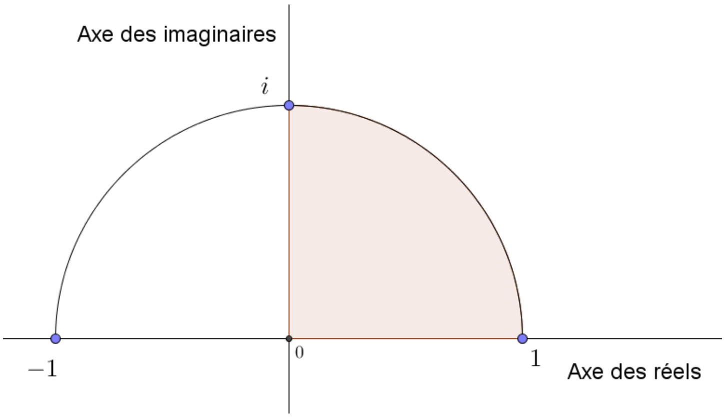
Chapitre 6 : Nombres complexes
Partie A : Une approche géométrique

I) Généralités

a) Un carré pour -1



Définition (nombre imaginaire i) : Si l´on voit la multiplication par -1 comme une rotation autour de la droite des réels d´angle π radians, on peut définir alors un nombre « imaginaire » dont la multiplication est vue comme la rotation d´angle $\frac{\pi}{2}$ radians autour de la droite des réels. On obtient alors un nombre i tel que $i^2 = -1$.

Définition (nombre complexe) : A partir de cette définition géométrique, on peut définir une nouvelle catégorie de nombres, les nombres complexes de la forme : $z = a + ib$, avec a et b deux nombres réels.
Nous obtenons ainsi des nombres en « dimension 2 », avec une partir réelle et une partie imaginaire.

Notation : La partie réelle se note $\mathcal{R}e(z)$ et la partie imaginaire $\mathcal{I}m(z)$.
La notation $z = a + ib$ avec (a ;b) $\in \mathbb{R}^2$ s´appelle la <u>forme algébrique</u> de z.

Exemple I.a.1 : Soit $z = 2 + 3i$. Déterminer sa partie réelle et sa partie imaginaire.

Définition (l´ensemble $\mathbb{C}$) : L´ensemble des nombres complexes est noté en mathématiques $\mathbb{C}$, de la même façon que les nombres réels sont notés $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{C} = \{a + ib\,;(a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

Ainsi les nombres réels sont inclus dans les nombres complexes, c´est l´ensemble des nombres réels dont la partie imaginaire est nulle.

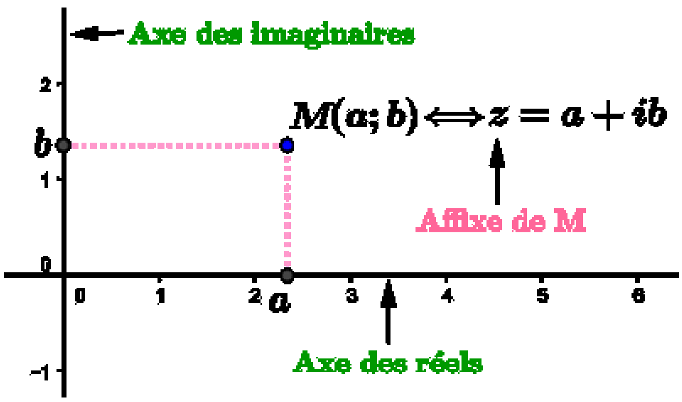
$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Propriété I.a.2 : Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique couple (a;b) $\in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + ib$

Corollaire I.a.3 : Soit *(z ;z')* $\in \mathbb{C}^2$. On a alors : $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{R}e(z) = \mathcal{R}e(z') \\ \mathcal{I}m(z) = \mathcal{I}m(z') \end{cases}$

Application I.a.4 : A quelle condition $Z = z^2 + z + 1$ est-il un réel ?

b) Représentation d'un nombre complexe



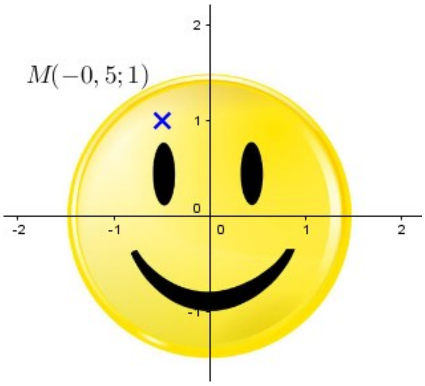
Dans toute cette partie le plan sera ramené à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

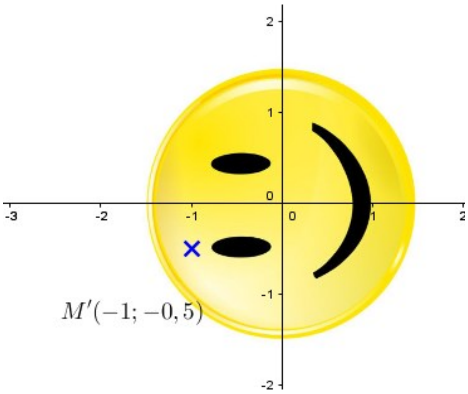
Définition (affixe d´un point) : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, avec a et b réel (donc z est donné sous sa forme algébrique). Le point M(a ;b) dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est appelé **l´image** du nombre complexe z. Réciproquement, z est appelé l´**affixe** du point M.

Notation : On note souvent $M(z)$ l´image du nombre complexe z et z_M l´affixe du point M.

Remarque : On peut ainsi utiliser les nombres complexes pour faire de la géométrie du plan, extrêmement pratique notamment pour les rotations.

Application I.b.1 : Soit $M(x;y)$ et $M'(x';y')$ son image par la rotation de centre O(0;0) et d'angle $\frac{\pi}{2}$ radians. Exprimer les coordonnées de *M'* en fonction de celles de *M*.





Remarque : De la même façon, on peut définir l'affixe d'un vecteur $\vec{u}(a;b)$ en posant $z_{\vec{u}} = a + bi$.
On a alors pour tout point A et B du plan d'affixe respective z_A et z_B on a :

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$$

Exemple I.b.2: On pose les points A(2 ;3) et B(5 ;1). Déterminer l'affixe de $z_{\overrightarrow{AB}}$.

Propriété I.b.3 : Soient A et B deux points du plan. Alors l'image C de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$ a pour affixe :

$$z_C = z_B + iz_{\overrightarrow{BA}}$$

Exemple I.b.4 : Soit $A(2;-3)$ et $C(-1;2)$. Déterminer l'image de A par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$ radians.

II) Opérations sur $\mathbb{C}$

a) Prolongement des opérations de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$

Définition : On prolonge les opérations sur les réels aux nombres complexes. La seule règle qui s'ajoute est le fait que $i^2 = -1$.

Exemple II.a.1: Déterminer les formes algébriques des nombres suivants :

$$z_1 = (2+3i) + (4+2i);\ z_2 = (1-7i)i;\ z_3 = (4-2i)(5+3i)$$

Remarque : Les propriétés algébriques vues au chapitre 5 sont encore valables sur les complexes :

1) $\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

2) $\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}\right)$

3) $\forall q \in \mathbb{C}\backslash\{1\}, \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

b) Interprétation géométrique

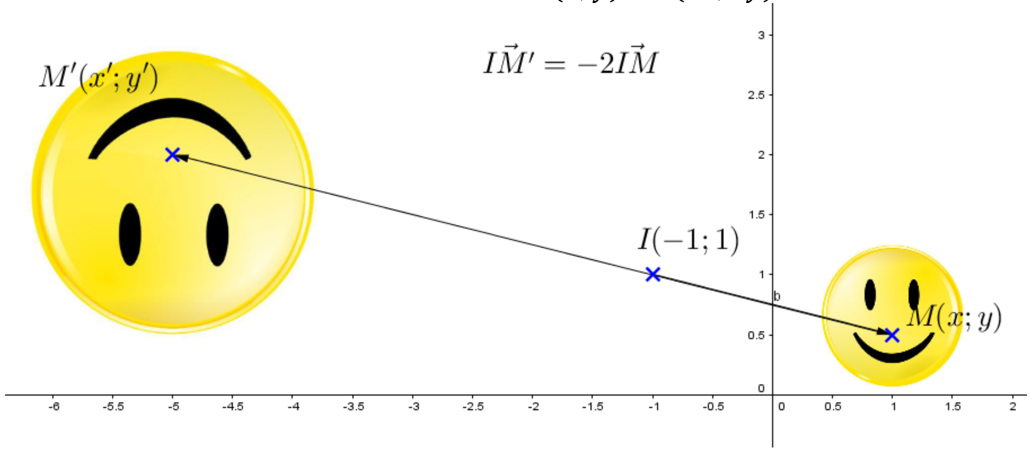
Remarque : L'addition d'un complexe b peut être interprétée géométriquement comme une translation.
On peut représenter cela par la transformation suivante :

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto z+b \end{cases} \quad ou\ f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x;y) \longmapsto (x+Re(b); y+Im(b)) \end{cases}$$

Remarque : De même la multiplication par un réel k non nul peut être interprétée géométriquement comme une homothétie de centre O et de rapport k.

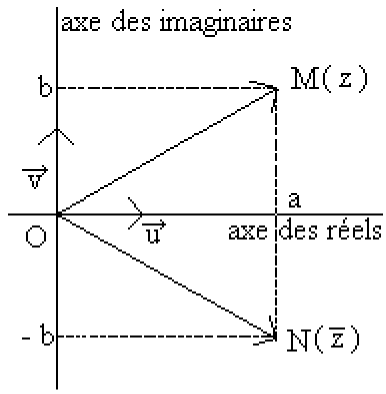
On peut représenter cela par la transformation suivante :
Soit b un complexe. Alors :

$$f_b : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto kz \end{cases} \quad ou\ f_b : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x;y) \longmapsto (kx; ky) \end{cases}$$



Application II.b.1: Soit $A(5;-2)$ et $C(1;-3)$. Déterminer l'image de A par l'homothétie de centre C et de rapport -3

c) Conjugué et division par un nombre complexe



Définition : Soit z un nombre complexe et $z = a+ib$ sa forme algébrique. Alors on définit le conjugué de z, appelé $\bar{z}$, le nombre complexe définie par : $\bar{z} = a - ib$.

Exemple II.c.1 : Déterminer le conjugué des nombres complexes suivants : $z_1 = 2+3i; z_2 = -3-2i; z_3 = -4+5i$

Remarque (interprétation géométrique) : Soit M d'affixe z un point du plan complexe. Alors M' d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique de z par rapport à l'axe des abscisses.

Propriété II.c.2 : $\forall z \in \mathbb{C}$ *on a* $z\bar{z} > 0$ *et dès que* $z \neq 0$.

Remarque : On se sert du conjugué pour déterminer la forme algébrique d'un quotient de nombres complexes.

Exemple II.c.3 : Déterminer la forme algébrique de :

$$z_1 = \frac{2+3i}{1-2i}$$

Exemple II.c.4 : On considère le point M d'affixe $z_M = 3+2i$. Sur la figure ci-dessous, placer M puis les points d'affixes : $z_1 = z_M + 1 - 3i$, $z_2 = -z_M, z_3 = \frac{2}{3}z_M, z_4 = \overline{z_M}, z_5 = iz_M$

Application II.c.5: Résoudre l'équation suivante en donnant la solution sous forme algébrique :

$$2iz + 3 = 4i + 5z$$

Application II.c.6 : Déterminer l´ensemble des nombres complexes tel que :

$$\frac{z-1}{z+2i} \in \mathbb{R}\ et\ \frac{z-1}{z+2i} \in i\mathbb{R}$$

Proposition II.c.7 : On a les relations suivantes :

$$\forall\,(z\,,z') \in\ \mathbb{C}^2,\qquad \overline{z+z'} = \bar{z}+\bar{z'};\ \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'};\ \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$$

Propriété II.c.8 : Soit z ∈ ℂ, on a :

$$(1)\mathcal{R}e(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}\ ;\ \ (2)\,\mathcal{I}m(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i};(3)\ z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z\ \ ;(4)\ z \in i\mathbb{R}\ \Leftrightarrow\ \bar{z} = -z$$

Application II.c.9 **:** Déterminer l´ensemble des nombres complexes tel que :

$$\frac{z-1}{z+2i} \in \mathbb{R}\ et\ \frac{z-1}{z+2i} \in i\mathbb{R}$$

III) Fonctions d'une variable réelle à valeur dans ℂ

Définition : Soit $f: I \to \mathbb{C}$. La dérivée de la fonction f est définie de la façon suivante : Si *Re(f)* et *Im(f)* sont dérivables, alors :

$$f' = re(f)' + i\,Im(f)'$$

On note :

$$\mathcal{D}(I,\mathbb{C}) = \mathcal{D}(I) = \{f: I \to \mathbb{C}; f\ est\ dérivable\ sur\ I\}$$

Exemple III.1 : On pose :

$$f:\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \longmapsto \cos(x) + i\sin(x) \end{cases}$$

Déterminer f'.

Propriété III.2 : Soit $(u;v) \in \mathcal{D}(\mathrm{I},\mathbb{C})^2$. Alors $\left(\lambda u; (u+v);\ uv; \frac{u}{v}\ (\text{où v ne s'annule pas})\right) \in \mathcal{D}(\mathrm{I},\mathbb{C})^4$ et on a :

1) $(u+v)' = u' + v'$
2) $(\lambda \times u)' = \lambda u'$
3) $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$
4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$