DS n°1
PCSI 2025-2026

Nous rappelons ici que la calculatrice est interdite. Un soin tout particulier sera apporté quant à la rédaction et au soin de la copie. Nous rappelons que les résultats doivent être encadrés ou soulignés, et qu'un trait devra être tiré entre chaque question.

Exercice 1 : Une petite étude de fonction

Dans tout cet exercice on pose :

$$f : x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Montrer que f n'est ni paire, ni impaire.
3) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Quelles conséquences peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
4) a) Calculer $f'(x)$ puis tracer le tableau de variations de f.
   b) Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un ensemble à déterminer.
   c) Déterminer une expression de f^{-1}.
5) Démontrer que f' est paire.
6) a) Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$, dérivable et impaire. Montrer que g' est paire.
   b) Démontrer que la réciproque est fausse.
7) Déterminer l'équation de la tangente, notée (T_0), à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = 0$.
8) a) Démontrer que :

$$\frac{e^x}{1+e^x} \geq \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq 0$$

   b) En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ avec sa tangente (T_0). (C'est-à-dire pour quelle valeur d'abscisse x la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus, ou au-dessous, de sa tangente).
9) Démontrer que $\mathcal{C}_f$ admet un centre de symétrie dont on donnera les coordonnées.
10) Tracer $\mathcal{C}_f$. On fera apparaître (T_0) ainsi que ses éventuelles asymptotes.

Exercice 2 : Trois droites concourantes

Dans cet exercice on pose :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x} \ pour\ x > 0$$

$\mathcal{C}_f$ représente la courbe de f.

De même on pose (Δ) la droite d'équation :

$$(\Delta) : y = x$$

On trouve parfois « première bissectrice » pour nommer (Δ).

1) Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 3$, notée (T_3), puis au point $x = \frac{1}{3}$, notée $\left(T_{\frac{1}{3}}\right)$.

2) Montrer que (T_3), $\left(T_{\frac{1}{3}}\right)$ et (Δ) sont concourantes.

3) Soit $a > 1$. Montrer que (T_a), $\left(T_{\frac{1}{a}}\right)\ et\ (\Delta)$ sont concourantes au point d'abscisse $x = \frac{2a}{1+a^2}$. On pose M_a le point d'intersection des trois droites.

4) Déterminer l'ensemble géométrique formé par les points M_a pour $a > 1$, noté (Γ) :

$$(\Gamma) = \{M_a\ tel\ que\ a \in]1; +\infty[\}$$

Problème 1 : La dérivée n-ième d'une fonction qui dépend de n

Le but de cet exercice est de démontrer par récurrence le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, \frac{d^n}{dx^n}(x^n \ln(x)) = n! \times \left[\ln(x) + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right]$$

En posant :

$$f_n : x \mapsto x^n \ln(x)\ \ sur\ ]0; +\infty[$$

Cela revient à écrire l'égalité cherchée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, (f_n)^{(n)}(x) = n! \times \left[\ln(x) + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right]$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose alors la propriété suivante :

$$\mathcal{P}_n : "\forall x > 0, (f_n)^{(n)}(x) = n! \times \left[\ln(x) + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right]"$$

Partie A : Echauffement pour $\boldsymbol{n = 0, 1, 2}$

1) On a :

$$f_1 : x \mapsto x \times \ln(x)\ \ sur\ ]0; +\infty[$$

Montrer que $\mathcal{P}_1$ est vraie.

2) Enfin avec :

$$f_2 : x \mapsto x^2 \times \ln(x) \quad sur\ ]0; +\infty[$$

Montrer que $\mathcal{P}_2$ est vraie.

Partie B : Un petit raccourci de la formule de Leibniz (que nous verrons plus tard !)

Soit g une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et indéfiniment dérivable. On pose :

$$h : x \mapsto xg(x)\ pour\ x \in I$$

1) Expliquez pourquoi h est indéfiniment dérivable.
2) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{d^n}{dx^n}\big(h(x)\big) = h^{(n)}(x) = n \times g^{(n-1)}(x) + xg^{(n)}(x)$$

3) Démontrer alors par récurrence que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(On explicitera clairement les questions précédentes utilisées, sans pour autant les redémontrer.)

ATTENTION : Entre les propositions P_n et P_{n+1}, les fonctions f_n et f_{n+1} ne sont pas les mêmes ! Mais il y a un lien fort entre les deux…

Problème 2 : La fonction de Lambert

Soit $k \in \mathbb{R}$. L'objet de ce problème est d'exprimer certaines solutions de l'équation :

$$(E_k) : \frac{x}{\ln(x)} = k, d'inconnue\ x$$

Dans la suite, on désigne par $f\ et\ g$ les fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)} \quad et \quad g(x) = xe^x$$

Partie A : Etude de f

1) Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2) Calculer les limites de f en $0, 1\ et +\infty$.
3) Dresser le tableau de variations de f.
4) Justifier que f réalise une bijection de $]1; e]$ vers un ensemble à déterminer.
5) Discuter en fonction de k du nombre de solutions de l'équation (E_k).

Dans toute la suite on note $f^{-1} : [e; +\infty[\rightarrow]1; e]$ la réciproque de f.

Partie B : Fonction W de Lambert

1) Déterminer l'ensemble de définition de g.
2) Démontrer que g réalise une bijection de $[-1;+\infty[$ dans $[-e^{-1};+\infty[$.
On pose alors $W: [-e^{-1};+\infty[\to [-1;+\infty[$ sa bijection réciproque.
W est appelée la fonction de Lambert.
3) A l'aide des variations de g, dressez le tableau de variation de W. On fera apparaître les valeurs de $W(-e^{-1}), W(0), W(e)$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} W(y)$.
4) a) Montrer que W est dérivable sur $]-e^{-1};+\infty[$ puis que :

$$\forall y > -e^{-1} \; et \; y \neq 0, W'(y) = \frac{W(y)}{y\big(1+W(y)\big)}$$

b) Déterminer $W'(0)$.

Partie C : Expression des solutions de (E_k) à l'aide de W

Dans cette partie on considère $k \geq e$.
1) Soit $x > 0$. Justifier qu'il existe un unique $z \in \mathbb{R}$ tel que $x = e^{-z}$.
2) Etablir que :

$$f(x) = k \Leftrightarrow g(z) = -\frac{1}{k}$$

3) Exprimer une des deux solutions de $f(x) = k$ en fonction de W. On précisera la solution donnée.