DM n°2

Exercice 1 : Les fonctions trigonométriques réciproques

Dans tout cet exercice on pose :

$$f : x \mapsto arccos[cos(x)] + \frac{1}{2} arccos[cos(2x)]$$

1) Démontrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
2) a) Déterminer la valeur de $f(0)$ en justifiant.
b) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Déterminer la valeur de $f\big((2k+1)\pi\big)$.
3) Démontrer que f est paire.
4) Montrer que f est 2π −pédiodique.
5) Tracer le graphe de f sur $[-4\pi; 4\pi]$.
*(**Indication** : On pourra distinguer deux cas : $\left[0;\frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$)*

Exercice 2 : Limite d'une somme

Le but de cet exercice est de calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$$

Dans toute la suite de cet exercice, on pose :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) = arctan(x+1) - arctan(x)$$

3) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = arctan(n+1)$$

4) Déterminer la limite de S_n en $+\infty$.

Problème : Les démos des croissances comparées

Le but de ce problème est de démontrer les théorèmes de limite sur les croissances comparées : $\forall\ (\alpha,\beta) \in \,]0;+\infty[^2$:

$$(1) \lim_{x\to+\infty} \frac{[ln(x)]^\alpha}{x^\beta} = 0 \quad (2) \lim_{x\to0} x^\beta |ln(x)|^\alpha = 0 \quad (3) \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)^\alpha}{x^\beta} = +\infty \quad (4) \lim_{x\to-\infty} |x|^\beta (e^x)^\alpha = 0$$

Partie A : Démontrons le (1)

On pose :

$$f : \begin{cases}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{ln(x)}{x} \end{cases}$$

1) Démontrer que :

$$\forall\ x > 1, 0 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$$

2) En déduire :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

3) Démontrer que :

$$\forall\ (\alpha,\beta) \in \,]0;+\infty[^2, \frac{[ln(x)]^\alpha}{x^\beta} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha f\left(x^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^\alpha$$

4) En déduire que :

$$\forall\ (\alpha,\beta) \in \,]0;+\infty[^2, \lim_{x\to+\infty} \frac{[ln(x)]^\alpha}{x^\beta} = 0$$

Partie B : Les autres

1) Effectuer le changement de variable :

$$X = \frac{1}{x}$$

Puis déduisez-en le 2.

2) On pose :

$$g_{\alpha,\beta} : \begin{cases}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{(e^x)^\alpha}{x^\beta} \end{cases}$$

a) Déterminer la fonction $h_{\alpha,\beta}$ telle que :

$$\forall\, x > 0, g_{\alpha,\beta}(x) = e^{h_{\alpha,\beta}(x)}$$

b) Par composée de limite, déterminer :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(e^x)^\alpha}{x^\beta}$$

3) Avec un changement de variable judicieux, déterminer :

$$\lim_{x \to -\infty} |x|^\beta (e^x)^\alpha$$