Correction activité 6.1

Partie A : Simplification du problème

1) Montrer que :

$$\begin{cases} ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0$$

On a :

$$\begin{cases} ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0\ (car\ a \neq 0) \Leftrightarrow x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0$$

Avec :

$$\begin{cases} b' = \dfrac{b}{a} \\ c' = \dfrac{c}{a} \\ d' = \dfrac{d}{a} \end{cases}$$

2) Le but ici est de transformer l'expression $x^3 + b'x^2 + c'x + d'$ comme une forme canonique pour le degré 2.

On sait que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Ainsi on a :

$$\left(x + \frac{b'}{3}\right)^3 = x^3 + b'x^2 + 3(b')^2x + (b')^3$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} x^3 + b'x^2 + c'x + d' &= \left(x + \frac{b'}{3}\right)^3 + \left(c' - \frac{b'}{9}\right)x + d' - \frac{(b')^3}{27} \\ &= \left(x + \frac{b'}{3}\right)^3 + \left(c' - \frac{b'}{3}\right)\left(x + \frac{b'}{3}\right) + d' - \frac{c'b'}{3} - \frac{b'^2}{9} - \frac{b'^3}{27} \\ &= X^3 + pX + q \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{cases} X = x + \dfrac{b'}{3} \\ p = c' - \dfrac{b'}{3} \\ q = d' - \dfrac{c'b'}{3} - \dfrac{b'^2}{9} - \dfrac{b'^3}{27} \end{cases}$$

Partie B : Etude des solutions

1) On pose

$$f_{p,q} : x \mapsto x^3 + px + q$$

On sait que $f_{p,q}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynômiale, de plus :

$$\lim_{x \to \epsilon \times \infty} x^3 + px + q = \lim_{x \to \epsilon \times \infty} x^3 \left(1 + \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x^3}\right) = \epsilon\infty\ avec\ \epsilon^2 = 1$$

On en déduit donc que f change de signe sur $\mathbb{R}$. On applique alors le TVI et on a :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, tel\ que\ f_{p,q}(\alpha) = 0$$

2) On sait que $f_{p,q}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme. De plus on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'_{p,q}(x) = 3x^2 + p$$

1er cas : $p > 0$

Alors la fonction est strictement croissante, et d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (appelé aussi le théorème de la bijection), $f_{p,q}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (d'après la question B.1). Donc on a unicité de $f_{p,q}(x) = 0$

On a bien :

$$4p^3+27q^2>0$$

2ième cas : $p<0$

On a alors :

$$\forall x\in\mathbb{R}, f'_{p,q}(x)=3x^2+p$$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{-p}{3}}$		$\sqrt{\frac{-p}{3}}$		$+\infty$
$f'_{p,q}(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_{p,q}$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

On doit donc regarder le signe de $f_{p,q}\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)$ et $f_{p,q}\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)$. On a unicité de la solution si et seulement si :

$$\underbrace{\begin{cases} f_{p,q}\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)>0 \\ f_{p,q}\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)>0 \end{cases}}_{(1)} \quad OU \quad \underbrace{\begin{cases} f_{p,q}\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)<0 \\ f_{p,q}\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)<0 \end{cases}}_{(2)}$$

On en déduit donc que l'on a unicité de la solution si et seulement si :

$$f_{p,q}\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)\times f_{p,q}\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)>0$$

Or on a :

$$\begin{aligned} f_{p,q}\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)\times f_{p,q}\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) &= \left[\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)^3+p\times\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)+q\right]\times\left[\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)^3+p\times\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)+q\right] \\ &= \left[\frac{p}{3}\times\sqrt{-\frac{p}{3}}-p\times\sqrt{-\frac{p}{3}}+q\right]\left[-\frac{p}{3}\times\sqrt{-\frac{p}{3}}+p\times\sqrt{-\frac{p}{3}}+q\right] \\ &= \left[q-\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}}\right]\left[q+\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}}\right] \\ &= q^2+\frac{4}{9}\times\frac{p^3}{3} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

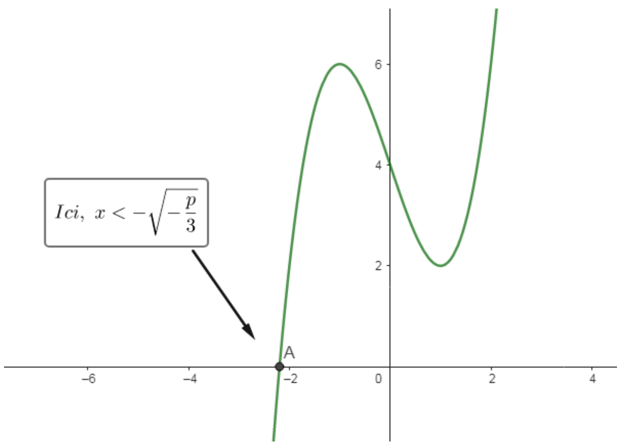
$$f_{p,q}\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)\times f_{p,q}\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)>0 \Leftrightarrow q^2+\frac{4}{27}p^3>0 \Leftrightarrow 4p^3+27q^2>0$$

Remarque : On peut illustrer le cas (1) *et* (2) à l'aide d'une courbe :

Cas 1 :

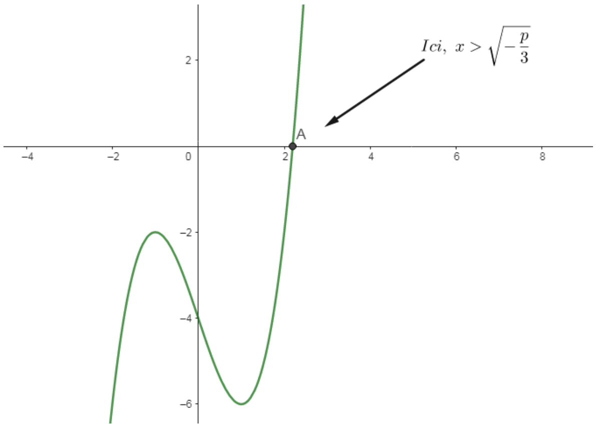
Dans le cas (1), les deux extrema locaux sont positifs !

$$\begin{cases} f_{p,q}\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)>0 \\ f_{p,q}\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)>0 \end{cases}$$



Cas 2 :
Dans le cas (2), les deux extrema locaux sont négatifs !

$$\begin{cases} f_{p,q}\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) < 0 \\ f_{p,q}\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) < 0 \end{cases}$$



Partie C : Un changement de variable à l'aide de deux variables !

1) On a :

$$x^3 + px + q = 0 \Leftrightarrow (u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$$
$$\Leftrightarrow u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q = 0$$
$$\Leftrightarrow u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + p(u+v) + q = 0$$
$$\Leftrightarrow u^3 + v^3 + (u+v)(3uv+p) + q = 0$$

2) On cherche à résoudre :

$$\begin{cases} u+v = x (L_1) \\ 3uv + p = 0 (L_2) \end{cases}$$

On voit que :

$$(L_2) \Longrightarrow uv = -\frac{p}{3} \neq 0$$

On a donc $uv \neq 0\ donc\ u \neq 0\ et\ v \neq 0$

On a alors :

$$\begin{cases} u+v = x \\ 3uv + p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = x \\ u = -\frac{p}{3v} \end{cases}$$

On remplace l'expression obtenue dans (L_2) dans (L_1) :

$$u - \frac{p}{3v} = x \Leftrightarrow u^2 - xu - \frac{p}{3} = 0$$

On a :

$$\Delta = x^2 + \frac{4}{3}p$$

On en déduit que l'équation $u^2 - xu - \frac{p}{3} = 0$ admet deux solutions si et seulement si :

$$x > 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\ ou\ x < -2\sqrt{-\frac{p}{3}}$$

On sait que l'on est dans le cas où $(E_{p,q})$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On est donc dans le cas (1) ou le cas (2).

1er cas : Nous sommes dans le cas (1) : $x < -\sqrt{-\frac{p}{3}}$

On a :

$$f_{p,q}\left(-2\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) = \frac{8p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} - 2p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q$$
$$= \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q = f_{p,q}\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$$

Or on sait que :

$$f_{p,q}\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) > 0$$

On en déduit donc que :

$$x < -2\sqrt{-\frac{p}{3}}$$

On a donc $\Delta > 0$.

2ième cas : Nous sommes dans le cas (1) : $x > \sqrt{-\frac{p}{3}}$

On a :

$$f_{p,q}\left(2\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) = -\frac{8p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + 2p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q$$
$$= -\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q = f_{p,q}\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$$

Or on sait que :

$$f_{p,q}\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) < 0$$

On en déduit donc que :

$$x > 2\sqrt{-\frac{p}{3}}$$

On a donc $\Delta > 0$.

On en déduit donc que l'équation $u^2 - xu - \frac{p}{3} = 0$ admet deux solutions distinctes, donc deux valeurs de u. On trouve ensuite les deux valeurs de v en utilisant $3uv + p = 0$.

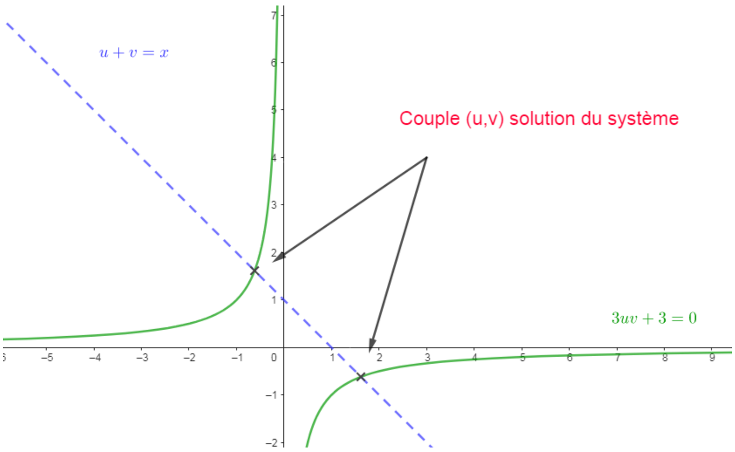
Remarque : On peut illustrer cela sur un exemple. On pose :

$$(E_{3,-4}) : x^3 + 3x - 4 = 0$$

Evidemment $x = 1$ est l'unique racine, et elle est évidente. Ici nous ne cherchons pas à résoudre l'équation mais bien à illustrer les deux couples solutions du système :

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ 3uv + 3 = 0 \end{cases}$$

On a alors :



3) On a :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 + q = 0 \\ 3uv + p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ v^3 = -\frac{p^3}{27u^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 - \frac{p^3}{27u^3} = -q \\ v^3 = -\frac{p^3}{27u^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u^3)^2 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0 \\ v^3 = -\frac{p^3}{27u^3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u^3 \ et\ v^3\ sont\ solutions\ de\ X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0\ (par\ symétrie\ de\ u^3\ et\ v^3)$$

4) On résout :

$$X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0$$

On a :

$$\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} = \frac{27q^2 + 4p^3}{27} > 0\ (car\ unicité\ de\ la\ solution, cf\ partie\ B)$$

On a donc :

$$\boldsymbol{X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0 \Leftrightarrow X = \frac{-q - \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}}}{2}\ ou\ X = \frac{-q + \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}}}{2}}$$

Partie D : Et avec plusieurs solutions ?

1) Il suffit de reprendre les solutions :

$$X = \frac{-q - \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}}}{2} \; ou \; X = \frac{-q + \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}}}{2}$$

On a alors :

$$u^3 = -3 - \frac{10}{3\sqrt{3}}\sqrt{-1} \; ou \; u^3 = -3 + \frac{10}{3\sqrt{3}}\sqrt{-1}$$

Comme $u \; et \; v$ jouent des rôles symétriques, on peut résoudre :

$$\boldsymbol{u^3 = -3 - \frac{10}{3\sqrt{3}}\sqrt{-1}}$$

2) On pose :

$$u = a + b\sqrt{-1}$$

On a alors :

$$u^3 = \left(a + b\sqrt{-1}\right)^3 = a^3 + 3a^2b\sqrt{-1} - 3ab^2 - b^3\sqrt{-1} = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)\sqrt{-1}$$

On veut :

$$u^3 = -3 - \frac{10}{3\sqrt{3}}\sqrt{-1}$$

On identifie d'après l'égalité :

$$a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)\sqrt{-1} = -3 - \frac{10}{3\sqrt{3}}\sqrt{-1}$$

On a donc :

$$\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = -3 \\ 3a^2b - b^3 = -\dfrac{10}{3\sqrt{3}} \end{cases}$$

Remarque : Il faut bien être conscient ici que l'on cherche des solutions. Nous n'avons encore aucun cadre rigoureux (comme par exemple deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leur partie réelle et leur partie imaginaire sont égales…). Nous cherchons !

3) On pose $y = \sqrt{3}b$. On a alors :

$$\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = -3 \\ 3a^2b - b^3 = -\dfrac{10}{3\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - ay^2 = -3 \\ \dfrac{3a^2y}{\sqrt{3}} - \dfrac{y^3}{3\sqrt{3}} = -\dfrac{10}{3\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - ay^2 = -3 \\ 9x^2y - y^3 = -10 \end{cases}$$

4) On a :

$$\begin{cases} a^3 - ay^2 = -3 \\ 9x^2y - y^3 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a-y)(a+y) = -3 \\ y(3x-y)(3x+y) = -10 \end{cases}$$

Pour avoir des solutions entières, on sait que 3 n'a que deux diviseurs positifs, $1 \; et \; 3$. Ainsi on a :

$$a(a-y)(a+y) = -3 \Longrightarrow a = \pm 1 \; ou \; a = \pm 3$$

On remarque alors que $a = \pm 3 \; et \; a = -1$ n'ont pas de solutions entières pour y. On en déduit que $a = 1$ est l'unique possibilité pour $a^3 - ay^2 = -3 \; et \; (a, y) \in \mathbb{Z}^2$. On obtient alors $y = \pm 2$ et on vérifie que seul $y = -2$ fonctionne.

On a alors :

$$u = \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{-1}\right)^3 = -3 - \frac{10}{3\sqrt{3}}\sqrt{-1}$$

Nous avons réussi à trouver une racine cubique de u^3.

On fait de même avec :

$$v^3 = -3 + \frac{10}{3\sqrt{3}}\sqrt{-1}$$

On trouve alors :

$$\boldsymbol{\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{-1}\right)^3 = -3 + \frac{10}{3\sqrt{3}}\sqrt{-1}}$$

Remarque : Cet exemple est là pour vous prouver que même si l'on se permet d'écrire des racines négatives, les solutions en sont difficiles et trouver la racine cubique d'un nombre est ardu ! Nous n'avons ici trouvé qu'une seule des trois solutions ! Je vous donne les deux autres dans la question 5.

5) Il suffit de calculer en utilisant le fait que $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$

6) Ici on a :

$$u = \frac{7}{3v} = \frac{7}{3 \times \left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{-1}\right)} = \frac{7}{3} \times \frac{1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{-1}}{1 + \frac{4}{3}} = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{-1}$$

$$u = \frac{7}{3v} = \frac{7}{3 \times \left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{-1}\right)} = \frac{7}{3} \times \frac{-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{-1}}{\frac{9}{4} + \frac{1}{12}} = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{-1}$$

$$u = \frac{7}{3v} = \frac{7}{3 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{6}\sqrt{-1}\right)} = \frac{7}{3} \times \frac{\frac{1}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{6}\sqrt{-1}}{\frac{1}{4} + \frac{25}{12}} = \frac{1}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{6}\sqrt{-1}$$

7) On a :

$$u + v = 2 \; ou \; u + v = -3 \; ou \; u + v = 1$$

On remarque que les **parties imaginaires sont toujours opposées** et donc s'annule. Et donc à la fin nous retrouvons nos trois racines réelles !