TD 6 : Nombres complexes

Partie A : Utilisation de l'écriture *z =x+iy*

Exercice A.1 : A quelle condition $Z = z^2 + 2z + 1 - 3i$ est-il un réel ?

Exercice A.2 : Déterminer l'ensemble des points dont l'affixe vérifie :

$$z\bar{z} + z + \bar{z} - 1 = 0$$

Partie B : Utilisation du conjugué pour la division des nombres complexes et propriétés du conjugué

Exercices B.1 : Déterminer la partie réelle et imaginaire des nombres complexes suivants :

$$a)\ z = (1-3i)(5+2i) \quad b)\ z = \frac{2+i}{5-2i} \quad c)\ z = (2+i)^2 \quad d)\ z = \frac{1}{1-2\sqrt{3}i}$$

Exercice B.2 : a) Soit z un nombre complexe différent de 1+i. En posant z = x+iy, déterminer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe :

$$Z = \frac{z-2i}{z-1-i}$$

b) Déterminer l´ensemble (Γ) des points M d´affixes z tels que Z soit un réel et l´ensemble (E) des points M tels que Z soit un imaginaire pur.

c) Déterminer $\overline{\mathrm{Z}}$ en fonction de z puis retrouver le résultat de la question b).

d) Déterminer l´ensemble des nombres complexes tel que Z^2 soit un réel.

Exercice B.3 : Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} iz - 2w = -4 + 3i \\ 2\bar{w} + \bar{z} = 3 \end{cases}$$

Exercice B.4 : Démontrer que pour tout nombre complexe du plan :

$$(\bar{z})^n = \overline{(z^n)}$$

Partie C : Module d'un nombre complexe

Exercice C.1 : Démontrer que :

$$|\mathrm{z}| \leq 1 \Longrightarrow \mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{z}^2 + 4\mathrm{z} + 3) \geq 0$$

Exercice C.2 : Démontrer que :

$$\forall (u;v) \in \mathbb{C}^2, \begin{cases} |u| = |v| = 1 \\ uv \neq -1 \end{cases} => \frac{u+v}{1+uv} \in \mathbb{R}$$

b) La réciproque est-elle vraie ?

Exercice C.3 : Démontrer que :

$$\forall (u;v) \in \mathbb{C}^2, \bar{a}b \neq 1, \begin{cases} |a| = 1 \\ ou \\ |b| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| = 1$$

Exercice C.4 : On pose a$\in \mathbb{C}$, tel que $|\mathrm{a}| < 1$. On pose alors la transformation suivante :

$$f_a : \begin{cases} \mathbb{C} \backslash \left\{\dfrac{1}{\bar{a}}\right\} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z} \end{cases}$$

1) Démontrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \Longrightarrow |f_a(z)| = 1$$

2) Démontrer que la réciproque est vraie.

3) On définit :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$$

On pose alors :

$$g_a : \begin{cases} \mathbb{U} \to \mathbb{U} \\ z \mapsto \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z} \end{cases}$$

(on dit que g_a est la restriction de f_a sur $\mathbb{U}$, noté aussi : $f_a|_{\mathbb{U}}$)
Déterminer alors g_a^{-1}.

Exercice C.5 : Soit ABCD un parallélogramme. Démontrer que :

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$$

Exercice C.6 : Déterminer l'ensemble des points du plan d'affixe z tel que :

$$a)\ |z| = 1 \qquad b) |z| \leq 3 \qquad c)\ |z + 2 - 3i| = 2 \qquad d)\ |z + 2i| = |z - 3 - i|$$

Exercice C.7 : Démontrer que :

$$\forall (a; b) \in \mathbb{C}^2, 1 + |1 - ab| \leq (1 + |a - 1|)((1 + |b - 1|)$$

Exercice C.8 : 1) Démontrer que :

$$\forall (a; b) \in \mathbb{C}^2, |a| + |b| \leq |a + b| + |a - b|$$

2) Etudiez les cas d'égalités.

Exercice C.9 : Démontrer que :

$$\forall (a; b; c) \in \mathbb{C}^3, |1 + a| + |b + a| + |c + b| + |c| \geq 1$$

Exercice C.10 : Démontrer que :

$$\forall\ (z_1; \dots; z_n) \in \mathbb{C}^n, |z_1 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + \cdots + |z_n|$$

Autrement noté :

$$\forall\ (z_1; \dots; z_n) \in \mathbb{C}^n, \left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |z_i|$$

Partie D : Avec la forme exponentielle

Exercice D.1 : Ecrire $\cos^3(x)$ en fonction de $cos(3x), cos(2x)\ , cos(x)\ et\ 1$. Faire de même avec $sin^3(x)$ en fonction de $sin(3x), sin(2x)\ , sin(x)\ et\ 1$

Exercice D.2 : Ecrire $cos(3x)$ comme une fonction polynôme de $cos(x)$. Faire de même avec $sin(3x)$ comme une fonction polynôme de $sin(x)$.

Exercice D.3 : Soit $\vartheta \in]-\pi; \pi[$. Déterminer la forme algébrique de :

$$a)\ z_a = (2 + i)e^{3i\vartheta} \qquad b)\ z_b = (1 - 2i)e^{-i\vartheta} \qquad c)\ z_c = \frac{e^{2i\vartheta}}{1 - i}$$

$$d)\ z_d = \left(\sqrt{3} - i\right)^{2018} \qquad e)\ z_n = \left(1 + e^{i\vartheta}\right)^n \qquad f)\ z_f = \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{666}$$

Exercice D.4 : Soit x réel. Ecrire les nombres réels suivant sous la forme Acos $(x - \omega)$ avec A>0 et $\omega \in \mathbb{R}$.

$$a)\ f(x) = cos(x) + sin(x) \qquad b)\ g(x) = cos(x) - \sqrt{3}\, sin(x) \qquad c)\ h(x) = acos\ (x) + b\ sin\ (x)$$

Exercice D.5 : Calculer :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} sin(3kx)$$

Exercice D.6 : Soit x réel. Résoudre l'équation (lorsqu'elle a un sens) :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{cos(kx)}{cos^k(x)} = 0$$

Exercice D.7 : Démontrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} |cos(kx)| \geq \frac{2n+5}{8}$$

Partie E : Module et argument

Exercice E.1 : Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$a)\ z_a = 1 + i \qquad b)\ z_b = \sqrt{3} - i \qquad c)\ z_c = (-3 + 3i)^{456}$$

Exercice E.2 : Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$a)\ z_a = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} \qquad b)\ z_b = -2i(2+2i) \qquad c)\ z_c = \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{6}+i\sqrt{2}} \qquad d)\ z_d = 1 + i\,tan(\vartheta)$$

$$e)\ z_e = 1 + e^{i\vartheta} \qquad f)\ z_f = 1 - e^{i\vartheta} \qquad g)\ z_g = \frac{1 + cos(\vartheta) + isin(\theta)}{1 - cos(\vartheta) - isin(\theta)} \qquad h)\ z_h = (1+i)^n$$

Exercice E.3 : Pour quelles valeurs de n, le nombre complexe :

$$\left(\frac{\left(1 - i\sqrt{3}\right)^5}{(1-i)^3}\right)^n$$

Est-il un réel positif ?

Exercice E.4 : Déterminer l'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tel que :

1) $arg(z) = \frac{\pi}{3}$ 2) $arg(z - 1 + 2i) = -\frac{3\pi}{4}$

Exercice E.5 : Ecrire l'écriture complexe de la rotation de centre A(1 ;-2) et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Exercice E.6 : Soient A(2 ;-3), B(5 ;-1) et $C\left(1 + 2\sqrt{3}; 2 - 3\sqrt{3}\right)$. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$.

Exercice E.7 : A quelle condition les points A(a), B(b) et C(c) forment-ils un triangle équilatéral ?

Exercice E.8 : Déterminer les nombres complexes z tels que :

- 1,z et z^2 forment un triangle rectangle isocèle.
- z, z^2 et z^4 sont alignés.

Partie F : Exponentielle complexe

Exercice F.1 : Résoudre sur $\mathbb{C}$:

1) $e^z = i$ 2) $e^z = 1 + i\sqrt{3}$ 3) $e^z = 3i$

Partie G : Equation sur $\mathbb{C}$

Exercice G.1 : Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

$$1)\ z = 1 + 6i \qquad 2)\ z = -119 + 120i$$

Exercice G.2 : Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Soit u une racine carrée de zz'. Démontrer que :

$$|z| + |z'| = \left|\frac{z+z'}{2} + u\right| + \left|\frac{z-z'}{2} + u\right|$$

Exercice G.3 : Calculer les racines carrée de :

$$Z_{a,b} = 4ab + 2(a^2 - b^2)i\ avec\ (a; b) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice G.4 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
1) $z^2 - 2iz + 2 - 4i = 0$
2) $(2+i)z^2 + (5-i)z + 2 - 2i = 0$
3) $z^4 + (3-6i)z^2 - 2(4+3i) = 0$
4) $z^{2n} - 2\,cos(n\theta)\,z^n + 1 = 0$ $où$ $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$

Exercice G.5 : On pose l'équation (E) :

$$(E): 2z^3 - (3+4i)z^2 - (4-7i)z + 4 + 2i = 0$$

1) Montrer que (E) admet une solution réel.
2) En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice G.6 : On pose l'équation (E) :

$$(E): z^3 + (1-2i)z^2 + (1-i)z - 2i = 0$$

1) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure.
2) En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice G.7 : Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 1 + i \\ xy = 2 - i \end{cases}$$

Exercice G.8 : Démontrer que pour tout x réel distinct de [-1 ;1] ($x \in \mathbb{R}\backslash[-1;1]$), il existe un unique z complexe tel que :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ |z| > 1 \end{cases}$$

Exercice G.9 : Résoudre :
1) $z^{10} = 1$
2) $z^5 = -1$

Exercice G.10 : Résoudre :
1) $z^5 = \dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}$
2) $(z+1)^n = (z-1)^n$
3) $4(z+i)^4 - (z+1)^4 = 0$

Exercice G.11 : On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{7}}, u = z + z^2 + z^4$ et $v = z^3 + z^5 + z^6$.
1) Calculer u+v puis u^2 en fonction de u et de v.
2) En déduire la valeur de :

$$S = sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$$

Exercice G.12 : Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{4} cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{11}\right) = cos\left(\frac{\pi}{11}\right) + cos\left(\frac{3\pi}{11}\right) + cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) + cos\left(\frac{7\pi}{11}\right) + cos\left(\frac{9\pi}{11}\right) = \frac{1}{2}$$

Exercice G.13 : Soient $z_1, z_2, .., z_n$ les n racines n-ième de a (avec $|a| = 1$). Montrer que les points images de $(1+z_1)^n, (1+z_2)^n, \ldots, (1+z_n)^n$ sont alignés.

Exercice G.14 : Résoudre l'équation sur $\mathbb{C}$:

$$(x+1)^5 - (x-1)^5 = 0$$