Leftrightarrow (e^{x})^2-2(e^{x})-3=0\Leftrightarrow (e^{x}+1)(e^{x}-3)=0\Leftrightarrow \begin{cases} e^{x}=-1 \\ ou \\ e^{x}=-3 \end{cases}\Leftrightarrow x=ln(3)$$

Méthode 2 : Avec un changement de variable

On a :

$$e^{2x}-2e^{x}-3=0\Leftrightarrow (e^{x})^2-2(e^{x})-3=0\Leftrightarrow X^2-2X-3=0\ avec\ X=e^{x}$$

On résout l'équation du second degré avec $\Delta=4+12=16$

On a donc :

$$X^2-2X-3=0\Leftrightarrow \begin{cases} X=\dfrac{2-4}{2}=-1 \\ ou \\ X=\dfrac{2+4}{2}=3 \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$e^{2x} - 2e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = -1 \\ ou \\ e^x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = ln(3)$$

---

3) On a :

$$5^x - 5^{x+1} + 2^{3x-1} = 0$$
$$\Leftrightarrow 5^x(1-5) + \frac{(2^3)^x}{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow 5^x = \frac{8^x}{8} = 8^{x-1}$$
$$\Leftrightarrow 8 = \left(\frac{8}{5}\right)^x$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{ln(8)}{ln\left(\frac{8}{5}\right)}$$

---

4) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+6} = 3$

On sait que $f\ :\ x \mapsto \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+6}$ est définie sur $[-2; +\infty[$, strictement croissante (par somme de composées de fonctions croissantes) et $f(-2) = 3$.

On en déduit donc que :

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+6} = 3 \Leftrightarrow x = -2$$

---

5) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$

Cette équation existe si et seulement si $x > 0$. En effet 0^0 n'existe pas en mathématiques !

De plus on a :

$$x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x \Leftrightarrow ln\left(x^{\sqrt{x}}\right) = ln\left(\sqrt{x}^x\right)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x}\, ln(x) = \frac{x}{2} ln(x)$$
$$\Leftrightarrow ln(x)\left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} ln(x) = 0 \\ ou \\ \sqrt{x} = \frac{x}{2} \end{cases} \\ x > 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ ou \\ x = 4 \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ ou \\ x = 4 \end{cases}$$

---

6) On a :

$$4^{x+1} + 2^{2-x} = 65$$
$$\Leftrightarrow 4 \times 2^{2x} + \frac{4}{2^x} = 65$$
$$\Leftrightarrow 4 \times 2^{3x} - 65 \times 2^x + 4 = 0$$

On pose $P(X) = 4X^3 - 65X + 4$

On cherche les racines de P. On cherche une racine évidente :

$$P(4) = 4 \times 64 - 4 \times 65 + 4 = 0$$

On peut donc factoriser P par $(X-4)$:

$$P(X) = 4X^3 - 65X + 4 = (X-4)(4X^2 + 16X - 1)$$

On a donc :

$$P(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X - 4 = 0 \\ ou \\ 4X^2 + 16X - 1 = 0 \end{cases}$$

On résout $4X^2 - 16X - 1 = 0$. $\Delta = 16^2 + 16 = 272 > 0$

On en déduit donc que :

$$4X^2+16X-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} X=\dfrac{-16-\sqrt{272}}{8}=-2-\dfrac{1}{2}\sqrt{17} \\ ou \\ X=-2+\dfrac{1}{2}\sqrt{17} \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$4^{x+1}+2^{2-x}=65 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x=4 \\ 2^x=-2-\dfrac{1}{2}\sqrt{17}\ (impossible\ car\ négatif) \\ ou \\ 2^x=-2+\dfrac{1}{2}\sqrt{17} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ ou \\ x=ln\left(-2+\dfrac{1}{2}\sqrt{17}\right) \end{cases}$$

Exercice A.2 : Résoudre les systèmes suivants :

$a)\ \begin{cases} 8^x=10y \\ 2^x=5y \end{cases}$ $b)\ \begin{cases} x+y=7 \\ log(x)+log(y)=1 \end{cases}$ $c)\ \begin{cases} xy=a^2 \\ (ln(x))^2+(ln(y))^2=\dfrac{5}{2}(ln(a))^2 \end{cases}$ $d)\ \begin{cases} x+y=520 \\ log(x)+log(y)=4 \end{cases}$

a) On a :

$$\begin{cases} 8^x=10y \\ 2^x=5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{ln(10y)}{ln(8)} \\ x=\dfrac{ln(5y)}{ln(2)} \end{cases}$$

Or on a :

$$\frac{ln(10y)}{ln(8)}=\frac{ln(5y)}{ln(2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ln(10y)}{3}=ln(5y)$$

$$\Leftrightarrow (10y)^{\frac{1}{3}}=5y$$

$$\Leftrightarrow \frac{10^{\frac{1}{3}}}{5}=y^{\frac{2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow ln\left(\frac{10^{\frac{1}{3}}}{5}\right)=\frac{2}{3}ln(y)$$

$$\Leftrightarrow ln(y)=ln\left(\left(\frac{10^{\frac{1}{3}}}{5}\right)^{\frac{3}{2}}\right)=ln\left(\left(\frac{10^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{3}{2}}}\right)\right)=ln\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{2}}{5}$$

On a alors :

$$2^x=5\times\frac{\sqrt{2}}{5}=\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

On a donc :

$$\begin{cases} 8^x=10y \\ 2^x=5y \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{5}\right)$$

b) On a :

$$\begin{cases} x+y=7 \\ log(x)+log(y)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ log(xy)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ xy=10 \end{cases}$$

On résout l'équation du second degré :

$$\mathrm{X}^2-7\mathrm{X}+10=0$$
$$\Delta=49-40=9$$

On en déduit donc que :

$$X^2-7X+10=0 \Leftrightarrow \begin{cases} X=\dfrac{7-3}{2}=2 \\ ou \\ X=\dfrac{7+3}{2}=5 \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} x+y=7 \\ log(x)+log(y)=1 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(2;5)\ \ ou\ (x,y)=(5;2)$$

---

c) On a :

$$\begin{cases} xy=a^2 \\ (ln(x))^2+(ln(y))^2=\dfrac{5}{2}(ln(a))^2 \end{cases}$$

On a :

$$(ln(x))^2+(ln(y))^2=\frac{5}{2}(ln(a))^2 \Leftrightarrow (ln(x)+ln(y))^2-2\,ln(x)\,ln(y)=\frac{5}{2}ln(a)^2$$

De plus on sait que :

$$xy=a^2 \Leftrightarrow ln(x)+ln(y)=2\,ln(a)$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} xy=a^2 \\ (ln(x))^2+(ln(y))^2=\dfrac{5}{2}(ln(a))^2 \end{cases} \Rightarrow 4\,ln(a)^2-2\,ln(x)\,ln(y)=\frac{5}{2}ln(a)^2$$
$$\Rightarrow ln(x)\,ln(y)=\frac{3}{4}ln(a)^2$$

De plus on sait que :

$$xy=a^2 \Leftrightarrow ln(x)+ln(y)=2\,ln(a) \Leftrightarrow ln(y)=2\,ln(a)-ln(x)$$

On a donc :

$$ln(x)\,ln(y)=\frac{3}{4}ln(a)^2 \Rightarrow ln(x)\,(2\,ln(a)-ln(x))=\frac{3}{4}ln(a)^2 \Rightarrow (ln(x))^2-2\,ln(a)\,ln(x)+\frac{3}{4}ln(a)^2=0$$

On pose $\mathrm{X}=\ln(\mathrm{x})$ et on résout :

$$X^2-2\,ln(a)\,X+\frac{3}{4}ln(a)=0$$

On a :

$$\Delta=4\,ln(a)^2-3\,ln(a)^2=ln(a)^2$$

On en déduit donc que :

$$X^2-2\,ln(a)\,X+\frac{3}{4}ln(a)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} X=\dfrac{2\,ln(a)-ln(a)}{2}=\dfrac{1}{2}ln(a) \\ ou \\ X=\dfrac{2\,ln(a)+ln(a)}{2}=\dfrac{3}{2}ln(a) \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$(ln(x))^2-2\,ln(a)\,ln(x)+\frac{3}{4}ln(a)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} ln(x)=\dfrac{1}{2}ln(a) \\ ou \\ ln(x)=\dfrac{3}{2}ln(a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{a} \\ ou \\ x=a^{\frac{3}{2}}=a\sqrt{a} \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} xy = a^2 \\ (ln(x))^2 + (ln(y))^2 = \frac{5}{2}(ln(a))^2 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y) = (\sqrt{a}; a\sqrt{a}) \ ou \ (x;y) = (a\sqrt{a}; \sqrt{a})$$

---

4) On a :

$$\begin{cases} x + y = 520 \\ log(x) + log(y) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 520 \\ xy = 10^4 = 10000 \end{cases}$$

On résout alors l'équation du second degré :

$$X^2 - 520X + 10000 = 0$$
$$\Delta = 270400 - 40000 = 230400 = (480)^2$$

On a donc :

$$X^2 - 520X + 10000 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{520 - 480}{2} = 20 \\ ou \\ X = \frac{520 + 480}{2} = 500 \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} x + y = 520 \\ log(x) + log(y) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (20;500) \ ou \ (x,y) = (500,20)$$

Exercice A.3 : Démontrer que :

$$\forall \ x \in]0;1[, x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$$

$$\forall \ x \in]0;1[, h(x) = x^x(1-x)^{1-x} = e^{x\,ln(x)}e^{(1-x)\,ln(1-x)} = f(x) \times f(1-x) \ avec \ f: \begin{cases}]0;1[\rightarrow]0;1[\\ x \longmapsto e^{x\,ln(x)} \end{cases}$$

On a donc :

$$\forall \ x \in]0;1[, h(1-x) = h(x)$$

Donc la courbe représentative de h est symétrique par rapport à la droite d'équation x = 0,5.
On doit donc étudier h sur]0 ;0,5].
Or on sait que *f* est dérivable sur]0 ;1[et :

$$\forall \ x \in \ ]0;1[, f'(x) = (ln(x) + 1)e^{x\,ln(x)} = (ln(x) + 1)f(x)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall \ x \in]0;1[, h'(x) &= f'(x)f(1-x) - f(x)f'(1-x) \\ &= (ln(x) + 1)h(x) - (ln(1-x) + 1)h(x) \\ &= h(x)[ln(x) - ln(1-x)] \\ &= h(x) \times ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \end{aligned}$$

On pose :

$$g : \begin{cases}]0;1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x}{1-x} \end{cases}$$

g est dérivable sur]0; 1[et :

$$\forall \ x \in]0;1[, g'(x) = \frac{1 - x + x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} > 0$$

Donc g est croissante sur]0; 1[et comme ln est croissante :

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{x}{1-x}$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$
$ln(\frac{x}{1-x})$	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

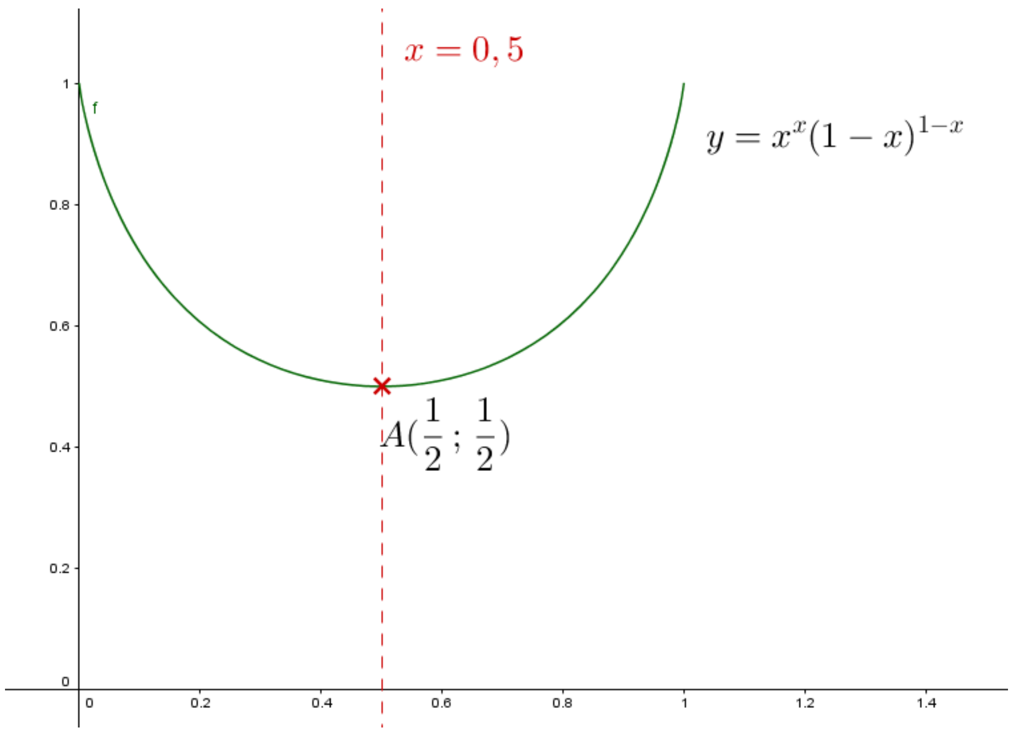
On a donc $h'(x) < 0$ sur $]0;0,5[$ puis positive sur $]0,5,1[$.
On a donc le tableau ci-contre avec :

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1^{\frac{1}{2}}}{2} \times \frac{1^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1}{2}$$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h	1	$\searrow$	$0{,}5$	$\nearrow$	1

On en déduit donc que :

$$\forall\, x \in\,]0;1[, x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$$



Remarque :

$$\forall\, x \in]0;1[, (1-x) \in]0;1[$$
$$h(x) = f(1-x) \Longrightarrow h'(x) = -f'(1-x)$$

Exercice A.4 :
a) Montrer que :

$$\forall x > -1, \frac{x}{x+1} \leq ln(1+x) \leq x$$

b) Interprétez graphiquement l'inégalité de droite.

1ière inégalité : Montrons que :

$$\forall x > -1, \frac{x}{x+1} \leq ln(1+x)$$

On pose :

$$f: \begin{cases}]-1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x}{x+1} - ln(1+x) \end{cases}$$

On sait que f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ $\left(f \in \mathcal{D}(]-1;+\infty[)\right)$ et :

$$\forall x > -1, f'(x) = \frac{(x+1)-x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{-x}{(1+x)^2}$$

On en déduit donc le tableau de variations suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	0	$\searrow$	

De plus comme $f(0) = 0$ on en déduit donc que :

$$\forall x > -1, f(x) \leq 0$$

On a donc :

$$\forall x > -1, \frac{x}{x+1} \leq ln(1+x)$$

2ième inégalité : Montrons que :

$$\forall x > -1, x \geq ln(1+x)$$

On pose :

$$g: \begin{cases}]-1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x - ln(1+x) \end{cases}$$

On sait que g est dérivable sur $]-1;+\infty[$ $\left(g \in \mathcal{D}(]-1;+\infty[)\right)$ et :

$$\forall x > -1, g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

On en déduit donc le tableau de variations suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

De plus comme $g(0) = 0$ on en déduit donc que :

$$\forall x > -1, g(x) \geq 0$$

On a donc :

$$\forall x > -1, x \geq ln(1+x)$$

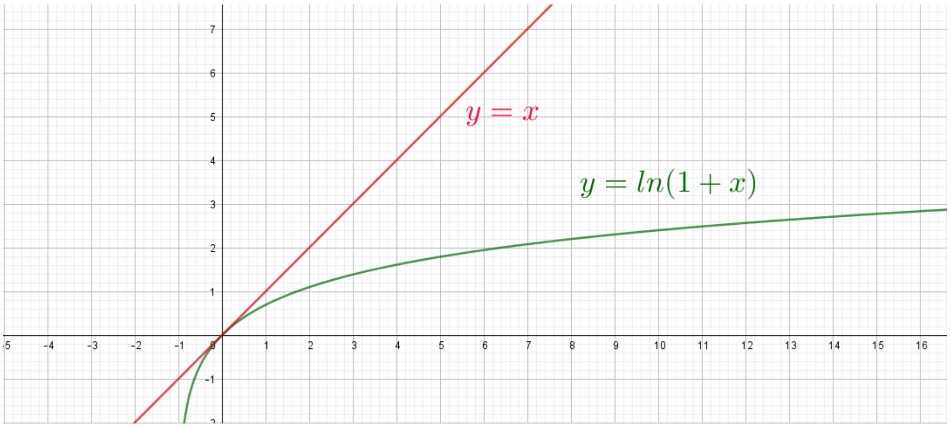
On a donc :

$$\forall x > -1, \frac{x}{x+1} \leq ln(1+x) \leq x$$

b) La droite $(\varDelta): y = x$ est tangente à la courbe de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 :

$$(T_0): \ y = f'(0)x + f(0) = x$$

On en déduit donc que la fonction logarithme népérien est toujours en dessous de sa tangente en 0 :



Remarque : Cette tangente au-dessus de la courbe de x ↦ ln(1 + x) est un cas particulier du fait que toutes les tangentes à la courbe de x ↦ ln(1 + x) sont au-dessus de la courbe. On dit que la fonction x ↦ ln(1 + x) est concave.

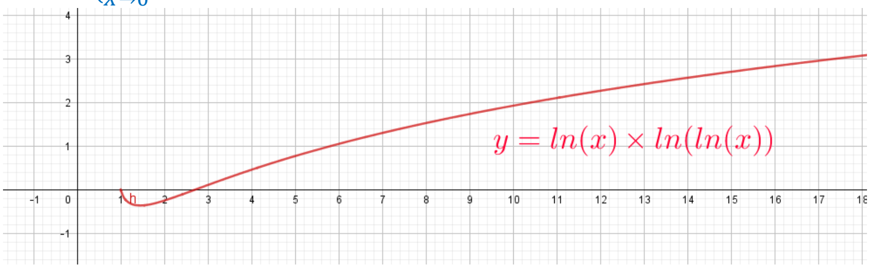
Exercice A.5 : Calculer les limites suivantes :

$$a)\ \lim_{x\to 1^+} ln(x)\,ln(ln(x)) \qquad b)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{ln(1+x^2)}{2x} \qquad c)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{e^x-1}$$

$$d)\ \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} \qquad e)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}}\quad (1<a<b) \qquad f)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$$

a) On sait que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} ln(x) = 0^+ \\ \lim\limits_{X\to 0^+} X ln(X) = 0 \end{cases} \overset{par\ composée}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 1^+} ln(x)\,ln(ln(x)) = 0$$

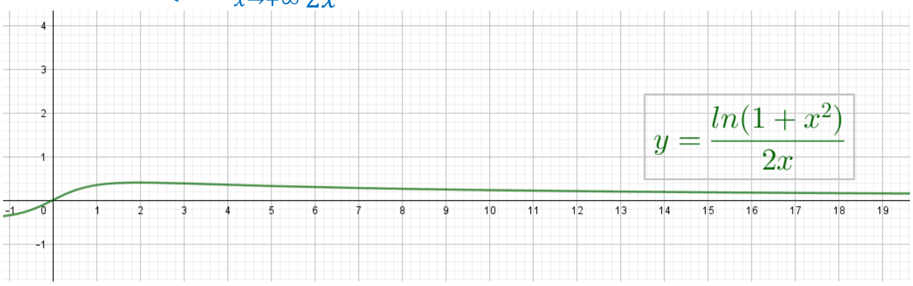


b) On sait que :

$$\forall x>0, \frac{ln(1+x^2)}{2x} = \frac{ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)}{2x} = \frac{ln(x)}{x} + \frac{ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2x}$$

Or on sait que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{ln(1+x^2)}{2x} = 0$$



Remarque : La courbe de x ↦ $\frac{\ln(1+x^2)}{2x}$ admet une asymptote horizontale d’équation y = 0.

$c)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{e^x-1}$

On sait que :

$$\forall x>0, \frac{x+1}{e^x-1} = \frac{x}{e^x} \times \frac{1+\frac{1}{x}}{1-e^{-x}}$$

Or on sait que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0\ (par\ croissance\ comparée) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1-e^{-x}} = 1 \end{cases} \overset{par\ produit}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{e^x-1} = 0$$

$d)\ \lim\limits_{x\to0^+} x^{\frac{1}{x}}$

On sait que :

$$\forall x>0, x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{ln(x)}{x}}$$

Or on sait que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to0^+} \frac{ln(x)}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0 \end{cases} \overset{par\ composée}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to0^+} x^{\frac{1}{x}} = 0$$

$e)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}} \quad (1<a<b)$

On sait que :

$$\forall x>0, \frac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}} = \frac{e^{b^x ln(a)}}{e^{a^x ln(b)}} = e^{b^x ln(a) - a^x ln(b)}$$

De plus on sait que :

$$\forall x>0, b^x ln(a) - a^x ln(b) = b^x \left(ln(a) - \frac{a^x}{b^x} ln(b)\right)$$

Or on sait que :

$$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{b^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^x = 0\ car 0 < \frac{a}{b} < 1 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{b^x} ln(b) = 0\ car\ ln(b) > 0$$

De plus on sait que :

$$\lim\limits_{x\to+\infty} b^x = +\infty\ car\ b > 1$$

On a donc :

$$\lim\limits_{x\to+\infty} b^x \left(ln(a) - \frac{a^x}{b^x} ln(b)\right) = +\infty\ car\ ln(a) > 0$$

On en déduit donc que :

$$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}} = +\infty$$

$f)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$

On a :

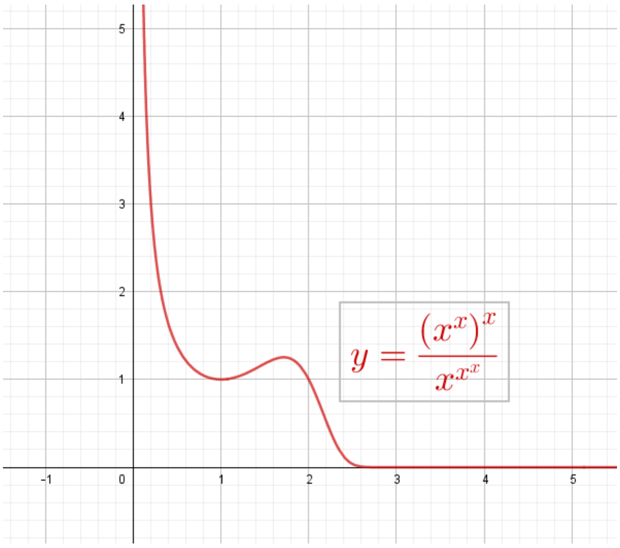
$$\forall x>0, \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = \frac{x^{x^2}}{x^{(x^x)}} = x^{x^2-x^x} = e^{(x^2-x^x)\,ln(x)} = e^{x^x ln(x)(x^{2-x}-1)}$$

On sait que :

$$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{x-2}} = 0$$

On a donc :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^x \ln(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x^{x-2}} - 1\right) = -1 \end{cases} \overset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} x^x \ln(x)\,(x^{2-x}-1) = -\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = 0$$



Remarque : La courbe de la fonction $x \mapsto \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$

Exercice A.6 : a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$. Interpréter ce résultat graphiquement.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En posant $x = \frac{1}{n}$ et $x = -\frac{1}{n+1}$, en déduire l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

c) En déduire l'encadrement suivant du nombre e pour $n \geq 1$:

$$0 \leq e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{3}{n}$$

d) En déduire :

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

a) On pose :

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x - x - 1 \end{cases}$$

On sait que g est dérivable sur $\mathbb{R}\big(g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\big)$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^x - 1$$

On en déduit donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	0	$\nearrow$

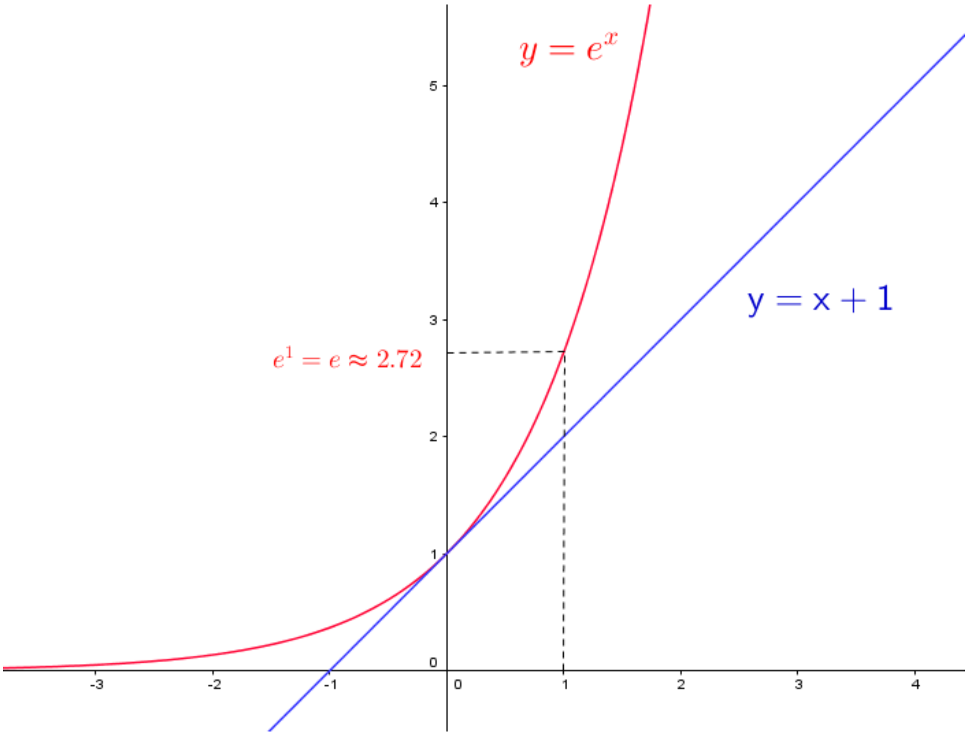
On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$$

Graphiquement cela se traduit par le fait que la courbe de la fonction exponentielle est toujours au-dessus de sa tangente en 0 car $(T_0): y = x + 1$:



b) Soit n ∈ ℕ*. On sait que :

$$e^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{n}$$

On en déduit que :

$$\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad car\ x \mapsto x^n\ est\ croissante\ sur\ \mathbb{R}^+$$

On a donc :

$$e \geq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

De même on a :

$$e^{\frac{-1}{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\Longrightarrow \left(e^{\frac{-1}{n+1}}\right)^{n+1} \geq \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \quad car\ x \mapsto x^{n+1}\ est\ croissante\ sur\ \mathbb{R}^+$$

$$\Longrightarrow e^{-1} \geq \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\Longrightarrow e \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \quad car\ x \mapsto \frac{1}{x}\ est\ décroissante\ sur\ \mathbb{R}^{+*}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

c) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq e - \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

Or on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n+1}{n} - 1\right) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \times \frac{1}{n}$$

De plus on sait que :

$$\forall x > 0, 1 + x \leq e^x < 3^x\ car\ 3^x = e^{x\ln(3)}\ et\ ln(3) > 1$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + \frac{1}{n} < 3^{\frac{1}{n}}$$

$$\Longrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3\ car\ x \mapsto x^n\ est\ croissante\ sur\ \mathbb{R}^+$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \times \frac{1}{n} \leq \frac{3}{n}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq e - \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq \frac{3}{n}$$

d) On sait que :

$$\lim_{n} \frac{3}{n} = 0$$

Donc d'après le théorème des gendarmes on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Exercice A.7 :
On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0;+\infty[\backslash\{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f relativement à un repère orthonormal.
a) Déterminer la limite de f(x) lorsque x tend vers $+\infty$, puis lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieurs et inférieurs. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_f$?
b) Montrer que f est croissante sur chacun des intervalles $[0;1[,]1;+\infty[$.
c) Préciser l'équation cartésienne de la tangente (T_0) au point A de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 0.
d) Prouver que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+\backslash\{1\}$.

a) On a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1-x} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$\mathcal{C}_f$ admet donc une asymptote horizontale d'équation y = 0.
De plus on a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to1^+} e^{-x} = e^{-1} = \dfrac{1}{e} \\ \lim\limits_{x\to1^+} (1-x) = 0^- \end{cases} \overset{par\ quotient}{\Longrightarrow} \lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty$$

De même on a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to1^-} e^{-x} = e^{-1} = \dfrac{1}{e} \\ \lim\limits_{x\to1^-} (1-x) = 0^+ \end{cases} \overset{par\ quotient}{\Longrightarrow} \lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$$

On en déduit donc que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation x = 1.

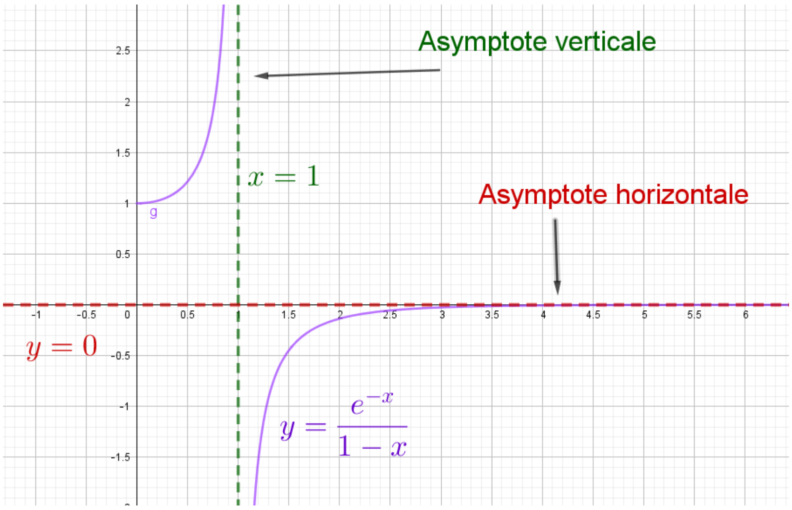
b) On sait que f est dérivable sur chacun des intervalles $[0;1[,]1;+\infty[$, par quotient de fonctions dérivables. De plus on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}, f'(x) = \frac{-e^{-x}(1-x)+e^{-x}}{(1-x)^2} = \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2} \geq 0$$

Donc f est croissante sur chacun des intervalles $[0;1[,]1;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
f	1 ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$		↗ 0

On peut le voir sur le graphique suivant :



c) On sait que :

$$(T_0): y = f'(0)x + f(0) = 1$$

d) On a les variations suivantes :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
f	$1 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 0$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} f(x) = -2 \\ x \in [0;1[\end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

De plus sur $]1;+\infty[$ on sait que :

- f est continue
- f est strictement croissante
- $\begin{cases} \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 \end{cases}$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires (ici on peut même parler du théorème de la bijection si certains l'ont vu en TS), on sait que f prend toutes les valeurs négatives une et une seule fois sur $]1;+\infty[$.
On en déduit donc que $f(x) = -2$ admet un unique antécédent sur $]1;+\infty[$.
On en déduit donc que $f(x) = -2$ admet un unique antécédent sur $\mathbb{R}^+\backslash\{1\}$.

Exercice A.8 : On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f et préciser sa parité.

2) Etudier les variations de la fonction f et préciser ses limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
3) Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[0; +\infty[$ admet une application réciproque, notée g.
4) Donner l'ensemble de définition de g, son ensemble de continuité ainsi que son sens de variation.
5) Tracer les courbes représentatives des fonctions f et g.
6) Expliciter la fonction g.

1) On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x + e^{-x} > 0$$

Donc le dénominateur ne s'annule jamais. Donc $\mathcal{D}_\mathrm{f} = \mathbb{R}$.
De plus on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \frac{1}{e^{-x} + e^{-(-x)}} = \frac{1}{e^{-x} + e^x} = f(x)$$

On en déduit que f est paire.
2) f est dérivable par quotient de fonctions dérivables et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} = e^{-x}\frac{1 - e^{2x}}{(e^x + e^{-x})^2}$$

On en déduit que $\mathrm{f}'(\mathrm{x})$ est du signe de $1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{x}}$. Or on a :

$$1 - e^{2x} > 0$$
$$\Leftrightarrow e^{2x} < 1$$
$$\Leftrightarrow 2x < 0 \ car\ x \mapsto ln(x)\ est\ croissante\ sur\ \mathbb{R}^{+*}$$
$$\Leftrightarrow x < 0$$

On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	

De plus on sait que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} = 0$$

On en déduit donc que $\mathcal{C}_\mathrm{f}$ admet une asymptote horizontale d'équation $\mathrm{y} = 0$.
On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

3) On sait que :

- f est continue
- f est strictement décroissante de $[0; +\infty[$ à valeurs dans $\left]0; \frac{1}{2}\right]$

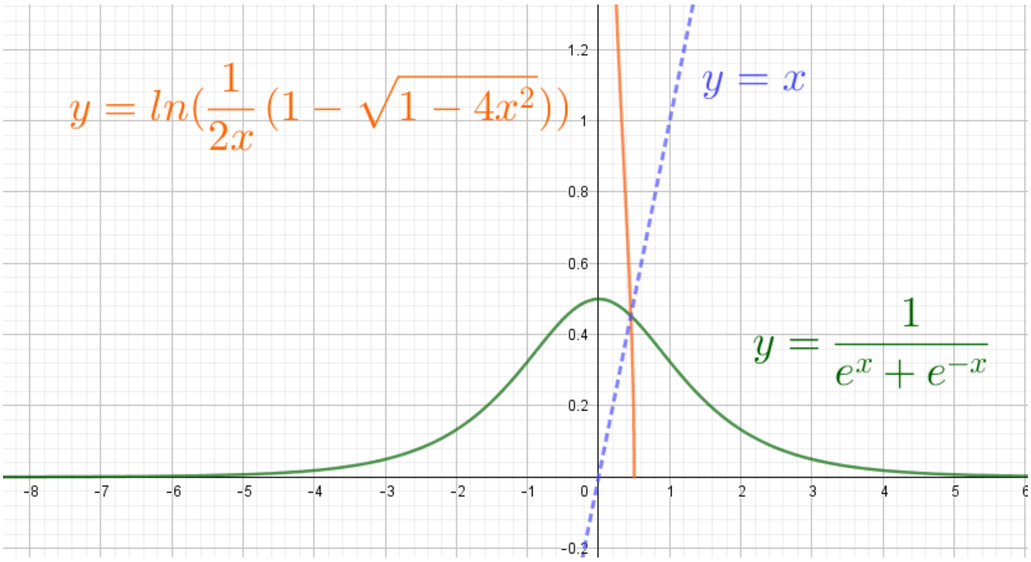
Donc d'après le théorème de la bijection, on en déduit que :

$$\forall y \in \left]0; \frac{1}{2}\right], \exists! \, x \in [0; +\infty[, f(x) = y$$

On pose alors la fonction g définie sur $\left]0; \frac{1}{2}\right]$ par :

$$\forall y \in \left]0; \frac{1}{2}\right], g(y) = x$$

4) Son ensemble de définition et de continuité est le même : $\left]0;\frac{1}{2}\right]$.
De plus on sait que les variations de g sont les mêmes que sa fonction réciproque, c'est-à-dire que g est décroissante sur $\left]0;\frac{1}{2}\right]$.
5)



6) Soit y ∈ $\left]0;\frac{1}{2}\right]$. On résout :

$$\frac{1}{e^x + e^{-x}} = y$$
$$\Leftrightarrow e^x + e^{-x} = \frac{1}{y}$$
$$\Leftrightarrow (e^x)^2 - \frac{1}{y}e^x + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow X^2 - \frac{1}{y}X + 1 = 0 \; avec \; X = e^x$$

On a

$$\Delta = \left(\frac{1}{y}\right)^2 - 4 = \frac{1-4y^2}{y^2}$$

Or on sait que y ∈ $\left]0;\frac{1}{2}\right]$. On en déduit donc que $\Delta \geq 0$.
On a alors :

$$X^2 - \frac{1}{y}X + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \dfrac{\frac{1}{y} - \sqrt{\frac{1-4y^2}{y^2}}}{2} \\ ou \\ X = X = \dfrac{\frac{1}{y} + \sqrt{\frac{1-4y^2}{y^2}}}{2} \end{cases}$$

Or on a :

$$\forall y \in \left]0;\frac{1}{2}\right], \frac{1}{y} - \sqrt{\frac{1-4y^2}{y^2}} = \frac{1}{y}\left(1 - \sqrt{1-4y^2}\right) \geq 0$$

De même :

$$\forall y \in \left]0;\frac{1}{2}\right], \frac{1}{y} + \sqrt{\frac{1-4y^2}{y^2}} = \frac{1}{y}\left(1 + \sqrt{1-4y^2}\right) \geq 0$$

On en déduit donc que :

$$\frac{1}{e^x+e^{-x}}=y \Leftrightarrow \begin{cases} e^x=\frac{1}{y}\left(1-\sqrt{1-4y^2}\right) \\ ou \\ e^x=\frac{1}{y}\left(1+\sqrt{1-4y^2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=ln\left(\frac{1}{y}\left(1-\sqrt{1-4y^2}\right)\right) \\ ou \\ x=ln\left(\frac{1}{y}\left(1+\sqrt{1-4y^2}\right)\right) \end{cases}$$

De plus on sait que $\mathrm{g(y)} = \mathrm{x} \geq 0$.
On en déduit donc que :

$$g(x)=ln\left(\frac{1}{x}\left(1+\sqrt{1-4x^2}\right)\right)$$

En effet on a :

$$\forall y \in \left]0;\frac{1}{2}\right], ln\left(\underbrace{\frac{1}{y}\left(1-\sqrt{1-4y^2}\right)}_{\in]0;1]}\right) \leq 0$$

Exercice A.9 : On pose :

$$f : x \longmapsto ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f
2) Montrer que f est impaire.
3) Etudier les variations de f et les limites aux bornes de son ensemble de définition.

1) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2+1 > x^2$$
$$\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} \; car \; x \mapsto \sqrt{x} \; est \; croissante \; sur \; \mathbb{R}^+$$
$$\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+1} > |x| \geq x$$
$$\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+1}-x > 0$$

On en déduit donc que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
2) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = ln\left(\sqrt{1+(-x)^2}-(-x)\right)$$
$$= ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$$
$$= ln\left(\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{\sqrt{1+x^2}-x}\right)$$
$$= ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}\right)$$
$$= -ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$$
$$= -f(x)$$

On en déduit donc que f est impaire.

Remarque : On a utilisé ici :

$$\forall \mathrm{a} > 0, \ln\left(\frac{1}{\mathrm{a}}\right) = -\ln(\mathrm{a})$$
$$\forall (\mathrm{a},\mathrm{b}) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \sqrt{\mathrm{a}}-\sqrt{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{\sqrt{\mathrm{a}}+\sqrt{\mathrm{b}}}$$

3) On étudie f sur $[0;+\infty[$:

$$\forall x \geq 0, f(x) = ln\big(u(x)\big) \; avec \; u : x \mapsto \sqrt{x^2+1}-x$$

On sait que u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \geq 0, u'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \geq 0, f'(x) = \frac{\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}-x} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} < 0$$

On en déduit donc que f est décroissante sur $[0;+\infty[$.
On cherche à présent la limite de f en $+\infty$. On a :

$$\forall x > 0, \sqrt{x^2+1}-x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

Or on sait que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0^+$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = 0^+$$

On a alors :

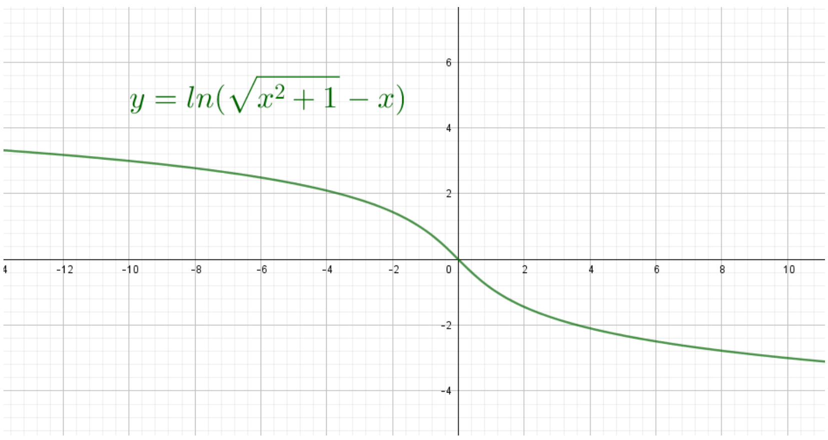
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = 0^+ \\ \lim\limits_{X\to0^+} ln(X) = -\infty \end{cases} \overset{par\ composé}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = -\infty$$

On a alors le tableau de variation suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$

Par imparité on en déduit que :

x		0		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$ 0	$\searrow$	$-\infty$



Exercice A.10 : Démontrer que :

$$\forall\ x > 1, \frac{x\ ln(x)}{x^2-1} < \frac{1}{2}$$

On pose

$$f:\begin{cases}]1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{xln(x)}{x^2-1}-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

On veut montrer que f est négative pour tout x $\in]1;+\infty[$.
On a :

$$\forall x > 1, \frac{xln(x)}{x^2-1}-\frac{1}{2}=\frac{2xln(x)-x^2+1}{2(x^2-1)}$$

Sur $]1+\infty[$, f est du signe de $g: x \mapsto 2xln(x)-x^2+1$.
On veut donc montrer que g(x) est négative si x $\in]1+\infty[$. Pour cela nous allons étudier g.
g est dérivable sur $]1;+\infty[$ et :

$$\forall x > 1, g'(x) = 2\,ln(x)+2-2x = 2(ln(x)+1-x)$$

Le signe de $\mathrm{g}'(\mathrm{x})$ n'étant pas facile à étudier, nous allons étudier $\mathrm{g}'(\mathrm{x})$:

$$\forall x > 1, g''(x) = 2\left(\frac{1}{x}-1\right) = 2\frac{1-x}{x}$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	1 $\qquad$ $+\infty$
$g''(x)$	$-$
g'	↘

De plus on sait que $g'(1) = 2-2 = 0$. De même $\mathrm{g}(1) = 0$.
On a donc le tableau de variations suivant :

x	1 $\qquad$ $+\infty$
$g''(x)$	$-$
g'	0 ↘
$g'(x)$	$-$
g	0 ↘
$g(x)$	$-$

On en déduit donc que :

$$\forall x > 1, g(x) < 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x > 1, \frac{xln(x)}{x^2-1} < \frac{1}{2}$$

Exercice A.11 : Démontrer que :

$$\forall\, x > 0\; ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) < \frac{1}{x}+ln(x)$$

On a les équivalences suivantes :

$$ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) < \frac{1}{x}+ln(x)$$

$$\Leftrightarrow ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) \leq ln\left(xe^{\frac{1}{x}}\right)$$
$$\Leftrightarrow 1+\sqrt{1+x^2} \leq xe^{\frac{1}{x}}\ car\ x \mapsto ln\ est\ croissante\ sur\ ]0;+\infty[$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} \leq xe^{\frac{1}{x}}-1$$
$$\Leftrightarrow 1+x^2 \leq x^2e^{\frac{2}{x}}+1-2xe^{\frac{1}{x}}\quad car\ x \mapsto x^2\ est\ croissante\ sur\ ]0;+\infty[$$
$$\Leftrightarrow x^2\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)-2xe^{\frac{1}{x}}+1 \geq 0$$

Ainsi on doit montrer que :

$$\forall x>0, x^2\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)-2xe^{\frac{1}{x}} \geq 0$$

On pose :

$$\forall x>0, f(x)=x^2\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)-2xe^{\frac{1}{x}}$$

On pose :

$$\forall x>0, X=e^{\frac{1}{x}}$$

On a alors :

$$x \in]0;+\infty[\Leftrightarrow X \in]1;+\infty[\ et\ x=\frac{1}{ln(X)}$$

De plus on a :

$$f(x)=f\left(\frac{1}{ln(X)}\right)=\frac{1}{ln^2(X)}(X^2-1)-\frac{2X}{ln(X)}=\frac{X^2-1-2Xln(X)}{ln^2(X)}$$

On pose $g: X \mapsto X^2-1-2Xln(X)$ définie sur $]1;+\infty[$. On a alors :

$$\forall X>1, g'(X)=2X-2\,ln(X)-2$$
$$\Rightarrow \forall X>1, g''(X)=2-\frac{2}{X}=\frac{2X-2}{X}$$

On en déduit donc les variations et le signe des fonctions suivantes :

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g''(X)$	$+$
g'	$0 \nearrow$
$g'(X)$	$+$
g	$0 \nearrow$
$g(X)$	$+$

On en déduit donc que :

$$\forall X>1, f\left(\frac{1}{ln(X)}\right)>0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x>0, f(x)>0$$

On a donc :

$$\forall\, x>0\ ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)<\frac{1}{x}+ln(x)$$

Exercice A.12 : Etudier les fonctions suivantes :

1) $f(x)=\frac{1}{2}x+ln\left(\frac{x-1}{3x-4}\right)$ 2) $f(x)=\frac{x^2-x}{x-3}$ 3) $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{8}{x+1}$

4) $f(x)=x^2e^{-x^2}$	5) $f(x)=ln(x^2+1)$	6) $f(x)=xln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$	7) $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$	8) $f(x)=x^{1+\frac{1}{x}}$
9) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{2a-x}}$ (où $a>0$)	10) $f(x)=\sqrt{x^2\dfrac{3a-x}{a+x}}$ (où $a>0$)	11) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)}$		

1) $f(x)=\dfrac{1}{2}x+ln\left(\dfrac{x-1}{3x-4}\right)$

a) On étudie l'ensemble de définition.

On sait que :

$$\mathcal{D}_{ln}=]0;+\infty[=\mathbb{R}^{+*}$$

On a donc :

$$\mathcal{D}_f=\left\{x\in\mathbb{R},\frac{x-1}{3x-4}>0\right\}$$

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		1		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x-1}{3x-4}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

On en déduit donc que :

$$\mathcal{D}_f=]-\infty;1[\cup\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$$

b) On peut voir que f n'a pas de parité ni de périodicité, juste en voyant l'ensemble de définition.

c) On étudie les variations de f.

f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ par composée de fonctions dérivables et :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathcal{D}_f, f'(x)&=\frac{1}{2}+\frac{(3x-4)-3(x-1)}{(3x-4)^2}\times\frac{3x-4}{x-1}\\&=\frac{1}{2}+\frac{-1}{(3x-4)(x-1)}\\&=\frac{(3x-4)(x-1)-2}{2(3x-4)(x-1)}\\&=\frac{3x^2-7x+2}{2(3x-4)(x-1)}\end{aligned}$$

On étudie le signe du numérateur et du dénominateur.

On résout : $3x^2-7x+2=0$. On a $\Delta=49-4\times 2\times 3=25$

On en déduit donc que :

$$3x^2-7x+2=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{7-5}{6}=\dfrac{1}{3}\\ ou\\ x=\dfrac{7+5}{6}=2\end{cases}$$

On a alors le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
$3x2-7x+2$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$		$\|\|$	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	$\|\|$	Non définie	$\|\|$	$\searrow$		$\nearrow$	

d) Il reste à faire les limites

On sait que :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-1}{3x-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{3-\frac{4}{x}} = \frac{1}{3}$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x\to\pm\infty} ln\left(\frac{x-1}{3x-4}\right) = ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}x + ln\left(\frac{x-1}{3x-4}\right)\right) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}x + ln\left(\frac{x-1}{3x-4}\right)\right) = -\infty$$

De plus on sait que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\frac{4}{3}^+} (x-1) = \frac{1}{3} \\ \lim\limits_{x\to\frac{4}{3}^+} (3x-4) = 0^+ \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to\frac{4}{3}^+} \frac{x-1}{3x-4} = +\infty$$

De plus on sait que :

$$\lim_{x\to+\infty} ln(x) = +\infty$$

Par composée on en déduit donc que :

$$\lim_{x\to\frac{4}{3}^+} f(x) = +\infty$$

De même on a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to1^-} \left(\frac{x-1}{3x-4}\right) = 0^+ \\ \lim\limits_{X\to0^+} ln(X) = -\infty \end{cases} \overset{Par\ composée}{\Longrightarrow} \lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$$

e) Asymptotes obliques

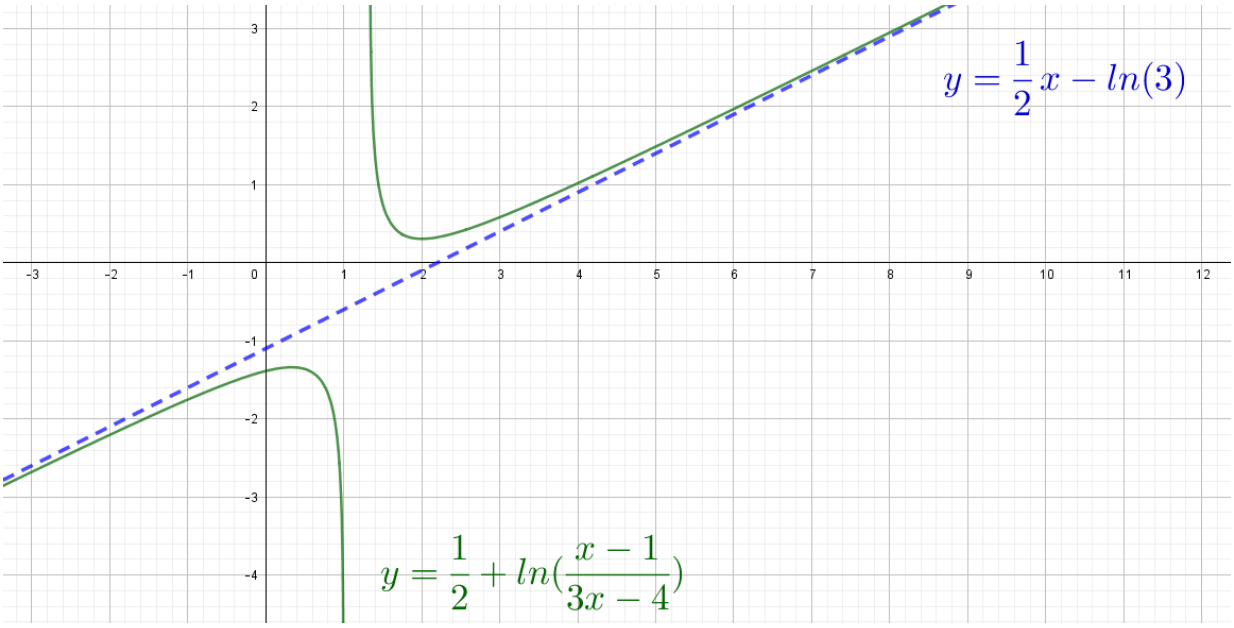
On peut voir que :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{x}\ln\left(\frac{x-1}{3x-4}\right) = \frac{1}{2}$$

De plus on a :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \ln\left(\frac{x-1}{3x-4}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln(3)$$

On en déduit donc que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation $y = \frac{1}{2}x - \ln(3)$



2) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x - 3}$

a) On étudie l'ensemble de définition.

On sait que :

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}, x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{3\}$$

b) On peut voir que f n'a pas de parité ni de périodicité, juste en voyant l'ensemble de définition.

c) On étudie les variations de f.

f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ par composée de fonctions dérivables et :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{3\}, f'(x) = \frac{(2x-1)(x-3) - (x^2 - x)}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x + 3}{(x-3)^2}$$

On étudie le signe de $x^2 - 6x + 3$. On sait que $\Delta = 36 - 12 = 24$.

On en déduit donc que :

$$x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - \sqrt{6} \\ \quad ou \\ x = 3 + \sqrt{6} \end{cases}$$

De plus on sait que :

$$f(3 - \sqrt{6}) = \frac{(3-\sqrt{6})^2 - (3 - \sqrt{6})}{-\sqrt{6}} = \frac{12 - 5\sqrt{6}}{-\sqrt{6}} = \frac{30 - 12\sqrt{6}}{6} = 5 - 2\sqrt{6}$$

De même on a :

$$f(3 + \sqrt{6}) = 5 + 2\sqrt{6}$$

On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$3-\sqrt{(6)}$		3		$3+\sqrt{(6)}$		$+\infty$
$x2-6x+3$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f		↗	$5-2\sqrt{(6)}$	↘	‖	↘	$5+2\sqrt{(6)}$	↗	

d) Il reste à faire les limites

On sait que :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}}=+\infty$$

De même on a :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x}{x-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}}=-\infty$$

De plus on a :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to3^-}(x^2-x)=6\\ \lim\limits_{x\to3^-}(x-3)=0^-\end{cases}\overset{par\ quotient}{\Longrightarrow}\lim_{x\to3^-}\frac{x^2-x}{x-3}=-\infty$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to3^+}(x^2-x)=6\\ \lim\limits_{x\to3^+}(x-3)=0^+\end{cases}\overset{par\ quotient}{\Longrightarrow}\lim_{x\to3^+}\frac{x^2-x}{x-3}=+\infty$$

On en déduit donc que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 3$.

x	$-\infty$		$3-\sqrt{(6)}$		3		$3+\sqrt{(6)}$		$+\infty$
$x2-6x+3$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	$5-2\sqrt{(6)}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$5+2\sqrt{(6)}$	↗	$+\infty$

e) Asymptotes obliques

On a :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x-3}=1$$

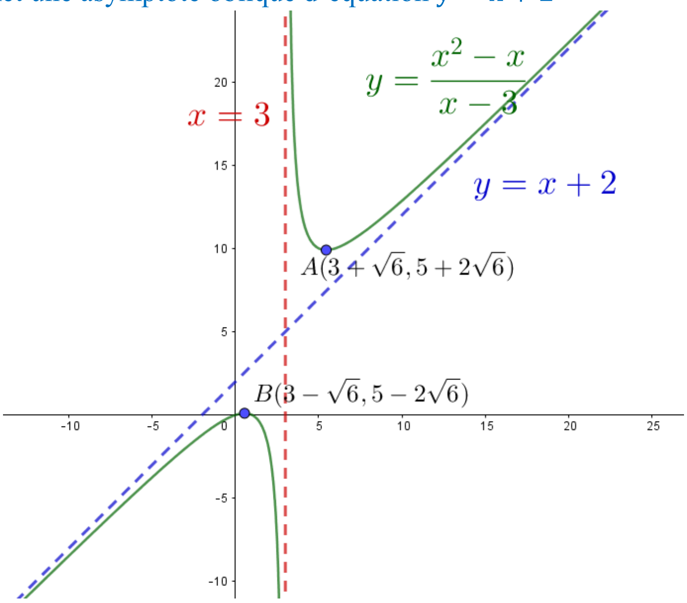
De plus on a :

$$\forall x\neq3, f(x)-x=\frac{x^2-x}{x-3}-x=\frac{2x}{x-3}$$

On sait que :

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{1-\frac{3}{x}}=2$$

On en déduit donc que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation $y = x + 2$



3) $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{8}{x+1}$

a) On étudie l'ensemble de définition.

On sait que :

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \; et \; x \neq -1\} = \mathbb{R}\backslash\{-1; 0\}$$

b) On peut voir que f n'a pas de parité ni de périodicité, juste en voyant l'ensemble de définition.

c) On étudie les variations de f.

f est dérivable sur $\mathcal{D}_\mathrm{f}$ par composée de fonctions dérivables et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{3\}, f'(x) &= -\frac{2}{x^3} + \frac{8}{(x+1)^2} \\ &= \frac{-2(x+1)^2 + 8x^3}{x^3(x+1)^2} \\ &= \frac{8x^3 - 2x^2 - 4x - 2}{x^3(x+1)^2}\end{aligned}$$

On peut voir que 1 est racine du polynôme $P(x) = 8x^3 - 2x^2 - 4x - 2$.

On en déduit que l'on peut factoriser le polynôme P par x − 1 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 8x^3 - 2x^2 - 4x - 2 = (x-1)(8x^2 + 6x + 2)$$

A présent on étudie le signe de $Q(x) = 8x^2 + 6x + 2$.

On sait que $\Delta = 36 - 4 \times 2 \times 8 = -28 < 0$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$8x2{+}6x{+}2$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$x{-}1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	‖	$-$		$+$	
f		↗	‖	↗	‖	↘		↗	

d) Il reste à faire les limites

On sait que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-1^-} \frac{1}{x^2} = 1 \\ \lim\limits_{x\to-1^-} \frac{8}{x+1} = -\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to-1^-} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{8}{x+1}\right) = +\infty$$

De même on a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-1^+} \frac{1}{x^2} = 1 \\ \lim\limits_{x\to-1^+} \frac{8}{x+1} = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to-1^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{8}{x+1}\right) = -\infty$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to0^-} \frac{8}{x+1} = 8 \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to0^-} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{8}{x+1}\right) = +\infty$$

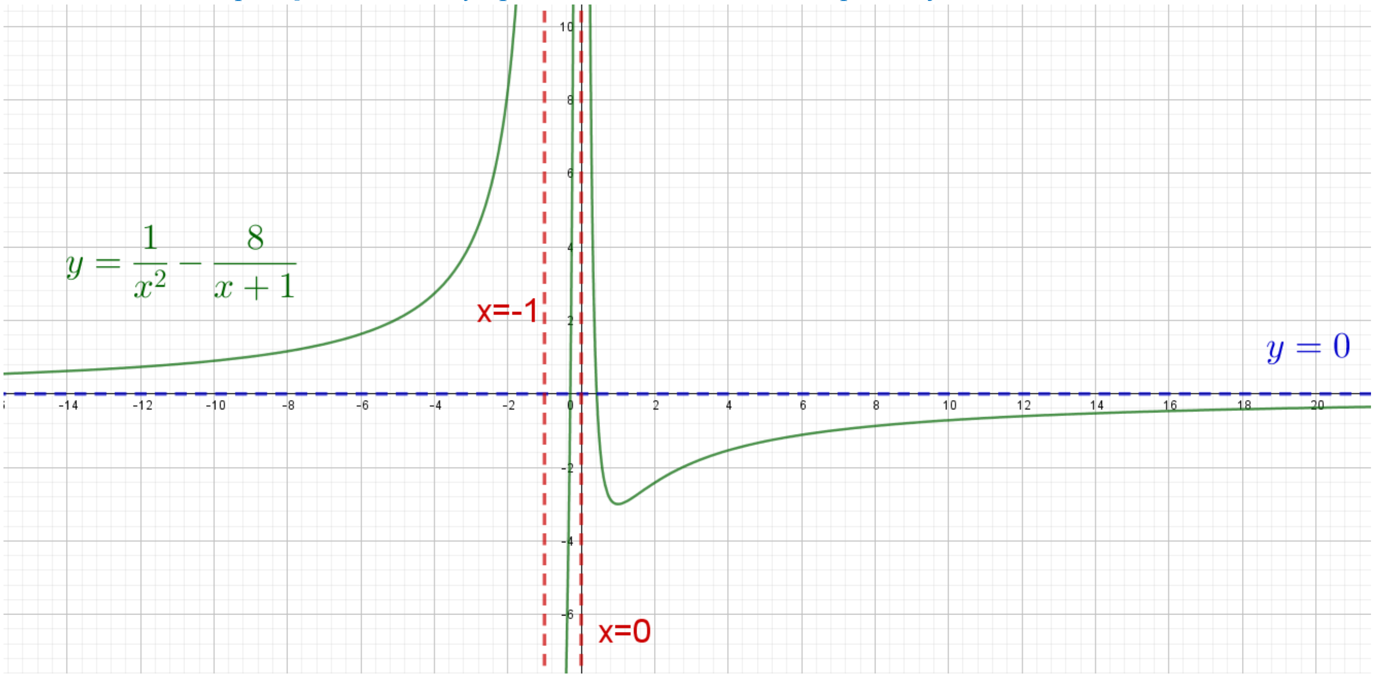
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to0^+} \frac{8}{x+1} = 8 \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{8}{x+1}\right) = +\infty$$

On en déduit donc que $\mathcal{C}_\mathrm{f}$ admet deux asymptote verticale d'équation x = −1 et x = 0.

Enfin on a :

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

On en déduit donc que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale en $\pm\infty$ d'équation $y = 0$



4) $f(x) = x^2 e^{-x^2}$

a) On étudie l'ensemble de définition.

On sait que $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x^2$ sont définies sur $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

b) Parité

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)^2} = x^2 e^{-x^2} = f(x)$$

Donc f est paire. Donc on peut étudier f sur $[0; +\infty[$.

c) On étudie les variations de f.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composée et produits de fonctions dérivables et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2xe^{-x^2} - 2x^3 e^{-x^2} = 2xe^{-x}(1 - x^2) = 2x(1 - x)(1 + x)e^{-x^2}$$

On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	

d) Il reste à faire les limites

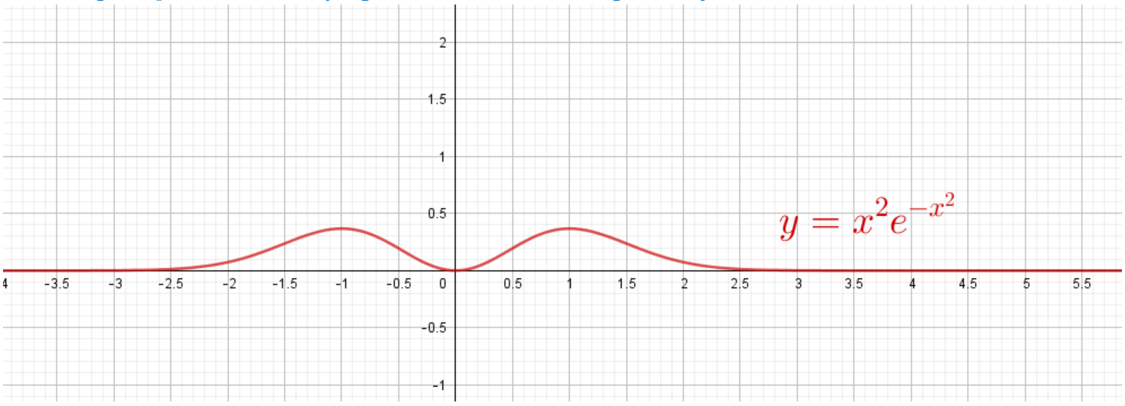
On sait que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ par croissance comparée}$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^2 e^{-x^2} = 0$$

On en déduit donc que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation y = 0.



5) $f(x) = ln(x^2 + 1)$

a) On étudie l'ensemble de définition.

On sait que :

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \neq 0\} = \mathbb{R}$$

b) Parité

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = ln(1 + (-x)^2) = ln(1 + x^2) = f(x)$$

Donc f est paire. Donc on peut étudier f sur $[0; +\infty[$.

c) On étudie les variations de f.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composée et produits de fonctions dérivables et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

d) Il reste à faire les limites

On sait que :

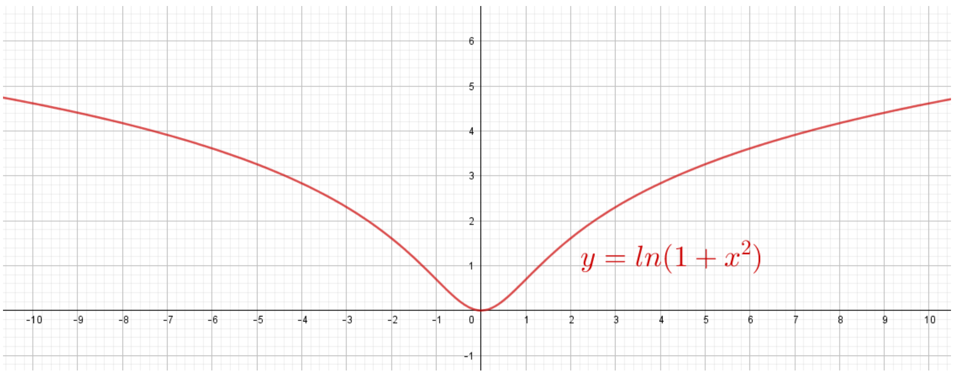
$$\lim_{x \to +\infty} (1 + x^2) = +\infty \; et \; \lim_{X \to \infty} ln(X) = +\infty$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x \to +\infty} ln(1 + x^2) = +\infty = \lim_{x \to -\infty} ln(1 + x^2) \; (par\ parité)$$

On a donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



6) $f(x) = xln\left(e + \frac{1}{x}\right)$

a) On étudie l'ensemble de définition.

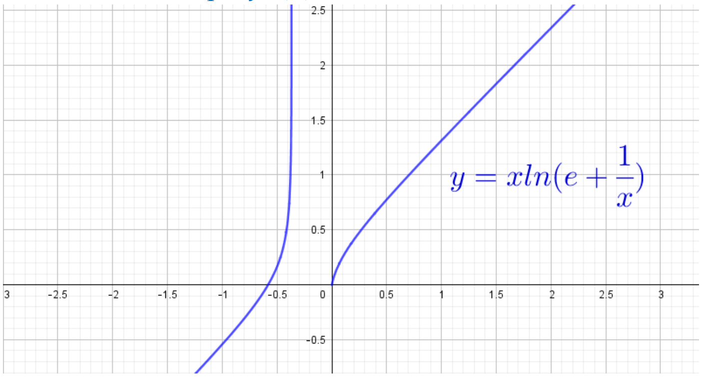
On sait que :

$$\mathcal{D}_f = \left\{x \in \mathbb{R}, e + \frac{1}{x} > 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}, \frac{1}{x} > -e\right\} = \left]-\infty; -\frac{1}{e}\right[\cup]0; +\infty[$$

b) f n'a pas de parité ni de périodicité
Cela vient du fait que l'ensemble de définition n'est pas centré en 0.
c) On étudie les variations de f.
f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ par composée et produits de fonctions dérivables et :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f'(x) = ln\left(e+\frac{1}{x}\right) + x \times \frac{-\frac{1}{x^2}}{e+\frac{1}{x}} = \frac{\left(e+\frac{1}{x}\right)ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}}{e+\frac{1}{x}} = \frac{(xe+1)\,ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-1}{xe+1}$$

On doit montrer que $f'(x) > 0$ car la courbe semble croissante :



d) Il reste à faire les limites
On a :

$$\lim_{x\to+\infty} xln\left(1+\frac{1}{x}\right) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} xln\left(e+\frac{1}{x}\right) = -\infty$$
$$\lim_{\substack{x\to-e^{-1}\\ x<-e^{-1}}} xln\left(e+\frac{1}{x}\right) = +\infty$$
$$\lim_{x\to0^+} xln\left(e+\frac{1}{x}\right) = \lim_{X\to+\infty}\frac{ln(e+X)}{X} = 0\ par\ croissance\ compar\acute{e}e$$

7) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$
a) On étudie l'ensemble de définition.
On a :

$$\forall x > 0, f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}ln(x)}$$

On en déduit donc que $\mathcal{D}_f =]0;+\infty[$.
Remarque : On peut voir que $f(-1) = (-1)^{-1} = -1$ on peut donc étendre l'ensemble de définition :

$$\mathcal{D}_f =]0;+\infty[\cup \{-1\}$$

Mais cela n'a pas d'utilité !
b) f n'a pas de parité ni de périodicité
Cela vient du fait que l'ensemble de définition n'est pas centré en 0.
c) On étudie les variations de f.
f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et :

$$\forall x > 0, f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}ln(x)+\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}ln(x)}$$
$$= \frac{1}{x^2}(1-ln(x))e^{\frac{1}{x}ln(x)}$$

Or on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$$

On en déduit donc que f est du signe de 1-ln(x).
On a :

$$1-ln(x) \leq 0 \Leftrightarrow ln(x) \geq 1 \Leftrightarrow x \geq e\ car\ x \mapsto ln(x)\ est\ croissante\ sur\ ]0;+\infty[$$

On a donc le tableau de variation suivant :

x	0		e		$+\infty$
$1-ln(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow$	

d) Il reste à faire les limites

On sait que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0 \; par\ croissance\ comparée$$

De plus on sait que :

$$\lim_{X\to 0} e^X = 1$$

On en déduit donc par composée que :

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

$\mathcal{C}_f$ admet donc une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$ d'équation $y = 1$.

De plus on a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+ \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{ln(x)}{x} = -\infty \; par\ quotient$$

De plus on sait que :

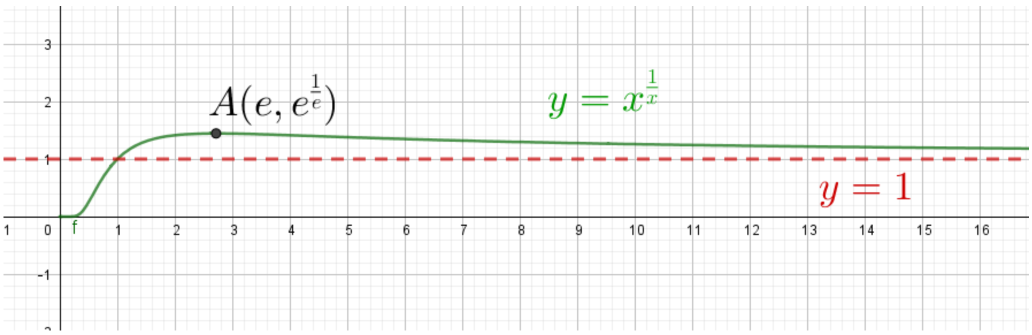
$$\lim_{X\to-\infty} e^X = 0$$

On en déduit donc par composée que :

$$\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{x}} = 0$$

On a donc le tableau de variation suivant et sa courbe :

x	0		e		$+\infty$
$1-ln(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow$	1



---

8) $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$

a) On étudie l'ensemble de définition.

On a :

$$\forall x > 0, f(x) = x^{\frac{1}{x}+1} = e^{\left(\frac{1}{x}+1\right) ln(x)}$$

On en déduit donc que $\mathcal{D}_f =]0; +\infty[$.

b) *f* n'a pas de parité ni de périodicité

Cela vient du fait que l'ensemble de définition n'est pas centré en 0.

c) On étudie les variations de f.

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et :

$$\forall x > 0, f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}ln(x) + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}ln(x)}$$
$$= \frac{1}{x^2}(1 - ln(x) + x)e^{\frac{1}{x}ln(x)}$$

Or on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$$

On en déduit donc que f′ est du signe de 1-ln(x)+x.

On pose :

$$g: \begin{cases}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 - ln(x) + x \end{cases}$$

g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et :

$$\forall x > 0, g'(x) = -\frac{1}{x} + 1 = \frac{x-1}{x}$$

On a donc le tableau suivant :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	2	$\nearrow$	
$g(x)$			$+$		
f			$\nearrow$		

d) Il reste à faire les limites

On sait que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0 \; par\ croissance\ comparée$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{X\to 0}\left(\frac{ln(x)}{x} + ln(x)\right) = +\infty$$

On en déduit donc par composée que :

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}+1} = +\infty$$

De plus on a :

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0^+} ln(x) = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} x = 0^+ \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{ln(x)}{x} = -\infty \; par\ quotient$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(x)}{x} + \ln(x)\right) = -\infty$$

De plus on sait que :

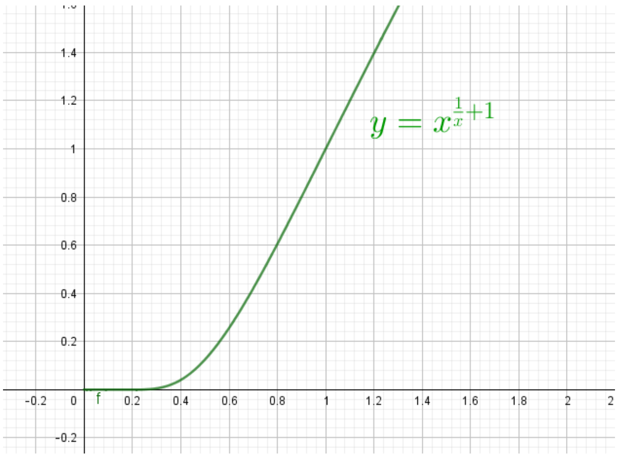
$$\lim_{X\to-\infty} e^X = 0$$

On en déduit donc par composée que :

$$\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{x}} = 0$$

On a donc le tableau de variation suivant et sa courbe :

x	0	1	$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$+\infty$



9) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{2a-x}}$ $\quad (\text{où } a > 0)$

a) On étudie l'ensemble de définition.

On sait que :

$$\mathcal{D}_f = \left\{x \in \mathbb{R}, \frac{x^3}{2a-x} \geq 0\right\}$$

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		0		$2a$		$+\infty$
$2a-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x3}{2a-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

On en déduit donc que :

$$\mathcal{D}_f = [0; 2a[$$

b) f n'a pas de parité ni de périodicité

Cela vient du fait que l'ensemble de définition n'est pas centré en 0.

c) On étudie les variations de f.

On sait que f est dérivable sur]0; 2a[et :

$$\forall x \in]0; 2a[, f'(x) = \frac{3x^2(2a-x) + x^3}{(2a-x)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^3}{2a-x}}}$$

$$= \frac{x^2(3a+2)}{(2a-x)^{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}}} > 0$$

On a donc le tableau de variation suivant :

x	0		$2a$
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	

d) Il reste à faire les limites

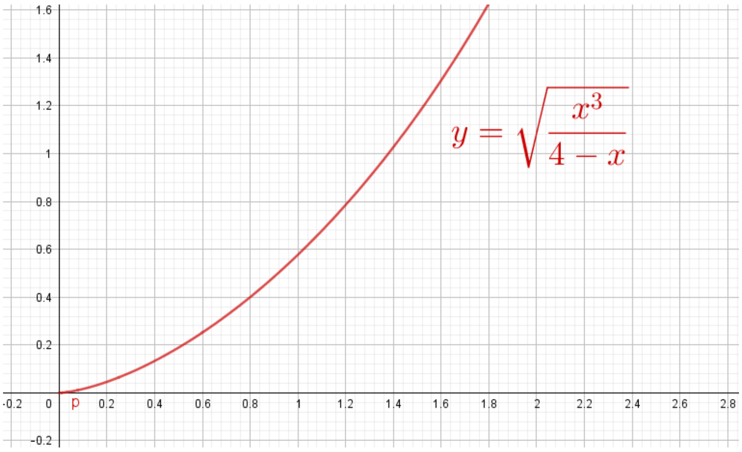
On sait que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2a^-} \dfrac{x^3}{2a-x} = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{cases} \overset{par\ composée}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to 2a^-} \sqrt{\frac{x^3}{2a-x}} = +\infty$$

On a donc :

x	0		$2a$
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

Illustration avec a = 2 :



---

10) $f(x) = \sqrt{x^2 \dfrac{3a-x}{a+x}}$ (où $a > 0$)

a) On étudie l'ensemble de définition.

On sait que :

$$\mathcal{D}_f = \left\{x \in \mathbb{R}, x^2 \frac{3a-x}{a+x} \geq 0\right\} = \mathcal{D}_f = \left\{x \in \mathbb{R}, \frac{3a-x}{a+x} \geq 0\right\}$$

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-a$		$3a$		$+\infty$
$3a-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$a+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{3a-x}{a+x}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

On en déduit donc que :

$$\mathcal{D}_f =]-a; 3a]$$

b) f n'a pas de parité ni de périodicité

Cela vient du fait que l'ensemble de définition n'est pas centré en 0.

c) On étudie les variations de f.

f est dérivable sur $]-a; 3a[$ et :

$$\forall x \in]-a; 3a[, f'(x) = \left(2x \times \frac{3a-x}{a+x} + x^2 \times \frac{-a-x-3a+x}{(a+x)^2}\right) \times \frac{1}{2\sqrt{x^2 \frac{3a-x}{a+x}}}$$

$$= \frac{2x}{(a+x)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{x^2\frac{3a-x}{a+x}}} \times \left((3a-x)(a+x) - 2ax\right)$$

$$= \frac{2x}{(a+x)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{x^2\frac{3a-x}{a+x}}} \times (3a^2 - x^2)$$

On en déduit donc que $f'(x)$ est du signe de $x\left(\sqrt{3}a - x\right)\left(\sqrt{3}a + x\right)$

Or on sait que :

$$\forall x \in]-a; 3a[, x > -a > -\sqrt{3}a$$

On a le tableau suivant :

x	$-a$		0		$\sqrt{3}a$		$3a$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$\sqrt{3}a-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	

De plus on a :

$$f\left(\sqrt{3}a\right) = \sqrt{3a^2 \times \frac{3a - \sqrt{3}a}{a + \sqrt{3}a}} = \sqrt{3}a \times \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}} = \sqrt{3}a\sqrt{2\sqrt{3}-3}$$

d) Il reste à faire les limites

On sait que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -a^+} (3a - x) = 4a \\ \lim\limits_{x\to -a^+} x^2 = a^2 \\ \lim\limits_{x\to -a^+} (a+x) = 0^+ \end{cases} \overset{\textit{par composée et quotient}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to -a^+} f(x) = +\infty$$

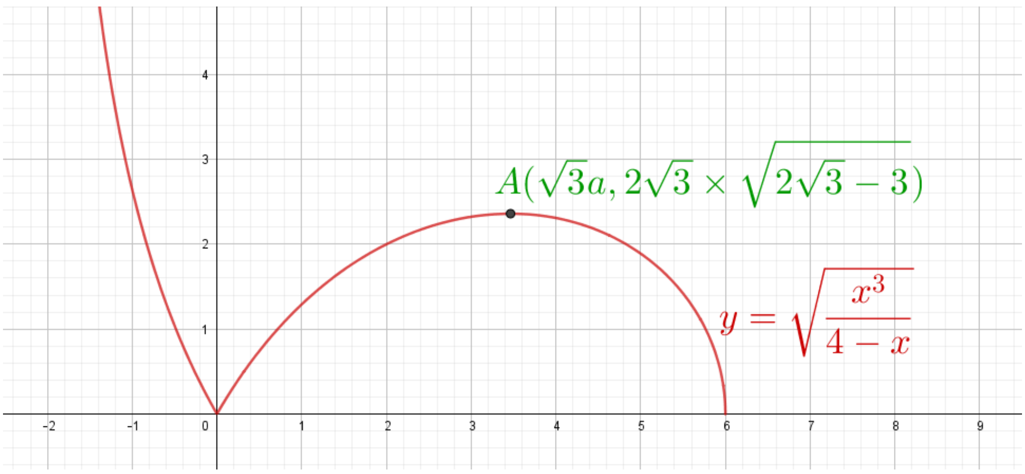
De même on a :

$$f(3a) = 0$$

On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-a$		0		$\sqrt{3}a$		$3a$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{3}a\times\sqrt{2\sqrt{3}-3}$	$\searrow$	0

Illustration avec $a = 2$:



11) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)}$

a) On étudie l'ensemble de définition.

On sait que :

$$\mathcal{D}_f = \left\{x \in \mathbb{R}, \begin{cases} x \neq 0 \\ x(x+2) \geq 0 \end{cases}\right\} =]-\infty; -2] \cup]0; +\infty[$$

b) f n'a pas de parité ni de périodicité

Cela vient du fait que l'ensemble de définition n'est pas centré en 0.

c) On étudie les variations de f.

On sait que f est dérivable sur $]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$ parc composée de fonctions dérivable et :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)} + \frac{x+1}{\sqrt{x(x+2)}}e^{\frac{1}{x}}$$

$$= e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{-(x^2+2x)+x^3+x^2}{x^2\sqrt{x(x+2)}}\right)$$

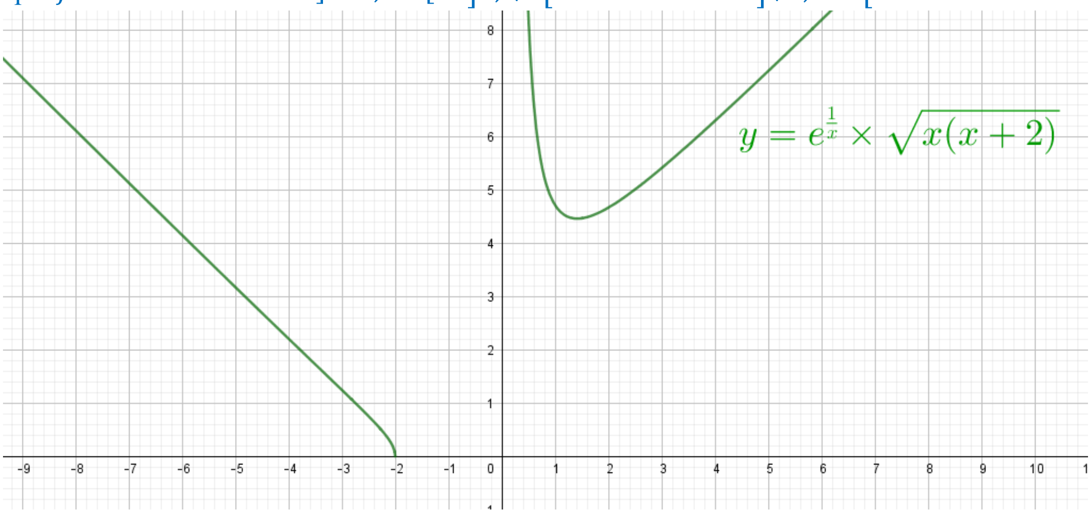
$$= e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2-2}{x\sqrt{x(x+2)}}\right)$$

On en déduit que $f'(x)$ est du signe de $\frac{x^2-2}{x}$

On en déduit que :

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	$+\infty$
$x2-1$	$+$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
x	$-$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x2-1}{x}$	$-$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$

On en déduit que f est décroissante sur $]-\infty; -2[\ \cup\ ]0; \sqrt{2}[$ et croissante sur $]\sqrt{2}; +\infty[$



Partie B : Fonction trigonométrique

Exercice B.1 : Montrer que :

$$\forall\, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$$

1ière inégalité : Montrons que :

$$\forall\, x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x \leq sin(x)$$

On pose :

$$f : \begin{cases} \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{2}{\pi}x - sin(x) \end{cases}$$

On sait que f est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et :

$$\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], f'(x) = \frac{2}{\pi} - cos(x)$$

De plus on sait que :

- cos est continue
- cos est strictement décroissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
- $\cos(0) = 1$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Donc d'après le théorème de la bijection (ou théorème des valeurs intermédiaires), pour tout $y \in [0;1]$, il existe un unique $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ telle que $\cos(x) = y$.

Or on sait que :

$$0 < \frac{2}{\pi} < 1$$

On en déduit donc qu'il existe un unique $\alpha \in]0;1[$ tel que $\cos(\alpha) = \frac{2}{\pi}$

On a donc le tableau de variation suivant :

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$—$\cos(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x - sin(x) \leq 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x \leq sin(x)$$

2ième inégalité : Montrons que :

On pose :

$$g : \begin{cases} \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto sin(x) - x \end{cases}$$

On sait que f est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et :

$$\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], f'(x) = cos(x) - 1 \leq 0$$

On a donc le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$—1		$-$	
g	0	$\searrow$	

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], sin(x) - x \leq 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], sin(x) \leq x$$

Exercice B.2 : Résoudre les équations suivantes, de variable x réelle :

a) $\cos(x) = \frac{1}{2}$ b) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 1$ c) $2\cos(2x) = \sqrt{3}$ d) $2\cos^2(2x) - 3\cos(2x) = -1$

e) $\cos(2x) = \cos(x)$ f) $\sin(2x) + \sin(x) = 0$ g) $\sin(2x) + \sin\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) = 0$ h) $\cos(3x) + \sin(x) = 0$

a) On a :

$$\boldsymbol{cos(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow cos(x) = cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow}$$

h) On veut résoudre :

$$cos(3x) + sin(x) = 0 \Leftrightarrow cos(3x) + cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

On utilise la formule suivante :

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}, cos(x) + cos(y) = -2\,cos\left(\frac{x+y}{2}\right)cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

On a donc :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, cos(3x) + sin(x) = cos(3x) + cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -2\,cos\left(\frac{4x - \frac{\pi}{2}}{2}\right)cos\left(\frac{2x + \frac{\pi}{2}}{2}\right)$$

On a donc :

$$cos(3x) + sin(x) = 0 \Leftrightarrow cos\left(\frac{4x - \frac{\pi}{2}}{2}\right)cos\left(\frac{2x + \frac{\pi}{2}}{2}\right) = 0$$

Or on sait que :

$$cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,; k \in \mathbb{Z}$$

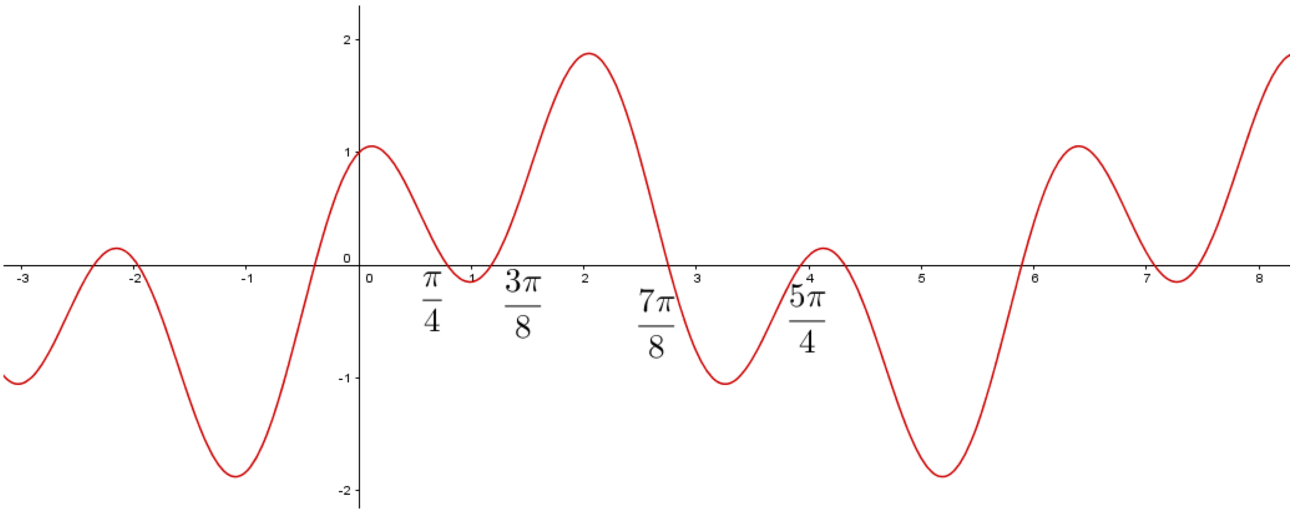
On a donc :

$$cos\left(\frac{4x - \frac{\pi}{2}}{2}\right)cos\left(\frac{2x + \frac{\pi}{2}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4x - \frac{\pi}{2}}{2} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \dfrac{2x + \frac{\pi}{2}}{2} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} ;\ k \in \mathbb{Z}$$

On en déduit donc que :

$$cos(3x) + sin(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$$



Exercice B.3 : Résoudre les inéquations suivantes, de variable x réelle :

$$a)\ cos(x) > 0 \qquad b)\ sin(x) \leq \frac{1}{2} \qquad c)\ tan(x) > \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad d)\ sin^2(x) \geq \frac{1}{4}\quad sur\ [\pi;\pi]$$

a) On sait que :

$$cos(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[$$

b) De même on a :

$$sin(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right[$$

c) De même on a :

$$tan(x) > \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$$

d) On a :

$$sin^2(x) \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(sin(x) - \frac{1}{2}\right)\left(sin(x) + \frac{1}{2}\right) \geq 0$$

On fait un tableau de signe :

x	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		$+\infty$
$\sin(x) - \frac{1}{2}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\sin(x) + \frac{1}{2}$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} sin^2(x) \geq \frac{1}{4} \\ x \in [-\pi;\pi] \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$$

Exercice B.4 : Déterminer le domaine de définition et la dérivée de :

$$f(x) = (1 + sin(x))^{cos(x)}$$

On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 + sin(x) \geq 0$$

On doit juste prendre des précautions pour $\sin(x) = 0$.
On a donc :

$$\mathcal{D}_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[$$

De plus on a :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) = (1 + sin(x))^{cos(x)} = e^{cos(x)\, ln(1+sin(x))}$$

On en déduit donc que f est dérivable sur son ensemble de définition comme quotient de fonctions dérivables et :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f'(x) = \left(-sin(x) \times ln(1 + sin(x)) + \frac{cos^2(x)}{1 + sin(x)}\right) e^{cos(x)\, ln(1+sin(x))}$$

Exercice B.5 : Etudier la fonction : $f : x \mapsto cos(x) - cos^2(x)$

1) On étudie son ensemble de définition.

Ici il n'y a aucune difficulté ! $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

2) On étudie sa parité et sa périodicité

On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, f(x + 2\pi) &= cos(x + 2\pi) - cos^2(x + 2\pi)\\ &= cos(x) - cos^2(x)\\ &= f(x)\end{aligned}$$

Donc f est 2π −périodique, on peut donc l'étudier sur un intervalle de longueur 2π, comme $[-\pi; \pi]$.

De plus on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = cos(-x) - cos^2(-x) = cos(x) - cos^2(x) = f(x)$$

Donc f est paire. On peut donc étudier f sur $[0; \pi]$ puis prolonger sa courbe (ou ses variations) sur $[-\pi; \pi]$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, puis par périodicité !

3) Etude des variations

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\sin(x) + 2\cos(x)\sin(x) = \sin(x)\,(2\cos(x) - 1)$$

On sait que :

$$\forall x \in [0; \pi], \sin(x) \geq 0$$

On en déduit donc que le signe de $f'(x)$ sur $[0; \pi]$ est le même que celui de $2\cos(x) - 1$.
On a :

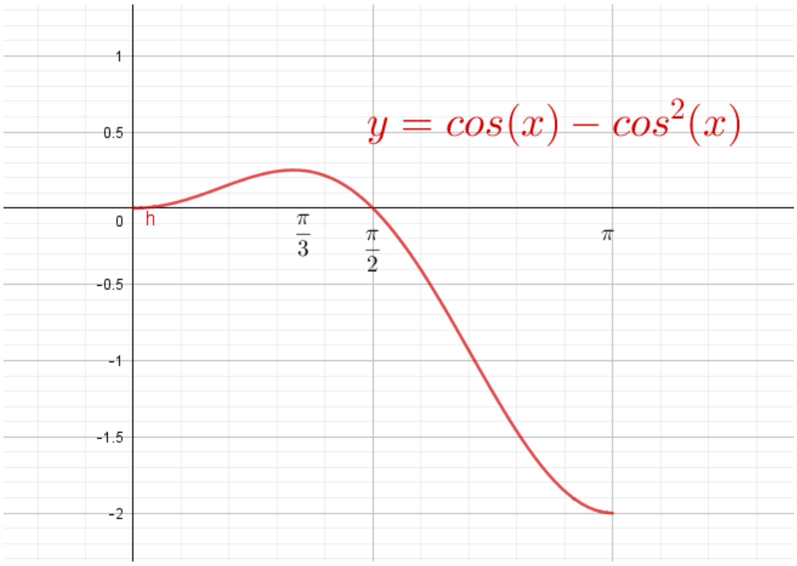
$$\begin{cases} 2\cos(x) - 1 > 0 \\ x \in [0; \pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x) > \frac{1}{2} \\ x \in [0; \pi] \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$$

On a alors le tableau de variations suivant :

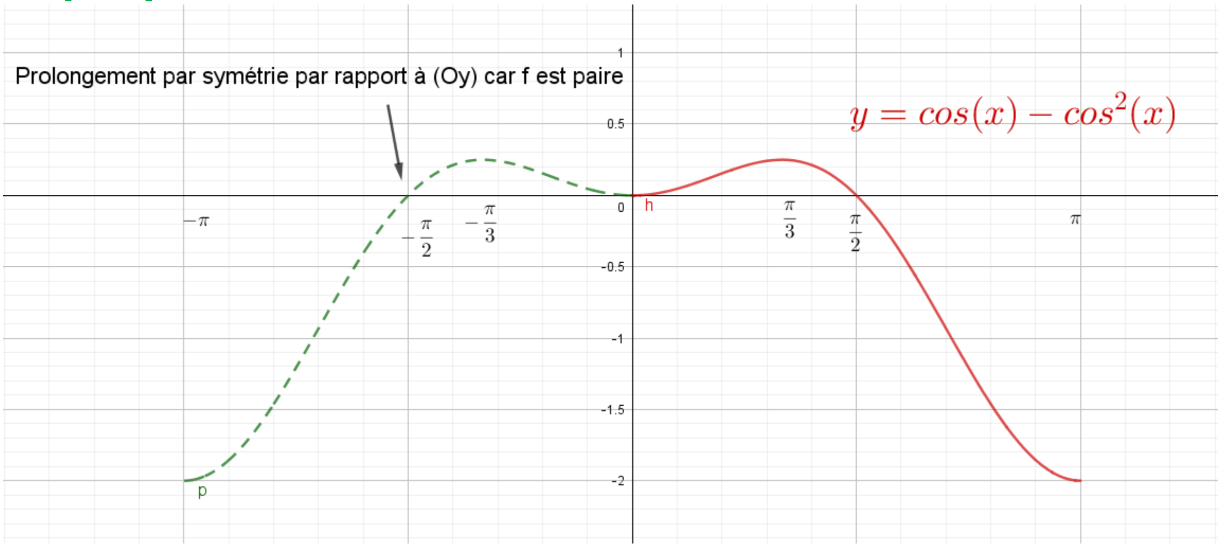
x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	-2

On peut alors tracer la courbe de f en trois étapes :

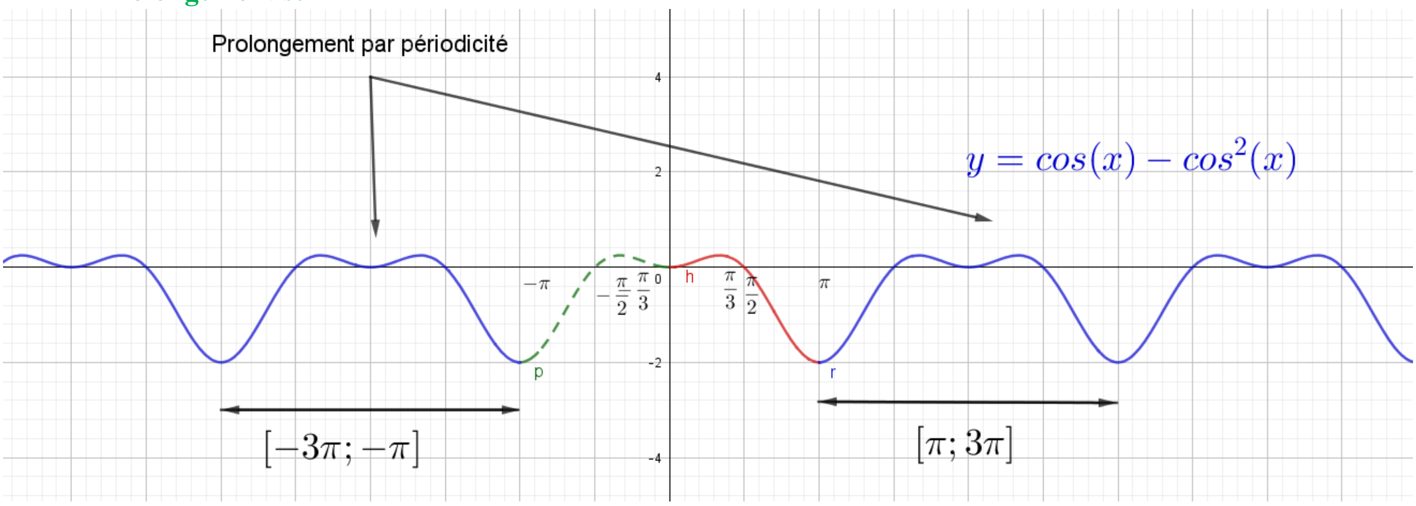
- **Sur $[0; \pi]$:**



- **Sur $[-\pi ; \pi]$**



- **Prolongement sur $\mathbb{R}$**



Partie C : Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice C.1 : Simplifier les expressions suivantes :

$a)\ arccos\left(cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ $b)\ arccos(cos(4\pi))$ $c)\ arccos\left(cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ $d)\ arctan\left(tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

$e)\ cos(arctan(x))\ , x \in \mathbb{R}$ $f)\ sin(3\,arctan(x))\ , x \in \mathbb{R},$ $g)\ tan(arcsin(x))\ x \in]-1; 1[$

$h)\ arccos(x) + arccos(-x)\,, x \in [-1;1]$ $\quad$ $i)\ arctan(1/2) + arctan(1/5) + arctan(1/8)$

On a :

$$a)\ arccos\left(cos\underbrace{\left(\frac{2\pi}{3}\right)}_{\in[0;\pi]}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$b)\ arccos(cos(4\pi)) = arccos\left(cos\underbrace{(0)}_{\in[0;\pi]}\right) = 0$$

$$c)\ arccos\left(cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = arccos\left(cos\underbrace{\left(\frac{2\pi}{3}\right)}_{\in[0;\pi]}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$d)\ arctan\left(tan\underbrace{\left(\frac{3\pi}{4}\right)}_{\notin\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[}\right) = arctan\left(tan\underbrace{\left(-\frac{\pi}{4}\right)}_{\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

$e)\ \forall\, x \in \mathbb{R}, arctan(x)\ \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\Longrightarrow cos(\,arctan(x)) \in\ ]0;1]$

De plus on sait que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, 1 + tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$$
$$\Longrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}, cos^2(x) = \frac{1}{1 + tan^2(x)}$$
$$\Longrightarrow cos^2(\,arctan(x)) = \frac{1}{1 + tan^2(arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}\ car\ \forall\, x \in \mathbb{R}, tan(arctan(x)) = x$$

De plus on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, arctan(x)\ \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\Longrightarrow cos(\,arctan(x)) \in\ ]0;1]$$
$$\Longrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}, cos(arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

f) On linéarise. On sait d'après la formule de Moivre que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, sin(3x) = Im((cos(x) + i\,sin(x))^3)$$
$$= Im\big(cos^3(x) + 3i\,cos^2(x)\,sin(x) - 3cos(x)\,sin^2(x) - isin^3(x)\big)$$
$$= 3\,cos^2(x)\,sin(x) - sin^3(x)$$

On en déduit donc que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, sin(3\,arctan(x)) = 3\,cos^2(arctan(x))\,sin(arctan(x)) - sin^3(arctan(x))$$

Or on sait d'après la question précédente que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, cos(arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

De plus on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, sin(arctan(x)) = tan(arctan(x))\,cos(arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

On a donc :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, sin(3\,arctan(x)) = \frac{3x}{\sqrt{1 + x^2}} \times \frac{1}{1 + x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^2}^3} = \frac{3x - x^3}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}}$$

g) On a :

$$\forall\, x \in]-1;1[, tan(arcsin(x)) = \frac{sin(arcsin(x))}{cos(arcsin(x))} = \frac{x}{cos(arcsin(x))}$$

Or on sait que :

$$\forall\, x \in]-1;1[, arcsin(x) \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow cos(arcsin(x)) > 0$$
$$\Rightarrow cos(arcsin(x)) = \sqrt{1-sin^2(arcsin(x))} = \sqrt{1-x^2}$$

On a donc :

$$\forall\, x \in]-1;1[, tan(arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

h) On peut dériver l'expression en posant une fonction. On pose :

$$\forall\, x \in [-1;1], f(x) = arccos(x) + arccos(-x)$$

On en déduit que f est dérivable sur $]-1;1[$ et :

$$\forall\, x \in]-1;1[, f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-(-1)}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Donc $\forall$ x $\in]-1;1[$, f(x) = cste = 2f(0) = π

On en déduit donc que :

$$\forall\, x \in]-1;1[, arccos(x) + arccos(-x) = \pi$$

Or on a :

$$f(-1) = f(1) = arccos(-1) + arccos(1) = \pi + 0 = \pi$$

On a donc :

$$\forall\, x \in [-1;1], arccos(x) + arccos(-x) = \pi$$

i) On pose :

$$I = arctan\left(\frac{1}{2}\right) + arctan\left(\frac{1}{5}\right) + arctan\left(\frac{1}{8}\right)$$

On sait que arctan est croissante sur $\mathbb{R}$ et :

$$artan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$$

De plus on sait que :

$$0 < \frac{1}{8} < \frac{1}{5} < \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

On en déduit donc que :

$$0 < arctan\left(\frac{1}{8}\right) < arctan\left(\frac{1}{5}\right) < arctan\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{\pi}{6}$$

On en déduit donc que I $\in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

De plus on sait que :

$$\forall (a,b) \in \mathcal{D}_{tan}^2 tq\, tan(a)\, tan(b) \neq 1, tan(a+b) = \frac{tan(a) + tan(b)}{1 - tan(a)\, tan(b)}$$

On en déduit donc que :

$$tan(I) = \frac{tan\left(arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) + tan\left(arctan\left(\frac{1}{5}\right) + arctan\left(\frac{1}{8}\right)\right)}{1 - tan\left(arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) tan\left(arctan\left(\frac{1}{5}\right) + arctan\left(\frac{1}{8}\right)\right)}$$

De plus on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, tan(arctan(x)) = x$$

On a donc :

$$tan\left(arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\ et\ tan\left(arctan\left(\frac{1}{5}\right) + arctan\left(\frac{1}{8}\right)\right) = \frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{40}} = \frac{13}{39} = \frac{1}{3}$$

On en déduit donc que :

$$tan(I) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}} = 1 = tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Comme I $\in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et qua tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$, on a alors :

$$I = arctan\left(\frac{1}{2}\right) + arctan\left(\frac{1}{5}\right) + arctan\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$$

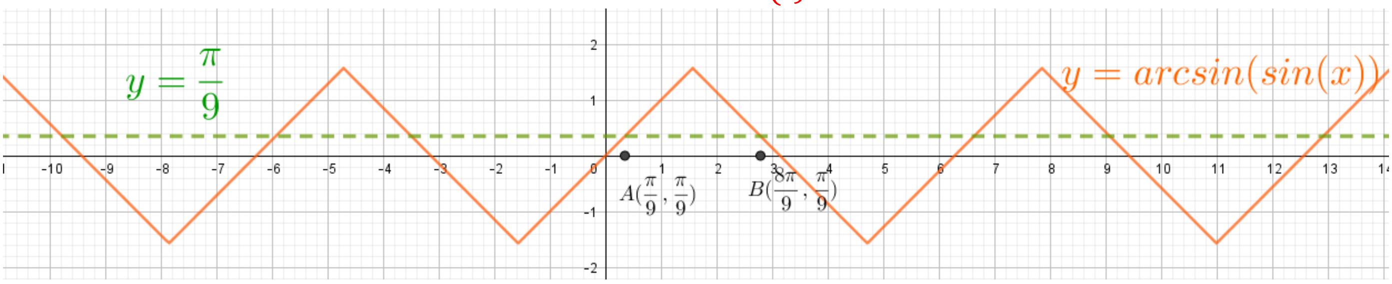
Exercice C.2 : Résoudre les équations suivantes, de variable x réelle :
1) $arcsin(sin(x)) = \frac{\pi}{9}$ 2) $arccos(x) = arcsin(x)$ 3) $arccos(x) = arcsin(2x)$ 4) $arccos(x) = arcsin(1-x)$
5) $2\,arcsin(x) = arccos(|2x^2-1|)$ 6) $arcsin(x) + arcsin\left(\frac{x}{2}\right) = \pi$ 7) $2\,arcsin(x) = arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$
8) $arcsin(2x) - arcsin\left(x\sqrt{3}\right) = arcsin(x)$ 9) $arctan(x-1) + arctan(x) + arctan(x+1) = \frac{\pi}{2}$

1) $arcsin(sin(x)) = \frac{\pi}{9}$
Domaine de validité : $\mathbb{R}$
En effet :
$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) \in [-1;1] \Longrightarrow$ $\mathbb{R}$ est le domaine de validité.
On sait que :

$$\forall (k,k') \in \mathbb{Z}^2, arcsin(sin(x)) = \frac{\pi}{9} = arcsin\left(sin\left(\frac{\pi}{9} + 2k\pi\right)\right) = arcsin\left(sin\left(\frac{8\pi}{9} + 2k'\pi\right)\right)$$

On en déduit donc que :

$$arcsin(sin(x)) = \frac{\pi}{9} \Leftrightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{9} + 2k\pi \\ \quad ou \\ \frac{8\pi}{9} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$



2) $arccos(x) = arcsin(x)$
Domaine de validité : $[-1;1]$
En effet c'est le domaine de définition de arcsin et arccos.

On sait que :

$$\forall x \in [-1;1], cos(arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

De plus on sait que :

$$\begin{aligned} arccos(x) = arcsin(x) &\Longrightarrow cos(arccos(x)) = cos(arcsin(x)) \\ &\Longrightarrow x = \sqrt{1-x^2} \\ &\Longrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \\ &\Longrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}\, ou\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Comme on a procédé à des implications, il reste à voir si les résultats finaux sont solutions :

$$arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}\ et\ arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

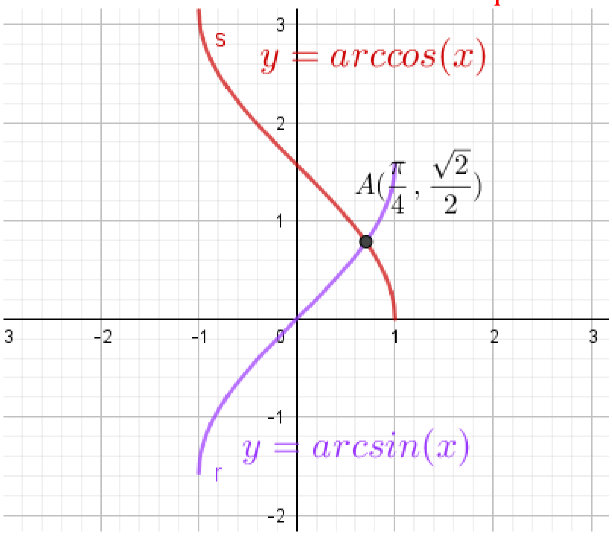
Donc $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ est solution.
De même on a :

$$arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}\ et\ arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

Donc $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ n'est pas solution.

On en déduit donc que :

$$\arccos(x) = \arcsin(x) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$



3) $\arccos(x) = \arcsin(2x)$

Domaine de validité : $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$

En effet c'est le domaine de définition de $x \mapsto \arcsin(2x)$

On a :

$$arccos(x) = arcsin(2x)$$
$$\Rightarrow cos(arccos(x)) = cos(arcsin(2x))$$
$$\Rightarrow x = \sqrt{1-(2x)^2}$$
$$\Rightarrow 5x^2 = 1$$
$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{5} ou\ x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Comme on a procédé à des implications, il reste à voir si les résultats finaux sont solutions :

$$-\frac{\sqrt{5}}{5} < 0 \Rightarrow arcsin(2x) < 0. Or\ arccos(x) \geq 0$$

On en déduit donc que $x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ n'est pas solution.

On a donc une unique solution $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ou aucune.

On pose :

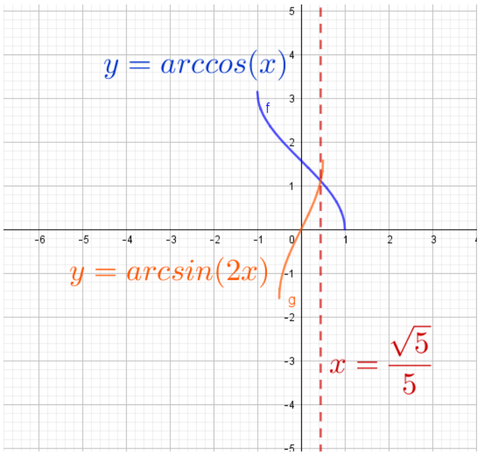
$$f: x \mapsto \arccos(x) - \arcsin(2x)$$

On a : $f(0) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}\ et\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} < 0$

Donc f est continue et change de signe. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel α tel que $f(\alpha) = 0$.

On en déduit donc que :

$$arccos(x) = arcsin(2x) \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{5}$$



4) $arccos(x) = arcsin(1 - x)$

Domaine de validité : $[\mathbf{0}; \mathbf{1}]$

En effet :

$$-1 \leq 1 - x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$$

On en déduit donc que le domaine de validité est : $[0; 2] \cap [-1; 1] = [0; 1]$.

On a :

$$arccos(x) = arcsin(1 - x)$$
$$\Rightarrow x = cos(arcsin(1 - x)) = \sqrt{1 - (1 - x)^2}$$
$$\Rightarrow x^2 = 2x - x^2$$
$$\Rightarrow x = 0 \text{ } ou \text{ } x = 1$$

Comme on a procédé à des implications, il reste à voir si les résultats finaux sont solutions :

$$arccos(0) = \frac{\pi}{2} \text{ } et \text{ } arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

Donc $x = 0$ est solution.

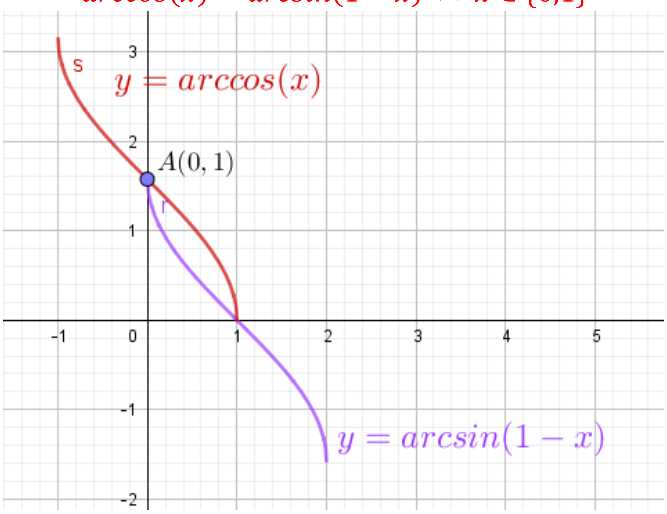
De même on a :

$$arccos(1) = 0 \text{ } et \text{ } arcsin(0) = 0$$

Donc $x = 1$ est pas solution.

On en déduit donc que :

$$arccos(x) = arcsin(1 - x) \Leftrightarrow x \in \{0,1\}$$



5) $2\,arcsin(x) = arccos(|2x^2 - 1|)$

Domaine de validité : $[-\mathbf{1}; \mathbf{1}]$

En effet :

$$-1 \leq 2x^2 - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

On a :

$$2\,arcsin(x) = arccos(|2x^2 - 1|)$$
$$\Rightarrow cos(2\,arcsin(x)) = |2x^2 - 1|$$

Or on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, cos(2x) = 2\,cos^2(x) - 1$$

On en déduit donc que :

$$cos(2\,arcsin(x)) = |2x^2 - 1| = 2(1 - x^2) - 1$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} 2\,arcsin(x) &= arccos(|2x^2 - 1|) \\ &\Longrightarrow 1 - 2x^2 = |2x^2 - 1| \\ &\Longrightarrow 2x^2 - 1 \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \end{aligned}$$

Comme on a procédé à des implications, il reste à voir si les résultats finaux sont solutions :
On sait que :

$$\forall x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right[, arcsin(x) < 0\ et\ arccos(x) \geq 0$$

Donc l'intervalle $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right[$ n'est pas solution.
Il reste à voir les solutions sur $\left[0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. On veut montrer que :

$$\forall x \in \left[0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right], 2\,arcsin(x) = arccos(1 - 2x^2)$$

On peut le faire de plusieurs façons.
Méthode 1 : A l'aide d'une fonction
On pose :

$$f : x \mapsto 2\,arcsin(x) - arccos(1 - 2x^2)$$

f est dérivable sur $\left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \left[0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right], f'(x) &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + (-4x)\frac{1}{\sqrt{1-(1-2x^2)^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4x}{\sqrt{4x^2-4x^4}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2x}{|x|\sqrt{1-x^2}} \\ &= 0\ car\ x \geq 0 \end{aligned}$$

On en déduit donc que f est constante. De plus $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0$.
Parc continuité, on en déduit donc que :

$$\forall x \in \left[0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right], 2\arcsin(x) = \arccos(1 - 2x^2)$$

Méthode 2 : Avec un changement de variable
On sait que :

$$\forall x \in \left[0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right], \exists!\,\theta \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right], x = sin(\theta)$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \left[0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right], arccos(1 - 2x^2) = arccos(1 - 2\,sin^2(\theta)) = arccos(cos(2\theta))$$

Or on sait que :

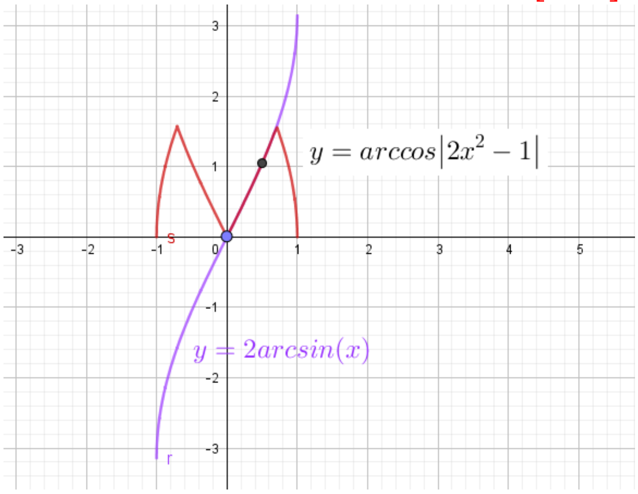
$$\forall t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], arccos(cos(x)) = x$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \left[0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right], arccos(1 - 2x^2) = arccos(cos(2\theta)) = 2\theta = 2\,arcsin(x)$$

On en déduit donc que :

$$2\,arcsin(x) = arccos(|2x^2 - 1|) \Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$



6) $arcsin(x) + arcsin\left(\frac{x}{2}\right) = \pi$

Domaine de validité : $[-1; 1]$

En effet : $\mathcal{D}_{x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)} = [-2; 2]$.

On a :

$$arcsin(x) + arcsin\left(\frac{x}{2}\right) = \pi$$

On sait que :

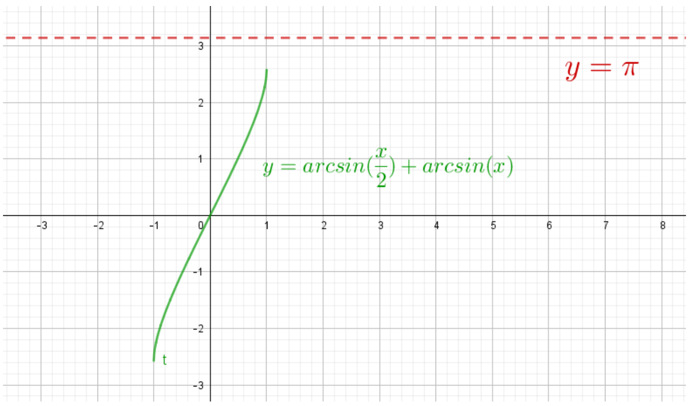
$$\forall x \in [-1; 1], arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

On en déduit donc que :

$$\forall (x, y) \in [-1; 1]^2, arcsin(x) + arcsin(y) = \pi \Leftrightarrow x = y = 1$$

On en déduit donc que :

$$arcsin(x) + arcsin\left(\frac{x}{2}\right) = \pi \Leftrightarrow x = \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$



7)$2\,arcsin(x) = arcsin\left(2x\sqrt{1 - x^2}\right)$

Domaine de validité : $[-1; 1]$

En effet : $\mathcal{D}_{x \mapsto \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})} = [-1; 1]$.

On sait que :

$$2\,arcsin(x) = arcsin\left(2x\sqrt{1 - x^2}\right)$$

$$\Longrightarrow sin(2\,arcsin(x)) = sin\left(arcsin\left(2x\sqrt{1 - x^2}\right)\right) = 2x\sqrt{1 - x^2}$$

Or on sait que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, sin(2\theta) = 2\,sin(\theta)\,cos(\theta)$$

On en déduit donc que :

$$sin(2\,arcsin(x)) = 2xcos(arcsin(x)) = 2x\sqrt{1 - x^2}$$

Cela ne nous avance donc à rien ! Il faut trouver autre chose.
On sait que : $\forall x \in [-1;1], \exists! \, \theta \in [0;\pi], x = \cos(\theta)$
On en déduit donc que :

$$\forall x \in [-1;1], \exists! \, \theta \in [0;\pi], arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = arcsin\left(2\cos(\theta)\sqrt{1-\cos^2(\theta)}\right)$$
$$= arcsin(2\cos(\theta) \times |sin(\theta)|)$$

Or on sait que :

$$\forall \theta \in [0;\pi], sin(\theta) \geq 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in [-1;1], \exists! \, \theta \in [0;\pi], arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = arcsin(2\cos(\theta)\sin(\theta)) = arcsin(sin(2\theta))$$

Or on sait que :

$$\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], arcsin(sin(x)) = x$$
$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right], arcsin(sin(x)) = arcsin(sin(\pi - x)) = \pi - x$$
$$\forall x \in \left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right], arcsin(sin(x)) = arcsin(sin(x - 2\pi)) = x - 2\pi$$

On en déduit donc que :

$$arcsin(sin(2\theta)) = \begin{cases} 2\theta \; si \; \theta \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right] \\ \pi - 2\theta \; si \; \theta \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right] \\ 2\theta - 2\pi \; si \; \theta \in \left[\frac{3\pi}{4};\pi\right] \end{cases}$$

De plus on a :

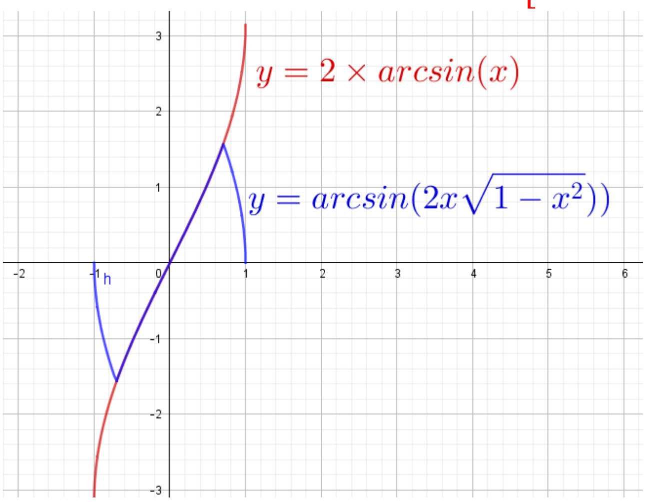
$$\forall \theta \in [0;\pi], arcsin(cos(\theta)) = arcsin\left(sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \theta \; car \; \frac{\pi}{2} - \theta \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in [-1;1], 2\,arcsin(x) = \pi - 2\,arccos(x)$$
$$\forall x \in [-1;1], arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = \begin{cases} 2\,arccos(x) \; si \; x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right] \\ \pi - 2\,arccos(x) \; si \; x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ 2\,arccos(x) - 2\pi \; si \; x \in \left[-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$2\,arcsin(x) = arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$



8) $arcsin(2x) - arcsin(x\sqrt{3}) = arcsin(x)$

Domaine de validité : $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$

En effet : $\mathcal{D}_{x\mapsto \arcsin(2x)} = \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ et $\mathcal{D}_{x\mapsto \arcsin(\sqrt{3}x)} = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

On a :

$$arcsin(2x) - arcsin(x\sqrt{3}) = arcsin(x)$$
$$\Longrightarrow sin\left(arcsin(2x) - arcsin(x\sqrt{3})\right) = x$$
$$\Longrightarrow 2xcos\left(arcsin(x\sqrt{3})\right) - cos(arcsin(2x))\,x\sqrt{3} = x$$
$$\Longrightarrow x\left(2\sqrt{1-3x^2} - \sqrt{1-4x^2}\sqrt{3} - 1\right) = 0$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ou \\ 2\sqrt{1-3x^2} - \sqrt{1-4x^2}\sqrt{3} = 1 \end{cases}$$

On résout :

$$2\sqrt{1-3x^2} - \sqrt{1-4x^2}\sqrt{3} = 1$$
$$\Longrightarrow 2\sqrt{1-3x^2} = 1 + \sqrt{1-4x^2}\sqrt{3}$$
$$\Longrightarrow 4(1-3x^2) = 1 + 3(1-4x^2) + 2\sqrt{3}\sqrt{1-4x^2}$$
$$\Longrightarrow 0 = \sqrt{1-4x^2}$$
$$\Longrightarrow x \in \left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$$

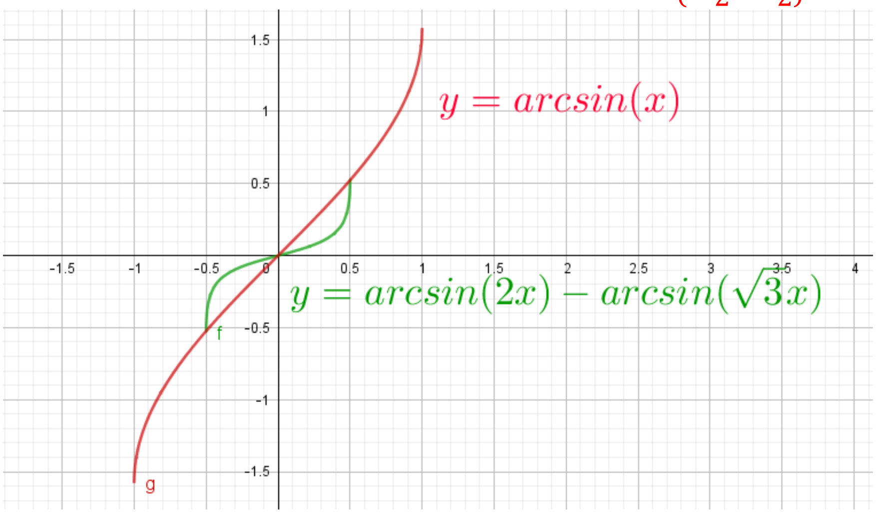
Comme on a procédé à des implications, il reste à voir si les résultats finaux sont solutions :
$x = 0$ est solution car $\arcsin(0) = 0$.
De même on a :

$$\begin{cases} arcsin(1) - arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \\ arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Longrightarrow x = \frac{1}{2}\ est\ solution$$

$$\begin{cases} arcsin(-1) - arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} \\ arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{3} \end{cases} \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}\ est\ solution$$

On en déduit donc que :

$$arcsin(2x) - arcsin(x\sqrt{3}) = arcsin(x) \Longleftrightarrow x \in \left\{-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right\}$$



9) $arctan(x-1) + arctan(x) + arctan(x+1) = \frac{\pi}{2}$

Domaine de validité : $\mathbb{R}$ **(c'est le domaine de définition de arctan)**

On sait que $x \mapsto \arctan(x)$ est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$ donc $f: x \mapsto \arctan(x-1) + \arctan(x) + \arctan(x+1)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et continue.
De plus on a :

$$f(0) = 0 \ et \ \lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{3\pi}{2}$$

On en déduit donc qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = \frac{\pi}{2}$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires.
De plus on sait que :

$$\forall x \geq 0, tan(arctan(x-1) + arctan(x+1)) = \frac{2x}{1-(x^2-1)} = \frac{2x}{2-x^2}$$

De plus on a :

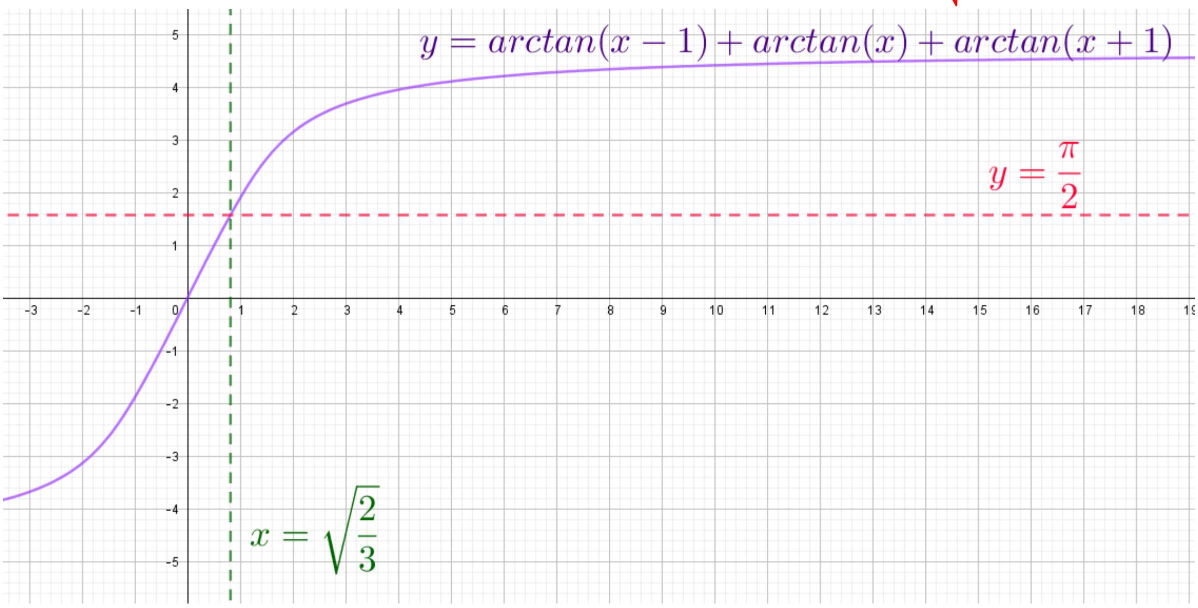
$$\forall x > 0, tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{tan(x)}$$

On en déduit donc que :

$$arctan(x-1) + arctan(x) + arctan(x+1) = \frac{\pi}{2}$$
$$\Longrightarrow tan(arctan(x-1) + arctan(x+1)) = tan\left(\frac{\pi}{2} - arctan(x)\right)$$
$$\Longrightarrow \frac{2x}{2-x^2} = \frac{1}{x}$$
$$\Longrightarrow x^2 = \frac{2}{3}$$
$$\Longrightarrow x \in \left\{\sqrt{\frac{2}{3}}; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$$

Comme on sait que l'équation $\arctan(x-1) + \arctan(x) + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2}$ admet une unique racine, et que cette racine est positive, on en déduit que :

$$arctan(x-1) + arctan(x) + arctan(x+1) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}}$$



Exercice C.3 : Après avoir précisé le domaine de validité, montrer les formules :

1) $arcsin(x) + arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ 2) $2\,arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) + arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$

3) $arcsin(x) = arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ 4) $2\,arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) + arctan(x) = \frac{\pi}{2}$

1) On pose $f : x \mapsto \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$
D'après les ensembles de définition de arcsin et arccos on a $\mathcal{D}_f = [-1;1]$. De plus f est dérivable sur $]-1;1[$ et :

$$\forall x \in]-1;1[, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in]-1;1[, f(x) = cste = f(0) = \frac{\pi}{2}$$

Par continuité de f on en déduit que :

$$\forall x \in [-1;1], arcsin(x) + arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$

---

2) On pose :

$$f : x \mapsto 2\, arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) + arcsin(x)$$

On sait que $\mathcal{D}_{\text{arcsin}} = [-1;1]$. De plus on a :

$$\forall x \in]-1;1], \frac{1-x}{1+x} \geq 0$$

On en déduit donc que $\mathcal{D}_f =]-1;1]$.
De plus on a f *dérivable sur* $]-1;1[$ *et :*

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1;1[, f'(x) &= 2 \times \frac{\frac{-1-x-(1-x)}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \times \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{1-x} \times \sqrt{1+x}} \times \frac{1}{1+x+1-x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= 0\end{aligned}$$

On en déduit donc que f est constante sur $]-1;1]$ par continuité.
De plus on a :

$$f(1) = 2\, arctan(0) + arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in]-1;1], 2\, arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) + arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$$

---

3) On pose :

$$f : x \mapsto arcsin(x) - arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

On sait que $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ est définie si et seulement si $x^2 - 1 < 0$ ce qui implique que $x \in]-1;1[$.
De même on sait que $\mathcal{D}_{\text{arcsin}} = [-1;1]$ et son domaine de dérivabilité $]-1;1[$. On en déduit que f est définie et dérivable sur $]-1;1[$ et :

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1;1[, f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \times \frac{1}{1+\frac{x^2}{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= 0\end{aligned}$$

On en déduit donc que f est constante sur $]-1;1[$.

De plus on a :

$$f(0) = arcsin(0) - arctan(0) = 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in]-1;1[, arcsin(x) = arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

---

d) On pose :

$$f: x \mapsto 2\arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) + \arctan(x)$$

On sait que $\mathcal{D}_{\arctan} = \mathbb{R}$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2 \times \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1\right) \times \frac{1}{1+\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^2} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$= 2 \times \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{1 - 2x\sqrt{1+x^2} + x^2 + 1 + x^2} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{1 + x^2 - x\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$= -\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$= 0$$

On en déduit donc que f est constante sur $\mathbb{R}$.

De plus $f(0) = 2\,arctan(1) = \frac{\pi}{2}$.

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2\,arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) + arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

Exercice C.4 : Etudier la fonction $f : x \mapsto arccos(cos(3x))$

La fonction f : x ↦arccos(cos(3x)) est définie sur $\mathbb{R}$ car :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, cos(3x) \in [-1;1]$$

De plus on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = arccos\left(cos\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right)\right) = arccos\,(cos(3x + 2\pi)) = arccos(cos(3x)) = f(x)$$

Donc f est $\frac{2\pi}{3}$ −périodique. On peut donc l'étudier sur un intervalle de longueur $\frac{2\pi}{3}$. Par exemple :

$$I = \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$$

De plus on voit que :

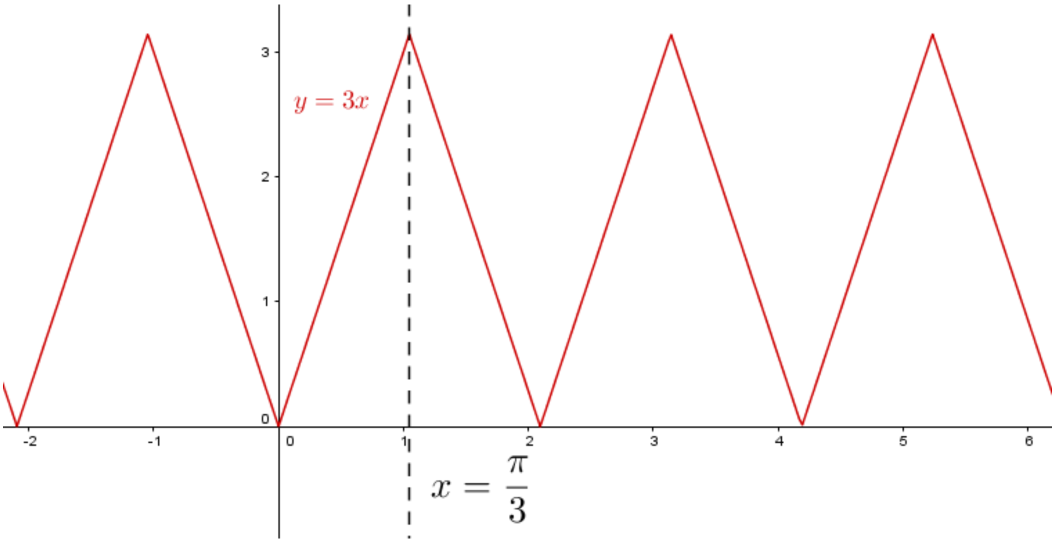
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f(-x) = arccos\big(cos\big(3(-x)\big)\big) = arccos(cos(3x)) = f(x)$$

Donc f est paire donc sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. On peut donc étudier f sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

Or on sait que :

$$\forall\, x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right], 3x \in [0;\pi] \Longrightarrow \forall\, x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right], f(x) = arccos(cos(3x)) = 3x$$

Donc f est linéaire sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$. Il suffit ensuite de prolonger par symétrie et périodicité :



Exercice C.5 : Etudier la fonction $f : x \mapsto sin(2\,arctan(x))$

$$g(x) = sin(2\,arctan(x))$$

On a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, g(-x) = sin(2\,arctan(-x)) = sin(-2\,arctan(x)) = -\,sin(2\,arctan(x))$$

Donc g est impaire.
On peut donc étudier g sur [0 ;+∞[.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{2}{1+x^2} cos(2\,arctan(x))$$

Or on sait que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \frac{2}{1+x^2} > 0$$

On en déduit donc que $g'(x)$ est du signe de $\cos(2\arctan(x))$
Or on sait que :

$$\forall\, x \in [0; +\infty[, arctan(x) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\Longrightarrow 2\,arctan(x) \in [0; \pi[$$

On a le tableau suivant :

x	0		1		$+\infty$
$2arctan(x)$	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos(2arctan(x))$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

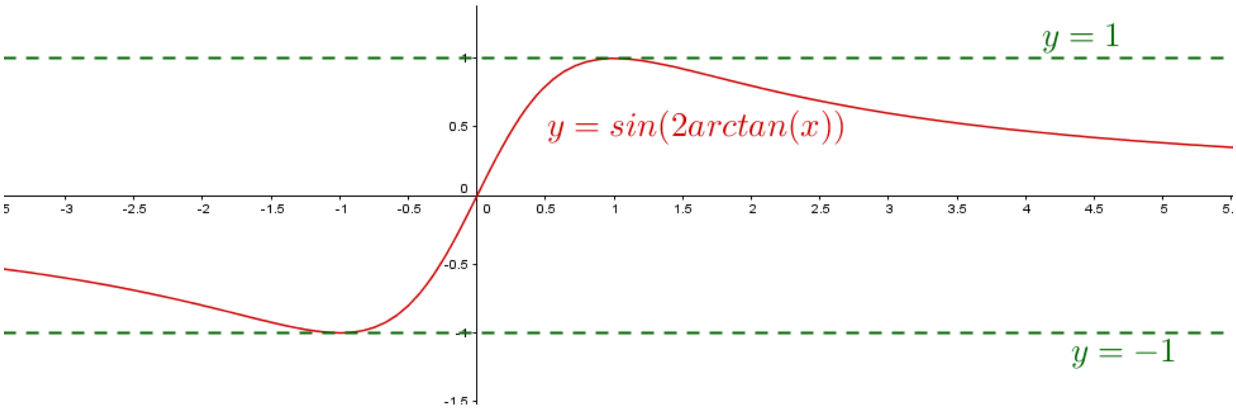
Remarque :
On a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} 2\,arctan(x) = \pi \\ \lim\limits_{x \to \pi} sin(2\,arctan(x)) = 0 \end{cases}$$

De plus on a :

$$g(1) = sin(2\,arctan(1)) = sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

On a donc la courbe suivante :



Exercice C.6 : Déterminer le domaine de dérivabilité des fonctions suivantes et calculer leurs dérivées.

$$f(x) = arcsin\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad ; g(x) = arctan\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

a) On sait que $\mathcal{D}_{\text{arcsin}} = [-1; 1]$. De plus arcsin est dérivable sur $]-1; 1[$.
On a donc :

$$\mathcal{D}_f = \left\{x \in \mathbb{R}, -1 \leq \frac{1+x}{1-x} \leq 1\right\}$$

On étudie les deux inégalités séparemment :

$$\begin{aligned} & -1 \leq \frac{1+x}{1-x} \\ \Leftrightarrow & \frac{1+x}{1-x} + 1 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{2}{1-x} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 1 - x > 0 \\ \Leftrightarrow & x < 1 \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} & -1 \leq \frac{1+x}{1-x} \\ \Leftrightarrow & x \in]-\infty; 1[\end{aligned}$$

De même on a :

$$\begin{aligned} 1 \geq \frac{1+x}{1-x} & \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} - 1 \leq 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{2x}{1-x} \leq 0 \end{aligned}$$

On peut faire un tableau de signe :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{2x}{1-x}$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

On en déduit donc que :

$$1 \geq \frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow x \in]-\infty; 0] \cup]1; +\infty[$$

On en déduit donc que :

$$\mathcal{D}_f =]-\infty; 0]$$

De plus on sait que f est dérivable sur $E = \left\{ x \in \mathcal{D}_f, \begin{cases} \frac{x+1}{1-x} \neq -1 \\ \frac{x+1}{1-x} \neq 1 \end{cases} \right\}$

On résout :

$$\frac{x+1}{1-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

De même :

$$\frac{x+1}{1-x} = -1 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

On en déduit donc que f est dérivable sur $]-\infty; 0[$. De plus on a :

$$\begin{aligned} \forall x < 0, f'(x) &= \frac{2}{(1-x)^2} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}} \\ &= \frac{2}{(1-x)^2 \sqrt{\frac{(1-x)^2 - (1+x)^2}{(1-x)^2}}} \\ &= \frac{2}{(1-x)\sqrt{-4x}} \\ &= \frac{1}{(1-x)\sqrt{-x}} \end{aligned}$$

On sait que $\mathcal{D}_{\text{arctan}} = \mathbb{R}$. De plus on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x^2 \neq 0$$

On en déduit donc que $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$.
De plus g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2 + 1}$$

Exercice C.7 : Soit n un entier naturel. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme S_n :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} arctan\left(\frac{1}{k^2 + k + 1}\right)$$

a) Montrer que :

$$\forall x \geq 0, arctan\left(\frac{1}{x^2 + x + 1}\right) = arctan(x+1) - arctan(x)$$

b) En déduire la valeur de S_n puis la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

a) On pose pour tout x positif :

$$\forall x \geq 0, f(x) = arctan\left(\frac{1}{x^2 + x + 1}\right) - arctan(x+1) + arctan(x)$$

$f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ par composé de fonctions dérivables et :

$$\begin{aligned} \forall x \geq 0, f'(x) &= -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{(1+x+x^2)^2}} - \frac{1}{1+(1+x)^2} + \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{-2x-1}{1+(x^2+x+1)^2} + \frac{-1-x^2+1+(1+x)^2}{(1+x^2)(1+(1+x)^2)} \\ &= \frac{-2x-1}{1+(x^2+x+1)^2} + \frac{2x+1}{(1+x^2)(1+(1+x)^2)} \end{aligned}$$

Or on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 + (x^2+x+1)^2 = 2 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4$$

De même on a :

$$(1+x^2)(1+(1+x)^2) = (1+x^2)(2+2x+x^2) = 2 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \geq 0, f'(x) = 0$$

Donc la fonction f est constante sur $\mathbb{R}^+$.
Or on a :

$$f(0) = arctan(1) - arctan(1) + arctan(0) = 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \geq 0, arctan\left(\frac{1}{x^2 + x + 1}\right) = arctan(x + 1) - arctan(x)$$

b) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} arctan\left(\frac{1}{k^2 + k + 1}\right) = \sum_{k=0}^{n} (arctan(k + 1) - arctan(k))$$
$$= arctan(n + 1) - arctan(0) \quad (par\ télescopage)$$
$$= arctan(n + 1)$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{\pi}{2}$$

Exercice C.8 : a) Démontrer que :

$$\forall x \geq 0, 0 \leq x - arctan(x) \leq \frac{x^3}{3}$$

b) En déduire que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - arctan(x)}{x^2}$$

1^er^ cas : $0 \leq x - arctan(x)$

On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = x - arctan(x)$$

$f_1 \in C^1(\mathbb{R})$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1'(x) = 1 - \frac{1}{1 + x^2} = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

On a alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
f	$\nearrow$	0	$\nearrow$
$f(x)$	$-$	0	$+$

On en déduit donc que :

$$\forall x \geq 0, 0 \leq x - arctan(x)$$

2^ième^ cas : $x - arctan(x) \leq \frac{x^3}{3}$

On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_2(x) = x - arctan(x) - \frac{x^3}{3}$$

$f_2 \in C^1(\mathbb{R})$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_2'(x) = 1 - \frac{1}{1 + x^2} - x^2 = \frac{x^2}{x^2 + 1} - x^2 = \frac{-x^4}{1 + x^2}$$

On a alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_2'(x)$		$-$	0	$-$	
f_2		$\searrow$	0	$\searrow$	
$f_2(x)$		$+$	0	$-$	

$$\forall x \geq 0, 0 \leq x - arctan(x) \leq \frac{x^3}{3}$$

b) On en déduit donc d'après le théorème des gendarmes que :

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{x - arctan(x)}{x^2} = 0$$

De même par imparité des fonctions $x \mapsto x - arctan(x)$ $et\ x \mapsto \frac{x^3}{3}$ on a :

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{x - arctan(x)}{x^2} = 0$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - arctan(x)}{x^2} = 0$$

Partie D : Fonctions trigonométriques hyperboliques

Exercice D.1 : On pose :

$$\forall\, x \geq 0, f(x) = \frac{1}{ch(x)}$$

1) Montrer que f réalise une bijection vers un intervalle I à préciser.
2) Représenter les courbes de f et de sa réciproque g.
3) Démontrer que :

$$\forall y \geq 1, ch\big(g(y)\big) = \frac{1}{y}\ et\ sh\big(g(y)\big) = \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1}$$

4) Etudier le domaine de dérivabilité et la dérivée de g.

1) La fonction f est continue et dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\frac{sh(x)}{ch^2(x)} < 0$$

De plus on sait que :

$$\begin{cases} f(0) = \dfrac{1}{ch(0)} = 1 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{ch(x)} = 0 \end{cases}$$

On a donc le tableau de variation suivant :

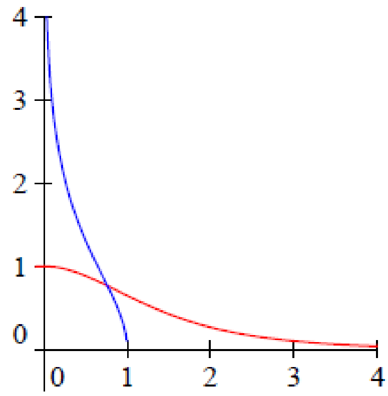
x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	1	$\searrow$	0

On a donc :

- f est continue sur $\mathbb{R}^+$
- f est strictement croissante
- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0 \end{cases}$

On en déduit donc d'après le théorème de la bijection (ou le théorème des valeurs intermédiaires) que f réalise une bijection de $[0;+\infty[$ dans $]0;1]$.

2) On a :



3) Par définition on a :

$$\forall y \geq 1, \frac{1}{ch\big(g(y)\big)} = y \Longrightarrow ch\big(g(y)\big) = \frac{1}{y}$$

De plus on sait que :

$$\forall z \in \mathbb{R}^+, sh(z) = \sqrt{ch^2(z) - 1}$$

On en déduit donc que :

$$sh\big(g(y)\big) = \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1}$$

4) La fonction g est dérivable sur $]0;1[$ (la dérivée de f est nulle en 0 et $f(0) = 1$), de dérivée :

$$\forall y \in]0;1], g'(y) = \frac{1}{f'\big(g(y)\big)} = -\frac{ch^2\big(g(y)\big)}{sh\big(g(y)\big)} = \frac{1}{y\sqrt{1-y^2}} \ (d'après\ la\ question\ précédente)$$

Exercice D.2 : Montrer que :

$$\forall\ x \geq 0, arctan\big(sh(x)\big) = arccos\left(\frac{1}{ch(x)}\right)$$

On pose :

$$f : x \mapsto arctan\big(sh(x)\big) - arccos\left(\frac{1}{ch(x)}\right)$$

On sait (d'après l'exercice D1) que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, 0 < \frac{1}{ch(x)} \leq 1$$

On en déduit donc que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
De plus f est dérivable comme composé de fonctions dérivées et :

$$\forall x \geq 0, f'(x) = \frac{ch(x)}{1 + sh^2(x)} - \frac{\frac{sh(x)}{ch^2(x)}}{\sqrt{1 - \frac{1}{ch^2(x)}}}$$

$$= \frac{ch(x)}{1 + sh^2(x)} - \frac{\frac{sh(x)}{ch^2(x)}}{\sqrt{\frac{ch^2(x) - sh^2(x)}{ch^2(x)}}}$$

$$= \frac{ch(x)}{1 + sh^2(x)} - \frac{1}{ch(x)} \quad car\ ch^2(x) - sh^2(x) = 1\ sur\ \mathbb{R}$$

$$= 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = cste$$

De plus on sait que :

$$f(0) = arctan\big(sh(0)\big) - arccos\left(\frac{1}{ch(0)}\right) = 0 - 0 = 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \geq 0, arctan\big(sh(x)\big) = arccos\left(\frac{1}{ch(x)}\right)$$