

## Chapitre 6 : Nombres complexes

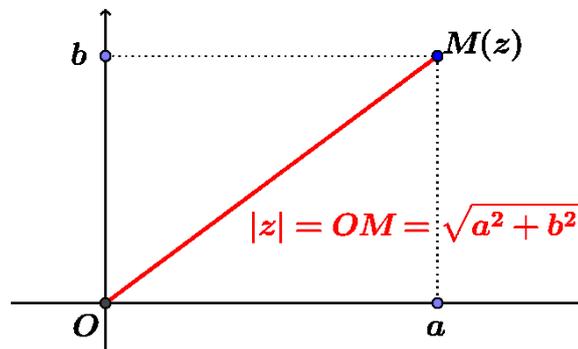
### Partie B : Module et argument d'un nombre complexe

#### I) Module d'un nombre complexe

##### a) Module

**Définition** : Le module d'un nombre complexe  $z$  est la longueur du segment  $[OM]$ , où  $M$  est l'image de  $z$  dans le plan complexe. On note cela  $|z|$ . On a donc :

$z$  [redacted]



**Exemple I.a.1** : Déterminer les modules des nombres suivants :

a)  $z = 1 + 3i$    b)  $z = -2 + i$    c)  $z = -4i$

**Propriété I.a.2** : On a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| = |-z| = |\bar{z}|$$

**Propriété I.a.3** : On a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

##### b) Module et conjugué

**Propriété I.b.1** : Pour tout nombre complexe  $z$ , on a :  $|z|^2 = z\bar{z}$

**Propriété I.b.2** : Pour tout nombre complexe  $z$  et  $z'$  on a :

(1)  $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |zz'| = |z| \times |z'|$

2)  $\forall z \in \mathbb{C}^*, \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$

3)  $\forall z \in \mathbb{C}^*, \forall z' \in \mathbb{C}, \left| \frac{z'}{z} \right| = \frac{|z'|}{|z|}$

**Application I.b.3** : On pose la transformation suivante :

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \frac{2iz - i}{z + 1} \end{cases}$$

Démontrer que si  $|f(z)| = 1$ , alors  $z$  se trouve lui aussi sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

##### c) Distance entre deux points et interprétation géométrique

**Propriété I.c.1** : Soient A et B deux points du plan. On a alors :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A| = |z_A - z_B|$$

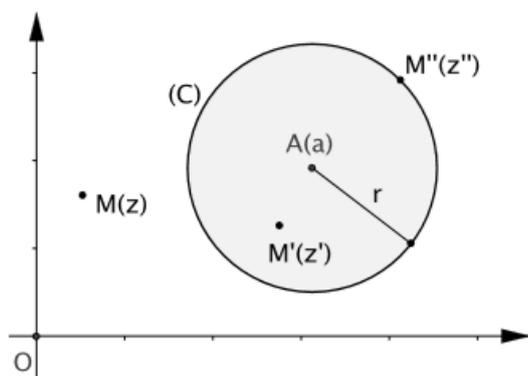
**Application I.c.2**: Soient trois points A, B et C du plan complexe d'affixes :

$$z_A = 2 + (\sqrt{3} + 1)i, \quad z_B = 1 + i \quad \text{et} \quad z_C = 3 + i$$

Démontrer que ABC est équilatéral.

**Application I.c.3** : Déterminer tous les nombres complexes  $z$  tel que  $|z - 2 - i| = 1$

**Application I.c.4 :** Déterminer tous les nombres complexes  $z$  tel que  $|z - 2 - i| = |z + 3 + 2i|$



**Remarque :**

Un point  $M''(z'')$  appartient au cercle de centre  $A(a)$  et de rayon  $r$  si et seulement si :

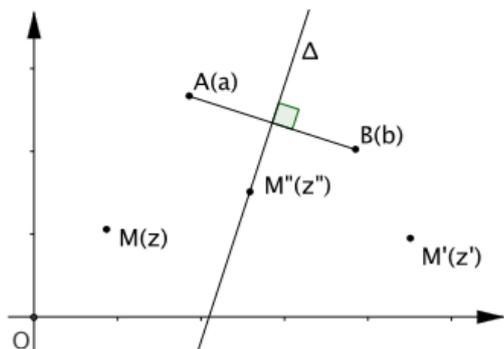
$$|z'' - a| = r$$

Un point  $M'(z')$  est dans le disque de centre  $A(a)$  et de rayon  $r$  si et seulement si :

$$|z' - a| \leq r$$

Un point  $M(z)$  est en dehors du disque de centre  $A(a)$  et de rayon  $r$  si et seulement si :

$$|z - a| > r$$



Un point  $M''(z'')$  appartient à la médiatrice de  $[AB]$  si et seulement si

$$|z'' - a| = |z'' - b|$$

Les points  $M'(z')$  et  $M(z)$  sont en-dehors de la médiatrice. Ici :

$$|z' - a| > |z'' - b|$$

$$|z - a| < |z - b|$$

## d) Inégalité triangulaire

**Propriété I.d.1 :** On a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \begin{cases} \operatorname{Re}(z) \leq |z| \\ \operatorname{Im}(z) \leq |z| \end{cases}$$

**Propriété I.d.2 (Inégalité triangulaire) :**

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}^2, |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

**Application I.d.3 :** Démontrer que :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, ||z| - |z'|| \leq |z + z'|$$

## II) Nombres complexes de module 1 ( $\mathbb{U}$ )

### a) Définition

**Définition :** On appelle cercle trigonométrique et on note  $\mathbb{U}$ , l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$$

**Propriété II.a.1 :**

$$z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$$

**Application II.a.2 :** Démontrer que :

$$z \in \mathbb{U}, z \neq 1 \Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}$$

**b) Notation exponentielle**

**Propriété II.b.1 :**  $z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}$  tel que  $z = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$

On a alors :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}; \exists \theta \in \mathbb{R}, z = \cos(\theta) + i \sin(\theta)\}$$

**Notation :** Pour tout réel  $\vartheta$ , on définit :  $e^{i\vartheta} = \cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta)$

On a alors :  $\mathbb{U} = \{e^{i\theta}; \theta \in \mathbb{R}\}$

**Exemples II.b.2 :** Déterminer la forme algébrique des nombres complexes :  $z_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}$ ,  $z_2 = e^{-5\frac{i\pi}{6}}$ ,  $z_3 = e^{i\pi}$

**Exemple II.b.3 :** Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivant :

$$z_1 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}, z_2 = 1, z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

**c) Propriété de la notation exponentielle**

**Propriété II.c.1 :**  $\forall (\vartheta, \vartheta') \in \mathbb{R}^2, e^{i\vartheta} \times e^{i\vartheta'} = e^{i(\vartheta+\vartheta')}$

**Application II.c.2 :** Déterminer les valeurs de

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) \text{ et } \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

**Propriété II.c.3:**

$$\forall \vartheta \in \mathbb{R}, \frac{1}{e^{i\vartheta}} = e^{-i\vartheta} = \overline{e^{i\vartheta}}$$

$$\forall (\vartheta, \vartheta') \in \mathbb{R}^2, \frac{e^{i\vartheta}}{e^{i\vartheta'}} = e^{i(\vartheta-\vartheta')}$$

**Application II.c.4 :** Déterminer les valeurs de

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

**Propriété II.c.5:** Soit  $(\theta; \theta') \in \mathbb{R}^2$ . On a :

$$e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta = \theta' \text{ (à } 2\pi \text{ - près)} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta' [2\pi]$$

**Propriété II.c.6 :** On pose :  $f: x \mapsto e^{ix}$  définie sur  $\mathbb{R}$ . On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = i e^{ix}$$

**Application II.c.7 :** On pose :  $f: x \mapsto \cos(x) e^x$  définie sur  $\mathbb{R}$ . Déterminer  $f^{(n)}$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ .

**d) Formule de Moivre**

**Propriété II.d.1 (Formule de Moivre) :**

$$\forall \vartheta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, (\cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta))^n = (e^{i\vartheta})^n = \cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta)$$

**Application II.d.2 :** Déterminer la forme algébrique du nombre complexe suivant :

$$a = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{2024}$$

**Application II.d.3** : Démontrer que

$$\forall \vartheta \in \mathbb{R}, \cos(3\vartheta) = 4\cos^3(\vartheta) - 3\cos(\vartheta)$$

**Application II.d.4** : Simplifier :  $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$S_n(\theta) = 1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \dots + \cos(n\theta) = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$$

$$W_n(\theta) = \sin(\theta) + \sin(2\theta) + \dots + \sin(n\theta) = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$$

**Application II.d.5** : Calculer :

$$\sum_{k=0}^{11} \cos\left(\frac{\pi k}{12}\right)$$

**Application II.d.6** : Résoudre sur  $\mathbb{R}$  :  $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$

### d) Formule d'Euler et application

**Propriété II.e.1 (Formule d'Euler)** :

$$\forall \vartheta \in \mathbb{R}, \begin{cases} \cos(\vartheta) = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2} \\ \sin(\vartheta) = \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i} \end{cases}$$

**Application II.e.2** : Démontrer que

$$\forall \vartheta \in \mathbb{R}, \cos^2(\vartheta) = \frac{1}{2} \cos(2\vartheta) + \frac{1}{2}$$

**Application II.e.3** : Déterminer une primitive de  $f: x \mapsto \sin(x)^4$

**Application II.e.4** : Démontrer que

$$\forall \vartheta \in \mathbb{R}, |1 + e^{i\vartheta}| = 2 \left| \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right|$$

**Application II.e.5** :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{R}^2, \cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

## III) Argument d'un nombre complexe

### a) Retour à $\mathbb{U}$

**Proposition III.a.1** : Pour tout nombre complexe  $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$ , il existe un couple  $(r; \vartheta) \in ]0; +\infty[ \times \mathbb{R}$  tel que  $z = r e^{i\vartheta}$ .

**Définition** : Soit  $z$  un nombre complexe non nul. On appelle argument du nombre complexe  $z$ , noté  $\arg(z)$ , tout réel  $\vartheta$  tel que :

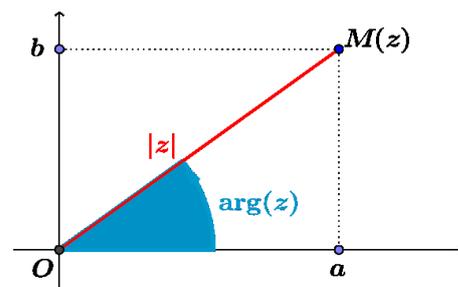
$$\frac{z}{|z|} = e^{i\vartheta}$$

**ATTENTION** : L'argument d'un nombre complexe n'est pas unique !!!  
(seulement à  $2\pi$ -près).

**Remarque** : 0 est le seul nombre complexe qui n'a pas d'argument.

**Interprétation géométrique** : Soit M un point du plan complexe d'affixe z.  
On a alors :

$$\arg(z) = (\vec{i}; \overrightarrow{OM})$$



**Propriété III.a.2** : Pour tout nombre complexe non nul  $z=a+ib$ , d'argument  $\theta=\text{Arg}(z)$ , on a :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) = \frac{b}{|z|} \end{cases}$$

**Application III.a.3** : Déterminer un argument du nombre complexe :

$$z = 1 + i\sqrt{3}$$

### b) Propriété géométrique de l'argument

**Proposition III.b.1** : Soient A et B deux points du plan. On a alors :

$$(\vec{i}; \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$$

**Proposition III.b.2** : Soit A, B, C trois points du plan. On a alors :

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \arg(z_C - z_A) - \arg(z_B - z_A)$$

**Application III.b.3** : Soient  $A(2 ; 3)$ ,  $B(4 ; 5)$  et  $C(3 ; 3+\sqrt{3})$ . Déterminer la mesure de l'angle  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

### c) Forme exponentielle

**Définition/Proposition III.c.1** :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \begin{cases} |z| = r \\ \arg(z) = \vartheta (\text{à } 2\pi - \text{près}) \end{cases} \Leftrightarrow z = re^{i\vartheta}, r > 0$$

$z = re^{i\vartheta}$  s'appelle la forme exponentielle de z.

**Remarque** : Grâce à cette proposition, on a immédiatement la propriété suivante :

**Propriété III.c.2** :  $\forall (z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2, \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$

**Application III.c.3** : Déterminer un argument du nombre complexe :

$$z = (2 + 2i)(1 - \sqrt{3}i)$$

**Remarque** : On peut alors caractériser les rotations grâce à l'exponentielle.

**Application III.c.4** : Soit  $A(2 ; 3)$ . Déterminer l'image de A par la rotation d'angle  $\frac{\pi}{3}$  et de centre  $B(-2 ; -1)$

**Application III.c.5** :  $\forall (z, n) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{N}, \arg(z^n) = n \arg(z)$

**Propriété III.c.6** :

$$\forall (z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2, \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

**Application III.c.7 :** Déterminer un argument de :

$$z = \frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$$

**Remarque :** Cela est très pratique pour calculer des mesures d'angles.

**Application III.c.8 :** On considère trois points A, B et C d'affixes respectives  $a=1-i$ ,  $b=4$  et  $c=3-2i$ . Déterminer une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})$ .

**Propriété III.c.9 :**

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \arg(\bar{z}) = -\arg(z) \text{ (à } 2\pi - \text{près)}$$

**Application III.c.10 :**  $\forall (z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2, \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z \times \bar{z}')$

#### d) Réduction de deux ondes, problème de déphasage

**Propriété III.d.1 :** Soit  $(a, b, \omega) \in \mathbb{R}^3, ab \neq 0$ . Il existe  $(K, \varphi) \in \mathbb{R}^2$  tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = K\cos(\omega t + \varphi)$$

**Application III.d.2 :** Sans utiliser la formule déterminée ci-dessus, déterminer  $K$  et  $\varphi$  réels tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(t) = K\cos(t + \varphi)$$

### **IV) Exponentielle complexe**

#### a) Définition

**Définition :** Soit  $z \in \mathbb{C}, z = a + ib, (a; b) \in (\mathbb{R})^2$ . On définit alors :

$$e^z = e^{a+ib} = e^a(\cos(b) + i\sin(b))$$

**Exemple :** Déterminer la forme algébrique de  $e^{2+\frac{\pi}{2}i}$

**Propriété IV.a.1 :** Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Alors :

$$\begin{cases} |e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)} \\ \arg(e^z) = \operatorname{Im}(z) \text{ (à } 2\pi - \text{près)} \end{cases}$$

#### b) Propriétés

**Propriété IV.b.1 :** L'exponentielle complexe conserve toutes les propriétés de l'exponentielle réel :

$$\forall (z, z') \in (\mathbb{C})^2, e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \frac{1}{e^z} = e^{-z}$$

$$\text{Soit } (z, z') \in (\mathbb{C})^2, e^z = e^{z'} \Leftrightarrow z = z' + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}$$

**Application IV.b.2 :** Résoudre sur  $\mathbb{C}$  l'équation :

$$e^z = 1 + i$$