Chapitre 6 : Nombres complexes
Partie C : Résolution d'équation dans $\mathbb{C}$

I) Equation de degré 2

a) Racine carrée d'un nombre complexe

Définition : Soit z ∈ $\mathbb{C}$. On appelle racine carrée de z, tout nombre complexe u tel que :

$$u^2 = z$$

Exemple I.a.1: Montrer que u est une racine carrée de i avec :

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ATTENTION : La notation $\sqrt{\ }$ n'est réservée que pour les nombres réels positifs.

Propriété I.a.2 : Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées dans $\mathbb{C}$.

Application I.a.3 : Déterminer les racines carrées de $z = 1-i$.

b) Equation du second degré à coefficients complexes

Définition : On appelle équation de degré 2 à coefficients complexes une équation de la forme :

$$az^2 + bz + c = 0 \ avec\ (a; b; c) \in \mathbb{C}^3, a \neq 0$$

Propriété I.b.1 : Soit

$$(E): az^2 + bz + c = 0 \ avec\ (a; b; c) \in \mathbb{C}^3, a \neq 0$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. On a alors :

- Si $\Delta = 0$, (E) admet une unique solution :
$$z = -\frac{b}{2a}$$
- Si $\Delta \neq 0$, (E) admet deux solutions distinctes :
$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a} \\ z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a} \end{cases} \quad où\ \delta^2 = \Delta\ est\ une\ racine\ carrée\ de\ \Delta$$

Application I.b.2 : Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation :

$$iz^2 + 2z - 2 - i = 0$$

Propriété I.b.3 (Relation coefficient racine) : Soit $(a; b; c) \in \mathbb{C}^3, a \neq 0$. On a alors :

$$z_1, z_2\ sont\ les\ solutions\ de\ az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 z_2 = \dfrac{c}{a} \\ z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

Application I.b.4 : Déterminer deux nombres complexes de somme 2 et de produit i.

II) Racine n-ième de l'unité

a) Définition

Définition : Soit n un entier naturel non nul ($n \in \mathbb{N}^*$). On appelle racine n-ième de l'unité tout nombre complexe z tel que $\boxed{\mathbf{z^n = 1}}$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ième de l'unité.

Exemple II.a.1: Montrer que i est une racine 4-ième de l'unité.

Application II.a.2 : Déterminer les racines 2-ièmes de l'unité.

b) Détermination des racines n-ièmes

Propriété II.b.1 :

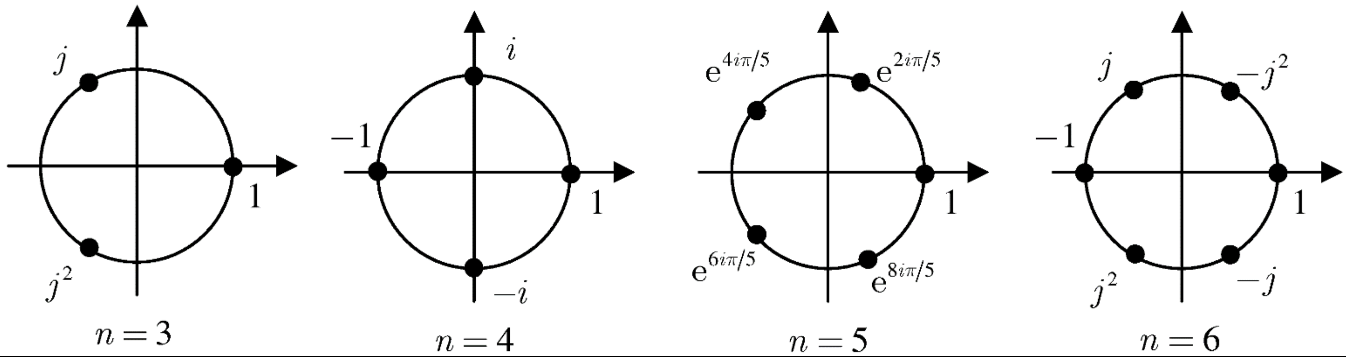
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} ; k \in [\![0; n-1]\!] \right\}$$

Application II.b.2 : Déterminer les racines 3-ième de l'unité.

Application II.b.3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(z-i)^n = (z+i)^n$$

Propriété II.b.4 (Interprétation géométrique) :Soit $n \geq 3$. Pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, on pose $\zeta_{n,k} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Alors les points $M_{n,k}(\zeta_{n,k})$ définissent les sommets d'un polygône régulier à n côtés.



c) Propriétés des racines i-ième

Propriété II.c.1 : Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et $\xi_1 = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ Alors les racines n-ième de l'unité sont :

$$1; \xi_1; (\xi_1)^2; \ldots.; (\xi_1)^{n-1}$$

Propriété II.c.2 : Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et $\left(z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)_{0 \leq k \leq n-1}$. On a alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k = 0$$

Application II.c.3 : Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation :

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^6 = 0$$

III) Racine n-ième d'un complexe

a) Définition

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}^*$. On appelle racine n-ième de z tout nombre complexe ω tel que :

$$\omega^n = z$$

Exemple III.a.1: Montrer que 1+i est une racine 3-ième de –2+2i.

b) Propriété

Propriété III.b.1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}^*$. Alors z admet exactement n racines complexes de l'unité de la forme :

$$\omega_k = z_0 e^{\frac{2ik\pi}{n}} ; k \in [\![0; n-1]\!]$$

Avec z_0 une racine n-ième de z.

Application II.b.2 : Résoudre l'équation

$$z^5 = 1 + \sqrt{3}i$$