**Programme de Colle n°3**
**PCSI 2025-2026 (29 septembre au 3 octobre)**

**Fonctions usuelles**

- Fonctions trigonométriques et leur réciproque, fonctions hyperboliques (leur réciproque n'est pas un attendu du programme, mais nous avons déjà étudié ce genre de réciproque)
- Fonctions exponentielle, logarithme…

**Calcul algébrique**

- Utilisation du symbole somme
- Décalage d'indice et télescopage
- Nouvelle identité remarquable :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N} : a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$$

- Sommes des termes d'une suite géométrique et arithmétique
- Sommes doubles

**Exercices du TD IV et TD V**

**Remarque :** Nous n'avons calculé que deux sommes doubles, une dans le cours et une en exercice. Les examinateurs pourront déjà mettre l'accent sur le calcul d'une somme simple, avec une décomposition en élément simple puis un télescopage, une progression géométrique ou arithmétique…

**Question de cours**

## Chapitre IV :

- Savoir les formules trigonométriques du type $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\cos(a)\cos(b)$ *ou encore* $\sin(a) + \sin(b)$

On ne demande pas forcément aux étudiants de les connaitre par cœur, mais de savoir les retrouver en moins de trois minutes !

- **Propriété I.e.4** : arccos est dérivable sur $]-1;1[$ et :

$$\forall x \in ]-1;1[, arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

## Chapitre V :

- ***Application I.b.1 (progression arithmétique)*** : Démontrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

  ***Application I.b.2*** : Démontrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- **Application I.d.2** : Calculer :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

- **Propriété I.d.3 :**

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N} : a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$$

- **Propriété I.e.1** :

$$\forall q \in \mathbb{R}, q \neq 1, \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

- ***Application III.a.2*** : Calculer :

$$\sum_{0\leq i,j\leq n}(i+j)$$

**Exercices à savoir refaire**

**TD III :**

- ***Application II.c.4*** : Démontrer que : $\forall\, x \geq 0, x \geq sin(x) \geq x - \frac{x^3}{6}$

**TD IV :**

- Résoudre $cos(3x) + sin(x) = 0$
- Montrer que : $2\,arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) + arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$ après avoir précisé le domaine de validité.

**TD V :**

**Exercice B.1** : a) Démontrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

b) En déduire que : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$

**Exercice C.1 :** Soit n un entier naturel non nul. On pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

a) Déterminer trois réels a, b et c tel que :

$$\forall\, k \geq 1, \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$$

b) En déduire la valeur de $S_n$.