Activté 6.A.1

Le but de cette activité est de comprendre comment les scientifiques en sont venus à construire les nombres complexes.

Aux alentours des années 1500, les scientifiques savent résoudre des équations polynomiales de degrés 2 :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Cela depuis la redécouverte des textes arabes, et notamment grâce au mathématicien Al-Khwârizmi dont les équations traitées dans son livre <u>Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison,</u> d'où l'on tire notamment le mot algèbre.

Cette activité a donc pour but de vous guider afin de comprendre comment les mathématiciens en sont venus à introduire des racines carrées négatives.

Dans cette activité nous chercherons à résoudre des équations du type :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0$$

Partie A : Simplification du problème

1) Montrer que :

$$\begin{cases} ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0$$

Où l'on exprimera $b', c' et\ d'$ à l'aide de a, b, c, d.

2) Montrer que :

$$x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0 \Leftrightarrow x^3 + px + q = 0$$

Où l'on exprimera $p\ et\ q$ l'aide de $b', c' et\ d'$.

Ainsi résoudre une équation du type $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0$ revient à résoudre une équation du type :

$$x^3 + px + q = 0$$

Dans toute la suite on pose $(E_{p,q})$ cette équation.

Partie B : Etude des solutions

1) Démontrer que $(E_{p,q})$ admet au minimum une solution.

2) Montrer que $(E_{p,q})$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$4p^3 + 27q^2 > 0$$

Partie C : Un changement de variable à l'aide de deux variables !

Dans toute cette partie on pose :

$$(E) :\ x^3 + px + q = 0\ avec\ 4p^3 + 27q^2 > 0$$

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait qu'il existe une infinité de couple (u, v) dans $\mathbb{R}^2$ tel que $u + v = x$. Soit (u, v) un tel couple. Montrer que :

$$x^3 + px + q = 0 \Leftrightarrow u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0$$

Pour déterminer le couple (u, v), il nous faut un autre renseignement sur $u\ et\ v$, pour avoir l'unicité de u et de v.

Pour cela, l'idée est de poser $3uv + p = 0$ afin d'éliminer une partie de l'équation $u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0$.

2) Montrer que si $(E_{p,q})$admet une unique solution x, le système :

$$\begin{cases} u + v = x \\ 3uv + p = 0 \end{cases}$$

Admet deux couples solutions. Pour avoir unicité de u et v, nous pouvons par exemple prendre comme choix $u < v$.
On a ainsi unicité du couple (u, v) solution du système :

$$\begin{cases} u + v = x \\ 3uv + p = 0 \\ u < v \end{cases}$$

Ainsi, chercher à résoudre $u^3+v^3+(u+v)(3uv+p)+q=0$, revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} u^3+v^3+q=0 \\ 3uv+p=0 \end{cases}$$

3) Montrer que :

$$\begin{cases} u^3+v^3+q=0 \\ 3uv+p=0 \end{cases} \Leftrightarrow u^3 \text{ et } v^3 \text{ sont solutions de } X^2+qX-\frac{p^3}{27}=0$$

4) Résoudre

$$X^2+qX-\frac{p^3}{27}=0$$

Comme on a imposé que $u<v$, on trouve que :

$$x^3+px+q=0 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{u^3}+\sqrt[3]{v^3}=\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}}$$

Trouver x revient alors à un exercice de racine cubique (ce qui n'est pas vraiment simple, mais tout de même plus simple !).

Partie D : Et avec plusieurs solutions ?

Nous avons vu précédemment comment procéder avec $4p^3+27q^2>0$. Si jamais $4p^3+27q^2=0$, la méthode précédente fonctionne toujours pour déterminer une solution ($x=\sqrt[3]{-4q}$), qui est en fait racine double, puis on déterminer l'autre racine en factorisant le polynôme $p5x)=x^3+px+q$.
Mais si jamais ce n'est pas le cas ? Que se passe-t-il si $4p^3+27q^2<0$?
Appelons $d=4p^3+27q^2$ ce nombre négatif.

Les mathématiciens de l'époque (il semblerait que Bombelli soit le premier à avoir eu cette idée…) décidèrent alors d'introduire le nombre $\sqrt{d}$, qui n'existe pas (du moins pas encore !). Que se passe-t-il alors ?

Si l'on admet que $\sqrt{-1}$ désigne un nombre qui au carré fait -1 (mais qui n'existe pas !), on a :

$$\sqrt{d}=\sqrt{-d}\times\sqrt{-1}$$

Le problème revient donc à chercher la racine cubique d'un nombre qui n'existe pas !

$$\begin{cases} u^3=-q-\sqrt{-d}\times\sqrt{-1} \\ v^3=-q+\sqrt{-d}\times\sqrt{-1} \end{cases}$$

Observons ce qui se passe sur un exemple !
On cherche à résoudre :

$$x^3-7x+6=0$$

(On remarque évidemment que les racines sont 1,2 et -3 mais pour comprendre ce qu'on fait les mathématiciens, appliquons la méthode décrite dans <u>*Ars Magna*</u>, le livre de Cardan.
1) Montrer, d'après ce que l'on a fait précédemment, que cela revient à résoudre :

$$\begin{cases} u^3=-3-\frac{10}{3\sqrt{3}}\sqrt{-1} \\ v^3=-3+\frac{10}{3\sqrt{3}}\sqrt{-1} \end{cases}$$

2) Cherchons à résoudre :

$$u^3=-3-\frac{10}{3\sqrt{3}}\sqrt{-1}$$

On pose $u=a+b\sqrt{-1}$. Montrer que :

$$u^3=-3-\frac{10}{3\sqrt{3}}\sqrt{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3-3ab^2=-3 \\ 3a^2b-b^3=-\frac{10}{3\sqrt{3}} \end{cases}$$

3) En posant $y=\sqrt{3}b$, montrer que :

$$\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = -3 \\ 3a^2b - b^3 = -\dfrac{10}{3\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 3ay^2 = -3 \\ 9x^2y - y^3 = 10 \end{cases}$$

4) Trouver les valeurs entières solutions de ce système.

5) En déduire que :

$$u^3 = -3 - \frac{10}{3\sqrt{3}}\sqrt{-1} \Leftrightarrow u \in \left\{1 + \frac{2\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}; -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{-1}; \frac{1}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{6}\sqrt{-1}\right\}$$

6) En utilisant le fait que :

$$uv = \frac{7}{3}$$

Trouver les valeurs correspondantes pour v.

7) Que remarque-t-on lorsque l'on trouve $x = u + v$, les trois solutions du système ?