Correction DS n°1

Exercice 1 : Une petite étude de fonction

Dans tout cet exercice on pose :

$$f : x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Montrer que f n'est ni paire, ni impaire.
3) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Quelles conséquences peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
4) a) Calculer $f'(x)$ puis tracer le tableau de variations de f.
b) Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un ensemble à déterminer.
c) Expliciter f^{-1}.
5) Démontrer que f' est paire.
6) a) Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$, dérivable et impaire. Montrer que g' est paire.
b) Démontrer que la réciproque est fausse.
7) Déterminer l'équation de la tangente, notée (T_0), à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = 0$.
8) a) Démontrer que :

$$\frac{e^x}{1+e^x} \geq \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq 0$$

b) En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ avec sa tangente (T_0). (C'est-à-dire pour quelle valeur d'abscisse x la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus, ou au-dessous, de sa tangente).
9) Démontrer que $\mathcal{C}_f$ admet un centre de symétrie dont on donnera les coordonnées.
10) Tracer $\mathcal{C}_f$. On fera apparaître (T_0) ainsi que ses éventuelles asymptotes.

1) On sait que $x \mapsto e^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ et de plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0 \; donc \; e^x + 1 > 0 \; donc \; e^x + 1 \neq 0$$

Donc $\boldsymbol{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}}$.

---

2) On a :

$$\boldsymbol{f(0) = \frac{1}{2} \; donc \; f \; n'est \; pas \; impaire}$$

De plus on a :

$$f(1) = \frac{e}{1+e} \; et \; f(-1) = \frac{e^{-1}}{1+e^{-1}} = \frac{1}{e+1}$$

On a donc :

$$f(1) - f(-1) = \frac{1}{1+e}(e-1) \neq 0$$

On en déduit donc que $\boldsymbol{f(1) \neq f(-1)}$**. Donc $\boldsymbol{f}$ n'est pas paire**.

---

3) On sait que :

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 0$$

De plus on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{e^{-x}(1+e^x)} = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = 1$$

Donc **$\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$ et d'équation $y = 1$ en $+\infty$**.

---

4) a) On sait que $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par quotient. De plus on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - (e^x)^2}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$$

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}$. On a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	1

---

b) On a :

- **$f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$**
- **f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$**
- $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 \end{cases}$

Les hypothèses du théorème de la bijection sont vérifiées. On en déduit donc que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0;1[$.

c) Soit $y \in]0;1[$. On résout :

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x}{1+e^x} = y \Leftrightarrow e^x(1-y) = y \Leftrightarrow e^x = \frac{y}{1-y} \; car \; y \in]0;1[\; donc \; 1-y \neq 0$$

De plus on sait que :

$$\forall y \in]0;1[, \frac{y}{1-y} > 0$$

On en déduit donc que :

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$$

Ainsi on a :

$$\boldsymbol{f^{-1}: y \mapsto \ln\left(\frac{y}{1-y}\right) \; pour \; y \in]0;1[}$$

---

5) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(-x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{1}{e^x \times [e^{-x}(e^x+1)]^2} = \frac{1}{e^{-x}(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$
$$= f(x)$$

Ainsi f' est paire.

---

6) a) Soit g une fonction impaire. On pose $h: x \mapsto g(x) + g(-x)$.

On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = g(x) + g(-x) = 0$$

g étant dérivable on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = g'(x) + \left(-g'(-x)\right) = g'(x) - g'(-x) = 0$$

Ainsi on a :

$$\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R}, g'(-x) = g'(x)}$$

Donc une fonction paire et dérivable donne bien une fonction dérivée impaire.

b) La réciproque est fausse, on peut prendre pour contre-exemple la fonction **f donnée dans l'exercice**.

---

7) On sait que :

$$\boldsymbol{(T_0): y = f'(0)x + f(0) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}}$$

---

8) a) On pose :

$$h: x \mapsto f(x) - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)$$

On a alors $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} - \frac{1}{4} = \frac{4e^x - (1+e^x)^2}{(1+e^x)^2} = -\frac{(1-e^x)^2}{(1+e^x)^2} \leq 0$$

On en déduit donc que h est décroissante sur $\mathbb{R}$. Or on a :

$$h(0) = 0$$

On en déduit donc que :

$$h(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$$

On peut résumer cela dans le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	$\searrow$	0	$\searrow$

b) On en déduit donc que **$\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente sur $]0; +\infty]$ et en dessous pour $[0; +\infty[$.**

---

9) On a :

$$f(0) = \frac{1}{2}$$

Cela nous invite à poser la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x) - \frac{1}{2} = \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{1}{2} = \frac{2e^x - (1+e^x)}{2(1+e^x)} = \frac{e^x - 1}{2(e^x+1)}$$

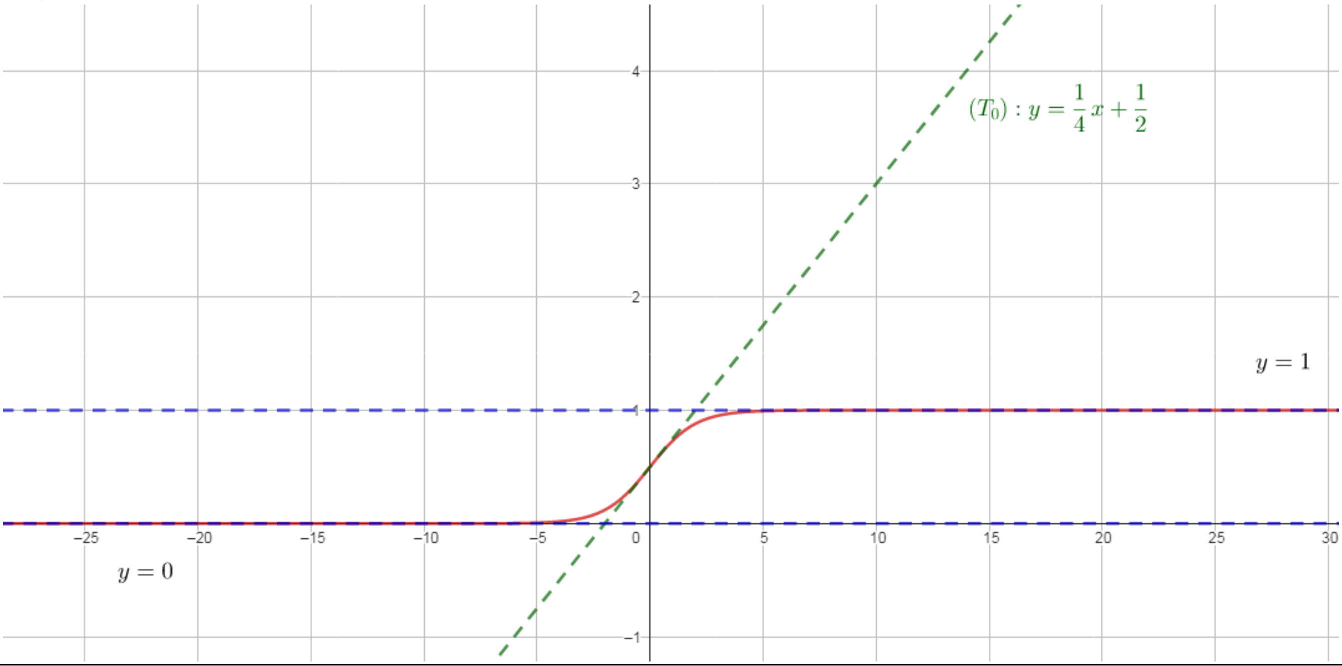
On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{2(e^{-x}+1)} = \frac{1-e^x}{2(1+e^x)} = -g(x)$$

Ainsi la courbe de g est symétrique par rapport au point $O(0;0)$.

Comme $\mathcal{C}_f$ s'obtient de $\mathcal{C}_g$ par translation de vecteur $\vec{u}\left(\frac{1}{2};0\right)$, on en déduit donc que $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à $\boldsymbol{A\left(\frac{1}{2};0\right)}$.

10) On a la courbe suivante :



Exercice 2 : Trois droites concourantes

Dans cet exercice on pose :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x} \ pour \ x > 0$$

$\mathcal{C}_f$ représente la courbe de f.

De même on pose (Δ) la droite d'équation :

$$(\Delta) : y = x$$

On trouve parfois « première bissectrice » pour nommer (Δ).

1) Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 3$, notée (T_3), puis au point $x = \frac{1}{3}$, notée $\left(T_{\frac{1}{3}}\right)$.

2) Montrer que $(T_3), \left(T_{\frac{1}{3}}\right)$ et (Δ) sont concourantes.

3) Soit $a > 1$. Montrer que $(T_a), \left(T_{\frac{1}{a}}\right)$ et (Δ) sont concourantes au point d'abscisse $x = \frac{2a}{1+a^2}$. On pose M_a le point d'intersection des trois droites.

4) Déterminer l'ensemble géométrique formé par les points M_a pour $a > 1$, noté (Γ) :

$$(\Gamma) = \{M_a \ tel \ que \ a \in]1;+\infty[\}$$

1) On a :

$$\boldsymbol{(T_3): y = f'(3)(x-3) + f(3) = -\frac{1}{9}(x-3) + \frac{1}{3} = -\frac{1}{9}x + \frac{2}{3}}$$

De même on a :

$$\boldsymbol{\left(T_{\frac{1}{3}}\right): y = -9x + 6}$$

---

2) On résout :

$$-\frac{1}{9}x + \frac{2}{3} = -9x + 6 \Leftrightarrow -x + 6 = -81x + 54 \Leftrightarrow 80x = 48 \Leftrightarrow x = \frac{48}{80} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

Or on a :

$$-\frac{1}{9} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{3} = -\frac{1}{15} + \frac{10}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

Donc on a : $\boldsymbol{M_3(0,6; 0,6)}$ qui appartient bien aux trois droites. Ainsi les trois droites sont concourantes en M_3.

---

3) Soit $a > 1$. On a de même :

$$(T_a): y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$$

$$\left(T_{\frac{1}{a}}\right): y = -a^2x + 2a$$

On résout :

$$-\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a} = -a^2x + 2a \Leftrightarrow x(a^4 - 1) = 2a^3 - 2a$$

Or on sait que $a > 1$ donc $a^4 - 1 \neq 0$. On a donc :

$$x(a^4 - 1) = 2a^3 - 2a \Leftrightarrow x = \frac{2a(a^2 - 1)}{a^4 - 1} = \frac{2a}{a^2 + 1}$$

Enfin on a :

$$y = -\frac{1}{a^2} \times \frac{2a}{a^2 + 1} + \frac{2}{a} = \frac{2}{a} - \frac{2}{a(a^2 + 1)} = \frac{2}{a}\left(\frac{a^2 + 1 - 1}{a^2 + 1}\right) = \frac{2a}{a^2 + 1}$$

Ainsi on en déduit que :

$$M_a\left(\frac{2a}{a^2 + 1}; \frac{2a}{a^2 + 1}\right) \in (T_a) \cap \left(T_{\frac{1}{a}}\right)$$

Comme $\boldsymbol{y_{M_a} = x_{M_a}}$ **on en déduit que les trois droites sont concourantes**.

---

4) Il suffit d'étudier la fonction suivante sur $]1; +\infty[$:

$$f: a \mapsto \frac{2a}{a^2 + 1}$$

On a $f \in \mathcal{D}(]1; +\infty[)$ et :

$$\forall a > 1, f'(a) = 2\frac{a^2 + 1 - 2a^2}{(a^2 + 1)^2} = 2\frac{1 - a^2}{(a^2 + 1)^2}$$

Or on sait que $a > 1$ donc $1 - a^2 < 0$. On a donc f décroissante.

De plus on a :

$$\lim_{a\to 1} f(a) = 1 \; et \; \lim_{a\to+\infty} \frac{2a}{a^2+1} = \lim_{a\to+\infty} \frac{2}{a+\frac{1}{2}} = 0$$

On a donc le tableau de variations suivant :

a	1	$+\infty$
$f'(a)$	$-$	
f	$1 \searrow$	0

On en déduit donc que **(Γ) est le segment ouvert $]OA[$ avec $O(0;0)$ et $A(1;1)$**.

Problème 1 : La dérivée n-ième d'une fonction qui dépend de n

Le but de cet exercice est de démontrer par récurrence le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, \frac{d^n}{dx^n}(x^n \ln(x)) = n! \times \left[\ln(x) + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right]$$

En posant :

$$f_n : x \mapsto x^n \ln(x) \;\; sur \;]0;+\infty[$$

Cela revient à écrire l'égalité cherchée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, (f_n)^{(n)}(x) = n! \times \left[\ln(x) + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right]$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose alors la propriété suivante :

$$\mathcal{P}_n : \text{"}\forall x > 0, (f_n)^{(n)}(x) = n! \times \left[\ln(x) + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right]\text{"}$$

Partie A : Echauffement pour $n = 1, 2$

1) On a :

$$f_1 : x \mapsto x \times \ln(x) \;\; sur \;]0;+\infty[$$

Montrer que $\mathcal{P}_1$ est vraie.

2) Enfin avec :

$$f_2 : x \mapsto x^2 \times \ln(x) \;\; sur \;]0;+\infty[$$

Montrer que $\mathcal{P}_2$ est vraie.

Partie B : Un petit raccourci de la formule de Leibniz (que nous verrons plus tard !)

Soit g une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et indéfiniment dérivable. On pose :

$$h : x \mapsto xg(x) \; pour \; x \in I$$

1) Expliquez pourquoi h est indéfiniment dérivable.

2) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{d^n}{dx^n}\big(h(x)\big) = h^{(n)}(x) = n \times g^{(n-1)}(x) + xg^{(n)}(x)$$

3) Démontrer alors par récurrence que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(On explicitera clairement les questions précédentes utilisées, sans pour autant les redémontrer.)

Partie A :

1) On a :

$$\forall x > 0, (f_1)^{(1)}(x) = f_1'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

De plus on a :

$$\mathbf{1! \times \left(\ln(x) + \frac{1}{1}\right) = \ln(x) + 1}$$

Ainsi P_1 est vraie.

---

2) On a :

$$\forall x > 0, f_2(x) = x^2 \ln(x)$$
$$\Longrightarrow \forall x > 0, f_2'(x) = 2x\ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x\ln(x) + x$$
$$\Longrightarrow \forall x > 0, f_2''(x) = 2\ln(x) + 2x \times \frac{1}{x} + 1$$
$$= 2\ln(x) + 2 + 1$$
$$= \mathbf{2\left(\ln(x) + 1 + \frac{1}{2}\right)}$$

Ainsi P_2 est vraie.

Partie B :

1) g est indéfiniment dérivable et $x \mapsto x$ est elle aussi indéfiniment dérivable donc par produit h est indéfiniment dérivable.

---

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose Q_n la proposition suivante :

$$Q_n = "\forall x \in \mathbb{R}, h^{(n)}(x) = n \times g^{(n-1)}(x) + xg^{(n)}(x)"$$

Méthode 1 : Par récurrence

Initialisation : $n = 1$

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = g(x) + xg'(x)$$

De plus on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 \times g^{(1-1)}(x) + xg^{(1)}(x) = g^{(0)}(x) + xg^{(1)}(x) = g(x) + xg'(x)$$

Ainsi Q_1 est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel, $n \geq 1$. On suppose vraie Q_n. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h^{(n)}(x) = n \times g^{(n-1)}(x) + xg^{(n)}(x)$$

Cela implique que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h^{(n+1)}(x) = \left(h^{(n)}\right)'(x) = \frac{d}{dx}\left(n \times g^{(n-1)}(x) + xg^{(n)}(x)\right)$$

$$= n \times \frac{d}{dx}\left(g^{(n-1)}(x)\right) + \frac{d}{dx}\left(xg^{(n)}(x)\right)$$
$$= ng^{(n)}(x) + g^{(n)}(x) + xg^{(n+1)}(x)$$
$$= \boldsymbol{(n+1)g^{(n)}(x) + xg^{(n+1)}(x)}$$

Donc Q_n est héréditaire.
Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.

Méthode 2 : Par itération du procédé

Ici je préfère conseiller de ne pas l'utiliser car on vous donne la réponse. Néanmoins je vous montre la technique (et surtout la manière de rédiger) car cela peut être utile si l'on ne vous donne pas l'expression à déterminer.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$h(x) = xg(x)$$
$$\Longrightarrow h'(x) = g(x) + xg'(x)$$
$$\Longrightarrow h''(x) = g'(x) + g'(x) + xg''(x) = 2g'(x) + xg''(x)$$
$$\Longrightarrow h'''(x) = 2g''(x) + g''(x) + xg'''(x) = 3g''(x) + xg'''(x) = 3g^{(2)}(x) + xg^{(3)}(x)$$
$$\Longrightarrow h^{(4)}(x) = 3g^{(3)}(x) + g^{(3)}(x) + xg^{(4)}(x) = 4g^{(3)}(x) + xg^{(4)}(x)$$

$$\Longrightarrow \vdots \quad (\boldsymbol{en\ réitérant\ le\ procédé})$$

$$\Longrightarrow h^{(n)}(x) = ng^{(n-1)}(x) + xg^{(n)}(x)$$

Le mieux, si vous n'avez pas l'expression de $h^{(n)}(x)$, est de calculer les 4 premiers termes comme je l'ai fait, puis de dire que l'on conjecture l'expression de $h^{(n)}$, puis on fait une récurrence.
Là c'est parfait !

---

3)
Initialisation : $n = 1$
C'est la première question de la partie A
Hérédité : Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On suppose que P_n est vraie.
On a alors :

$$\forall x > 0, (f_n)^{(n)}(x) = n! \times \left[\ln(x) + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right]$$

De plus on a :

$$\forall x > 0, f_{n+1}(x) = x^{n+1}\ln(x) = x \times f_n(x)$$

On a donc :

$$\forall x > 0, \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(f_{n+1}(x)\right) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(xf_n(x)\right)$$
$$= x \times \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(f_n(x)\right) + (n+1)\frac{d^n}{dx^n}\left(f_n(x)\right) \ (d'après la\ question\ 2\ de\ la\ partie\ B)$$

Or on sait d'après l'hypothèse de récurrence que :

$$\frac{d^n}{dx^n}\big(f_n(x)\big) = n! \times \left[\ln(x) + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right]$$

On en déduit donc que :

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\big(f_n(x)\big) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^n}{dx^n}\big(f_n(x)\big)\right) = \frac{d}{dx}\left(n! \times \left[\ln(x) + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right]\right) = \frac{n!}{x}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x > 0, \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\big(f_{n+1}(x)\big) = x \times \frac{n!}{x} + (n+1) \times n! \times \left[\ln(x) + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right]$$

Or on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1) \times n! = (n+1)!\, et\ n! = \frac{(n+1)!}{n+1}$$

On a donc :

$$\forall x > 0, \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\big(f_{n+1}(x)\big) = \frac{(n+1)!}{n+1} + (n+1)!\left(\ln(x) + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

$$\boldsymbol{= (n+1)!\left(\ln(x) + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)}$$

Donc P_n est héréditaire.

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.

Problème 2 : La fonction de Lambert

Soit $k \in \mathbb{R}$. L'objet de ce problème est d'exprimer certaines solutions de l'équation :

$$(E_k): \frac{x}{\ln(x)} = k, d'inconnue\ x$$

Dans la suite, on désigne par $f\ et\ g$ les fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)} \quad et \quad g(x) = xe^x$$

Partie A : Etude de f

1) Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2) Calculer les limites de f en $0, 1\ et + \infty$.
3) Dresser le tableau de variations de f.
4) Justifier que f réalise une bijection de $]1; e]$ vers un ensemble à déterminer.
5) Discuter en fonction de k du nombre de solutions de l'équation (E_k).

Dans toute la suite on note $f^{-1}: [e; +\infty[\to]1; e]$ la réciproque de f.

Partie B : Fonction W de Lambert

1) Déterminer l'ensemble de définition de g.
2) Démontrer que g réalise une bijection de $[-1; +\infty[$ dans $[-e^{-1}; +\infty[$.

On pose alors $W: [-e^{-1}; +\infty[\to [-1; +\infty[$ sa bijection réciproque.
W est appelée la fonction de Lambert.
3) A l'aide des variations de g, dressez le tableau de variation de W. On fera apparaître les valeurs de $W(-e^{-1}), W(0), W(e)$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} W(y)$.
4) a) Montrer que W est dérivable sur $]-e^{-1}; +\infty[$ puis que :

$$\forall y > -e^{-1}\ et\ y \neq 0, W'(y) = \frac{W(y)}{y\big(1+W(y)\big)}$$

b) Déterminer $W'(0)$.

Partie C : Expression des solutions de (E_k) à l'aide de W
Dans cette partie on considère $k \geq e$.
1) Soit $x > 0$. Justifier qu'il existe un unique $z \in \mathbb{R}$ tel que $x = e^{-z}$.
2) Etablir que :

$$f(x) = k \Leftrightarrow g(z) = -\frac{1}{k}$$

3) Exprimer une des deux solutions de $f(x) = k$ en fonction de W. On précisera la solution donnée.

Partie A : Etude de f

1) On sait que $\mathcal{D}_{ln} =]0; +\infty[$. De plus on sait que

$$\ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\mathcal{D}_f =]0; 1[\cup]1; +\infty[}$$

---

2) On sait que :

$$\lim_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty\ et\ \lim_{x\to0^+} \ln(x) = 0$$

On en déduit donc par quotient que :

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x}{\ln(x)} = 0$$

De même on a :

$$\lim_{x\to1^-} \ln(x) = 0^-\ donc\ \lim_{x\to1^-} \frac{x}{\ln(x)} = \lim_{x\to1^-} \frac{1}{\ln(x)} = -\infty$$

De même on a :

$$\lim_{x\to1^+} \ln(x) = 0^+\ donc\ \lim_{x\to1^+} \frac{x}{\ln(x)} = \lim_{x\to1^+} \frac{1}{\ln(x)} = +\infty$$

Enfin on sait que :

$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty\ (par\ croissance\ comparée)}$$

---

3) On sait que f est dérivable sur $]0; 1[$ et $]1; +\infty[$ par quotient de fonctions dérivables et :

$$\forall x > 0, x \neq 1, f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{[\ln(x)]^2}$$

De plus on sait que :

$$\ln(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > 1 \Leftrightarrow x > e \ (car\ x \mapsto e^x\ est\ croissante\ sur\ \mathbb{R})$$

De plus on sait que

$$f(e) = \frac{e}{\ln(e)} = e$$

On a donc le tableau suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$		$+$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

---

4) On sait que f est continue sur $]1; e]$ par quotient de fonctions dérivables. De plus f est strictement décroissante sur $]1; e]$. Donc d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $]1; e]$ dans $[e; +\infty[$ d'après les limites étudiées précédemment.

5) D'après le théorème de la bijection appliqué sur chaque intervalle $]0; 1[,]1; e]$ et $[e; +\infty[$ et d'après les variations établies précédemment on a :

$$f(x) = k \text{ admet } \begin{cases} \text{Une unique solution si } k < 0 \text{ ou } k = e \\ \text{aucune solution si } 0 \leq k < e \\ \text{deux solutions si } k > e \end{cases}$$

Partie B : Fonction W de Lambert

1) On sait que $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x$ sont définies (continues et dérivables également) donc $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$.

---

2) On sait que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$-e^{(-1)}$	$\nearrow$	

On sait que f est continue et strictement croissante sur $[-1; +\infty[$ donc d'après le théorème de la bijection, on en déduit donc que f réalise une bijection de $[-1; +\infty[$ dans $[-e^{-1}; \lim\limits_{x \to +\infty} xe^x [$

Or on sait que :

$$\lim_{x \to +\infty} xe^x = +\infty \ (par\ produit)$$

On en déduit donc que $\boldsymbol{f}$ **réalise une bijection de** $[-\mathbf{1}; +\infty[$ **dans** $[-\boldsymbol{e}^{-\mathbf{1}}; +\infty[$.

---

3) On sait que :

$$g(-1) = -e^{-1}\ donc\ W(-e^{-1}) = -1$$

De même on a :

$$g(0) = 0\ donc\ W(0) = 0, g(1) = e\ donc\ W(e) = 1\ et\ enfin :$$
$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty\ donc\ \lim_{x \to +\infty} W(x) = +\infty$$

On a :

x	-1	$+\infty$
g	$-e(-1)$ $\nearrow$	$+\infty$

On en déduit donc que :

x	$-e(-1)$	$+\infty$
W	-1 $\nearrow$	$+\infty$

---

4) a) On sait que g est dérivable sur $[-1; +\infty[$. De plus on a :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)e^x = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

On en déduit donc que g est dérivable sur $[-1; +\infty[$ et g' ne s'annule pas sur $]-1; +\infty[$. Ainsi d'après la formule de la dérivée d'une réciproque, on en déduit donc que $g^{-1} = W$ est dérivable sur $]-e^{-1}; +\infty[$ et :

$$\forall y > -e^{-1}, W'(y) = \frac{1}{g'\big(W(y)\big)} = \frac{1}{(W(y)+1)e^{W(y)}}$$

On sait de plus que :

$$\boldsymbol{W'(0) = \frac{1}{(W(0)+1)e^{W(0)}} = 1}\ (car\ W(0) = 0)$$

Enfin on sait que :

$$\forall y > -e^{-1}, g\big(W(y)\big) = W(y)e^{W(y)} = y$$

On en déduit donc que :

$$\forall y > -e^{-1}, y \neq 0\,, e^{W(y)} = \frac{y}{W(y)}\ (car\ W(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0)$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\forall y > -e^{-1}, y \neq 0, W'(y) = \frac{1}{(W(y)+1)e^{W(y)}} = \frac{1}{(W(y)+1)\frac{y}{W(y)}} = \frac{W(y)}{y(1+W(y))}}$$

b) $\boldsymbol{W'(0) = 1}$ démontré à la question précédente.

Partie C : Expression des solutions de (E_k) à l'aide de W

1) On pose

$$h : x \mapsto e^{-x}$$

h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = -e^{-x}$$

De plus on a :

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = +\infty \; et \; \lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
h	$+\infty$	$\searrow$	0

On a donc h continue, strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $]0; +\infty[$. Ainsi d'après le théorème de la bijection h réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0; +\infty[$.

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\forall x > 0, \exists!\, z \in \mathbb{R} \; tel \; que \; x = e^{-z}}$$

Remarque : On peut aussi résoudre $x = e^{-z}$

On a :

$$x = e^{-z} \Leftrightarrow \ln(x) = -z \Leftrightarrow z = -\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\forall x > 0, \exists!\, z \in \mathbb{R} \; tel \; que \; x = e^{-z}}$$

---

2) On sait que $k \geq e$. Or d'après la question précédente, on sait que $f(x) = k$ admet deux solutions, l'une sur $]1; e]$, une autre sur $[e; +\infty[$. Ainsi on a :

$$f(x) = k \Longrightarrow x > 1$$

De plus on sait que :

$$\forall x > 1, \exists!\, z \in \,]-\infty; 0[\; tel \; que \; x = e^{-z}$$

On a donc :

$$\boldsymbol{f(x) = k \Leftrightarrow \frac{x}{\ln(x)} = k \Leftrightarrow \frac{e^{-z}}{\ln(e^{-z})} = k \Leftrightarrow \frac{1}{-ze^{z}} = k \Leftrightarrow ze^{z} = -\frac{1}{k} \Leftrightarrow g(z) = -\frac{1}{k}}$$

---

3) On veut résoudre

$$g(z) = -\frac{1}{k} \; avec \; z < 0$$

On sait que :

$$k \geq e \Longrightarrow \frac{1}{k} \leq \frac{1}{e} \;\; (car \; x \mapsto \frac{1}{x} \; est \; décroissante)$$

$$\Longrightarrow 0 > -\frac{1}{k} \geq -e^{-1}$$

Or on sait que g réalise une bijection de $[-1; 0]$ dans $[-e^{-1}; 0]$ où la réciproque est W restreinte sur $[-e^{-1}; 0]$.

On a donc :

$$g(z) = -\frac{1}{k} \; admet \; deux \; solutions \; dont \; l'une \; est \; donnée \; par \; z = W\left(-\frac{1}{k}\right)$$

On a donc une solution à $f(x) = k$ avec x qui vérifie :

$$-\ln(x) = W\left(-\frac{1}{k}\right)$$

Ainsi on a :

$$\boldsymbol{x = e^{-W\left(-\frac{1}{k}\right)} = -kW\left(-\frac{1}{k}\right)}$$