

## Chapitre 5 : Calculs Algébriques

Dans tout ce cours  $I$  désigne un ensemble fini d'entier et  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_i)_{i \in I}$  désigne une suite de nombres réels ordonnée sur  $I$ .

### I) Somme

#### a) Le symbole $\Sigma$

**Définition :**

$\sum_{i \in I} a_i$  désigne la somme des termes de la famille  $(a_i)_{i \in I}$

$i$  s'appelle un indice muet. On peut très bien prendre une autre notation :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k \in I} a_k$$

**Remarque :** Pour tout entier  $m$  et  $n$ , on a la notation suivante :

$$[[m; n]] = \{m; m+1; \dots; n\} = [m; n] \cap \mathbb{Z}$$

Si  $I$  est du type  $[[m; n]]$ , on trouve plus facilement la notation :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in [[m; n]]} a_i = \sum_{i=m}^n a_i = \sum_{i=m}^{i=n} a_i = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$$

**Exemple I.a.1 :**

$$\sum_{i \in \{0;1;2;3;4\}} 2^i = \sum_{k \in [[0;4]]} 2^k = \sum_{k=0}^4 2^k$$

**Remarque :** En informatique ce type de somme peut être représenté par la boucle FOR

**Application I.a.2 :** Ecrire sous forme de somme les algorithmes suivants :

<pre> Boucle sur Python.py - F:\C File Edit Format Run Op s=0 for i in range(0,5):     s=s+2**i print(s) </pre>	<pre> File Edit Format Run Opt s=0 for i in range(4,21):     s=s+(2*i+1) print(s) </pre>
---	--

#### b) Utilisation de la récurrence

**Remarque :** On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n+1} a_k = \sum_{k=0}^n a_k + a_{n+1}$$

Cela nous invite à effectuer des démonstrations par récurrence lorsque l'on connaît le résultat à démontrer.

**Application I.b.1 (progression arithmétique) :** Démontrer que :

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

**Application I.b.2** : Démontrer que :

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

### c) Séparer les sommes

**Propriété I.c.1** : Soient  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_i)_{i \in I}$  deux suites de nombres réels ordonnée sur I. On a alors :

$$\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \sum_{i \in I} (\lambda a_i) = \lambda \sum_{i \in I} a_i$$

**Application I.c.2** : Déterminer :

$$S_n = \sum_{k=0}^n (2k + 1)$$

**Application I.c.3** : Déterminer :

$$S_n = \sum_{k=0}^n k(k + 1)$$

### d) Décalage d'indice et télescopage

**Remarque** : Pour effectuer un changement d'indice, on crée un nouvel indice à partir du premier puis on réindexe toute la suite en changeant l'ancien indice par le nouveau.

**Propriété I.d.1 (télescopage)** : On a :

$$\sum_{k=1}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_1$$

**Application I.d.2** : Calculer :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

**Propriété I.d.3 (Extension d'une identité remarquable)** :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N} : a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}$$

**Application I.d.4** : Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$$

### e) Somme des termes géométriques

**Propriété I.e.1** :

$$\forall q \in \mathbb{R}, q \neq 1, \sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

**Remarque** : Si  $q=1$  :

$$\sum_{k=0}^n q^k = n + 1$$

**Application I.e.2** : Déterminer :

$$A = \sum_{k=12}^{25} 2^k$$

**Application I.e.3** : Des extraterrestres souhaitent envahir la Terre (mais de façon très discrète...). A minuit, un homme observe la soucoupe volante, à 00h01, il a prévenu trois personnes de sa connaissance par téléphone. A 00h02, ces trois personnes ont-elles-mêmes prévenues trois nouvelles personnes chacune, et ainsi de suite toutes les minutes (on suppose bien évidemment que toute personne prévenue ne l'était pas précédemment !). A quelle heure l'humanité entière sera prévenue de l'invasion ?

**Application I.e.4** : Factoriser l'expression :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = 1 + ch(x) + ch(2x) + \dots + ch(nx) = \sum_{k=0}^n ch(kx)$$

### III) Somme double

#### a) Généralité

**Définition** : Soient I et J deux ensembles finis non vides de  $\mathbb{N}$ . Soit  $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$  une famille de nombres réels. On note :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j} = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} a_{i,j}$$

La somme des éléments de  $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ .

**Propriété III.a.1** : On a :

$$\sum_{\substack{m \leq i \leq n \\ p \leq j \leq q}} a_{i,j} = \sum_{m \leq i \leq n} \left( \sum_{p \leq j \leq q} a_{i,j} \right)$$

**Application III.a.2** : Calculer :

$$\sum_{0 \leq i, j \leq n} (i + j)$$

#### b) Somme double triangulaire

**Proposition III.b.1** : Soient m et n deux entiers naturels et  $(a_{i,j})_{(i,j) \in \Omega}$  une famille de nombres complexes avec :

$$\Omega = \{(i,j); m \leq i \leq j \leq n\}$$

On a alors :

$$\sum_{(i,j) \in \Omega} a_{i,j} = \sum_{m \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=m}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j} = \sum_{j=m}^n \sum_{i=m}^j a_{i,j}$$

**Application III.b.2** : Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n 2^j = \sum_{j=0}^n (j+1)2^j$$

**Application III.b.2** : Calculer :

$$\sum_{0 \leq i, j \leq n} \min(i, j)$$

### c) Produit de deux sommes

**Proposition III.c.1 :** Soit  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_j)_{j \in J}$  deux familles de nombres complexes. On a alors :

$$\sum_{i \in I} a_i \times \sum_{j \in J} b_j = \sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j$$

**Application III.c.2 :** Calculer :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij$$

## IV) Produit

### a) Le symbole $\prod$

**Définition :**

$\prod_{i \in I} a_i$  désigne le produit des termes de la famille  $(a_i)_{i \in I}$

De la même façon que la somme on a :

$$\prod_{i \in I} a_i = \prod_{i \in \llbracket m; n \rrbracket} a_i = \prod_{i=m}^n a_i = a_m \times a_{m+1} \times \dots \times a_n$$

**Exemple IV.a.1 :**

a)  $\prod_{i=0}^{3000} i =$

b)  $\prod_{i=0}^{3000} 2 =$

### b) Au produit rien de nouveau

**Remarque :** De la même façon que pour la somme, nous pouvons démontrer des résultats par récurrence, par télescopage et décalage d'indice, écrire des doubles produits...

**Application IV.b.1 :** Calculer :

$$\prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k+1}$$

**Application IV.b.2 :** Calculer :

$$\sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

**Application IV.b.3 :** Déterminer le résultat affiché par l'algorithme suivant :

## V) Le binôme de Newton

### a) Le factoriel

**Définition :** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit le nombre factoriel  $n$ , noté  $n!$  Par :

$$n! = 1 \times 2 \times \dots \times n = \prod_{k=1}^n k$$

Par convention on pose :  $0! = 1$

```
a=2
P=a
for i in range(1,10):
    a=a*3
    P=P*a
print(P)
```

**Exemple I.a.1:** Calculer les 6 premiers factoriels.

**Application V.a.2 :** Ecrire les nombres suivants en utilisant la factorielle :

$$A = \prod_{k=7}^{15} k = 7 \times 8 \times \dots \times 15 \qquad B = 3 \times 5 \times \dots \times 2017 = \prod_{k=1}^{1009} (2k - 1)$$

### b) Propriété de dénombrement

**Propriété V.b.1 :** Dans un ensemble  $E_n$  fini à  $n$  éléments :  $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , il y a exactement  $n!$  permutations de taille  $n$ .

**Application V.b.2 :** Une saison de formule 1 compte 22 pilotes. Déterminer le nombre de classements différents que cela peut engendrer.

**Application V.b.3 :** Une saison de formule 1 compte 22 pilotes. Déterminer le nombre de podium différents.

### c) Les coefficients binomiaux

**Définition :** Soient  $n$  et  $p$  deux entiers tels que :  $0 \leq p \leq n$ . Soit  $E$  un ensemble fini possédant  $n$  éléments :

$$E = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$$

On note  $\binom{n}{p}$  le nombre de sous-ensemble de  $E$  possédant  $p$  éléments.

**Exemple V.c.1 :** Soit  $E = \{a ; b ; c ; d ; e\}$  un ensemble à 5 éléments. Déterminer le nombre de sous-ensemble à 3 éléments.

**Proposition V.c.2 :** On a la relation suivante :

$$\forall (n; p) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq p \leq n, \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

**Application V.c.3 :** Déterminer  $\binom{14}{12}$

### d) Relations entre coefficients binomiaux

**Proposition V.d.1 :** On a :

$$\forall (n; p) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq p \leq n, \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

**Remarque :** Par commodité on définit :

$$\binom{n}{p} = 0 \text{ si } p < 0 \text{ ou } p > n$$

**Application V.d.2 :** Déterminer le nombre de groupes de 5 élèves que l'on peut former avec une classe de 48 élèves.

**Proposition V.d.3 (identité de Pascal) :** On a :

$$\forall (n; p) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq p \leq n, \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

**Application V.d.4 (Triangle de Pascal) :**

	$p = 0$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$	$p = 6$	$\dots$
$n = 0$	1							
$n = 1$	1	1						
$n = 2$	1	2	1					
$n = 3$	1	3	3	1				
$n = 4$	1	4	6	4	1			
$n = 5$	1	5	10	10	5	1		
$n = 6$	1	6	15	20	15	6	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$
$n$	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\ddots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

### e) Formule du binôme de Newton

**Proposition V.e.1 :** On a :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, (x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

**Application V.e.2 :** On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

**Application V.e.3 :** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On pose :

$$f_n: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \end{cases}$$

Démontrer que  $f_n$  est dérivable et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = nx^{n-1}$$

**Application V.e.4 :** Déterminer la valeur de  $S_n$  défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$$

**Propriété V.e.4 (Formule de Leibniz) :** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions  $n$  fois dérivables sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . On a alors :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

**Application V.e.5 :** Soit  $n$  un entier naturel. Déterminer la dérivée  $n$ -ième de  $x \mapsto e^x(x^2 + 2x - 7)$ .