

**Programme de Colle n°2**  
**PCSI 2025-2026**  
**(22 au 26 septembre)**

**Inégalité dans  $\mathbb{R}$**

- Résolution d'inéquation avec des racines carrées
- Résolution d'inéquation avec des valeurs absolues (Inégalité triangulaire)
- Utiliser la monotonie d'une fonction pour démontrer une inéquation
- Démontrer la monotonie d'une fonction sans dérivation (ou avec dérivation)
- Majorant et minorant d'une partie de  $\mathbb{R}$

**Généralité sur les fonctions**

- Ensemble de définition
- Graphe d'une fonction
- Limite et asymptotes horizontale et verticale
- Graphe d'une réciproque

**Dérivation**

- Dérivation des fonctions usuelles de première et terminale
- Dérivation d'une composée
- Dérivée n-ième
- Calcul de limite
- Equation de la tangente
- Monotonie

**Fonctions usuelles**

- Exponentielle
- Logarithme népérien
- Fonctions puissance (croissance comparée avec l'exponentielle et le logarithme)
- Fonctions trigonométriques *cos* et *sin*

**Exercices du TD I,II,III, IV (début)**

**Question de cours**

**Chapitre I :**

- Inégalité triangulaire (sans démonstration) :

**Propriété II.a.3 (Inégalité triangulaire sur  $\mathbb{R}$ ) :**

$$\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2, \left| |x| - |x'| \right| \leq |x + x'| \leq |x| + |x'|$$

**Remarque :** Les cas d'égalités seront traités dans le chapitre des complexes.

**Chapitre III :**

- **Exemple I.e.1 :** On pose :

$$g: \begin{cases} ]0; +\infty[ \rightarrow ]0; +\infty[ \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$$

Déterminer  $g^{(n)}$  pour tout entier naturel non nul.

**Chapitre IV :**

- Savoir retrouver une des formules trigonométriques du type  $\cos(a \pm b)$ ,  $\sin(a \pm b)$ ,  $\cos(a) \cos(b)$ ,  $\sin(a) + \sin(b)$  ...

**Remarque :** On ne demande pas forcément aux étudiants de les connaître par cœur, mais de savoir les retrouver en moins de trois minutes !

**Remarque 2 :** Nous n'avons pas encore fait d'exercice sur les fonctions trigonométriques en TD, mais nous avons résolu de petites inéquations et équations du type  $\cos(x) \geq a$ ,  $\sin(x) = b$ ,  $\cos(a) + \sin(b) = 0$  ...

Ce genre de questions peuvent tout à fait être posées cette semaine, il faudra juste un peu d'indulgence en début de semaine... La tangente n'a pas encore été traitée.

## Exercices à savoir refaire

### TD I :

- **Application II.a.4** : Démontrer que :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|$$

- **Exercice B.1** : Démontrer les inégalités suivantes :

$$a) \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \quad b) \forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2$$

- **Exercice B6 du TD I** : 1) Démontrer que :

$$\forall x > 0, x + \frac{1}{x} \geq 2$$

2) En déduire par récurrence que :

$$\left( \sum_{k=1}^n a_i \right) \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_i} \right) \geq n^2$$

### TD III :

- **Exercice C.1** : On pose :

$$\forall m \in \mathbb{R}, f_m: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x+m}{x^2+1} \end{cases}$$

On note  $C_m$  sa courbe représentative.

- 1) Montrer que les tangentes aux courbes  $C_m$  au point d'abscisse 0 sont parallèles.
- 2) Montrer que les tangentes aux courbes  $C_m$  au point d'abscisse 1 sont concourantes.

- **Application II.c.4** : Démontrer que :

$$\forall x \geq 0, x \geq \sin(x) \geq x - \frac{x^3}{6}$$

### TD IV :

- Soit  $a > 0$ . Résoudre le système suivant ( $S_a$ ): 
$$\begin{cases} xy = a^2 \\ (\ln(x))^2 + (\ln(y))^2 = \frac{5}{2}(\ln(a))^2 \end{cases}$$
- Résoudre  $\cos(3x) + \sin(x) = 0$
- Démontrer que :

$$\forall x \in ]0; 1[, x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$$