Correction DM n°2

Exercice 1 : Les fonctions trigonométriques réciproques

Dans tout cet exercice on pose :

$$f : x \mapsto arccos[cos(x)] + \frac{1}{2}arccos[cos(2x)]$$

1) a) Déterminer la valeur de $f(0)$ en justifiant.
b) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Déterminer la valeur de $f\big((2k+1)\pi\big)$.
2) Démontrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
3) Démontrer que f est paire.
4) Montrer que f est 2π −pédiodique.
5) Tracer le graphe de f sur $[-4\pi; 4\pi]$.
*(**Indication** : On pourra distinguer deux cas :* $\left[0; \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$*)*

1) a) $f(0) = arccos(cos(0)) + \frac{1}{2}arccos(cos(0)) = \frac{3}{2}arccos(1) = 0$
b) On a :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, f\big((2k+1)\pi\big) = arccos\big(cos((2k+1)\pi)\big) + \frac{1}{2}\ arccos\left[cos\left(2\big((2k+1)\pi\big)\right)\right]$$
$$= arccos(-1) + \frac{1}{2}arccos(1)$$
$$= \pi$$

2) On sait que :
$\mathcal{D}_{\text{arccos}} = [-1; 1]$ et $\forall \text{x} \in \mathbb{R}, \cos(\text{x}) \in [-1; 1]$.
On en déduit donc que $\mathcal{D}_{\text{f}} = \mathbb{R}$.
3) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = arccos[cos(-x)] + \frac{1}{2}arccos[cos(2(-x)] = arccos[cos(x)] + \frac{1}{2}arccos[cos(2x)] = f(x)$$

Donc f est paire.
4) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+2\pi) = arccos[cos(x+2\pi)] + \frac{1}{2}arccos[cos(2(x+2\pi)] = arccos[cos(x)] + \frac{1}{2}arccos[cos(2x)]$$

Car cos est 2π −périodique.
On en déduit donc que f est 2π −périodique.
5) Il suffit d'étudier f sur $[0; \pi]$ puis de la prolonger sur $[-\pi; \pi]$ par parité puis sur $[-4\pi; 4\pi]$ par périodicité.
On a :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], 2x \in [0; \pi]$$

De plus on sait que :

$$\forall x \in [0; \pi], arccos(cos(x)) = x$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], f(x) = arccos[cos(x)] + \frac{1}{2}arccos[cos(2x)] = x + \frac{1}{2} \times 2x = 2x$$

De plus on sait que :

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right], 2x \in [\pi; 2\pi]$$

De plus on sait que :

$$\forall x \in [\pi; 2\pi], cos(x) = cos(\pi + \alpha) = cos(\pi - \alpha)\ \ avec\ \alpha = x - \pi$$

De plus on a :

$$\forall x \in [\pi; 2\pi], x - \pi \in [0; \pi]$$

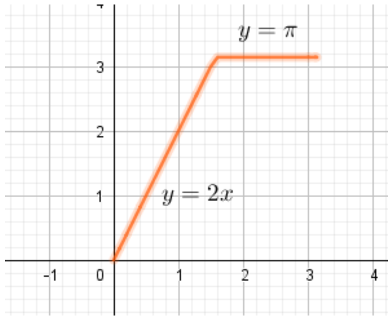
On en déduit donc que :

$$\forall x \in [\pi; 2\pi], arccos(cos(x)) = arccos(cos(\pi - \alpha)) = \pi - \alpha = \pi - (x - \pi) = 2\pi - x$$

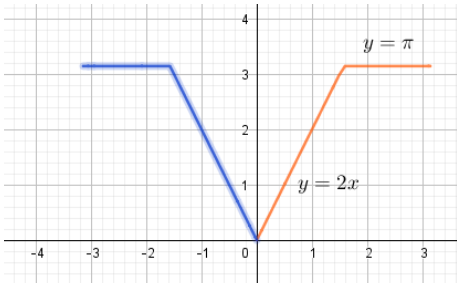
On en déduit donc que :

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right], f(x) = arccos[cos(x)] + \frac{1}{2}arccos[cos(2x)] = x + \frac{1}{2}(2\pi - 2x) = \pi$$

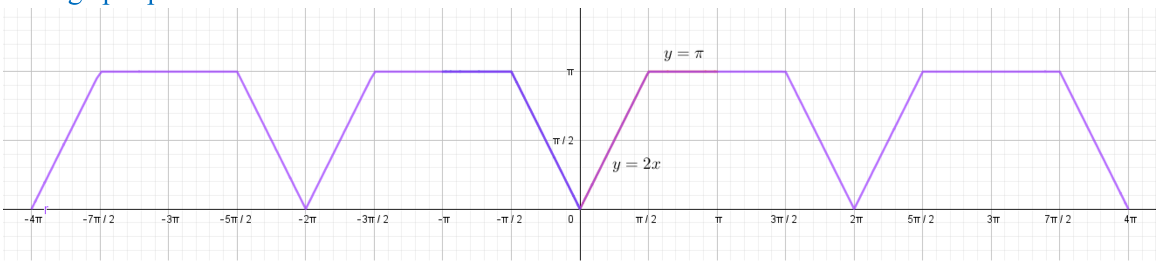
On a donc le graphe de f sur $[0;\pi]$:



Par parité on a :



Enfin on prolonge par périodicité :



Exercice 2 : Limite d'une somme

Le but de cet exercice est de calculer :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$$

Dans toute la suite de cet exercice, on pose :

$$f(x)=\arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) En déduire que :

$$\forall x\in\mathbb{R}, arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)=arctan(x+1)-arctan(x)$$

3) Démontrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, S_n=arctan(n+1)$$

4) Déterminer la limite de S_n en $+\infty$.

1) On sait que $arctan$ est définie sur $\mathbb{R}$. On en déduit donc que :

$$\mathcal{D}_f=\{x\in\mathbb{R}, 1+x+x^2\neq 0\}$$

Or on a :

$$\forall x\in\mathbb{R}, 1+x+x^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}>0$$

On en déduit donc que $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$.
2) On sait que :

$$\forall x\in\mathbb{R}, tan'(x)=1+\tan^2(x)$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, arctan'(x) = \frac{1}{1+tan^2\big(arctan(x)\big)} = \frac{1}{1+x^2}$$

3) On pose pour tout x positif :

$$\forall x \geq 0, g(x) = arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) - arctan(x+1) + arctan(x)$$

$g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ par composé de fonctions dérivables et :

$$\forall x \geq 0, g'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{(1+x+x^2)^2}} - \frac{1}{1+(1+x)^2} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{-2x-1}{1+(x^2+x+1)^2} + \frac{-1-x^2+1+(1+x)^2}{(1+x^2)(1+(1+x)^2)}$$

$$= \frac{-2x-1}{1+(x^2+x+1)^2} + \frac{2x+1}{(1+x^2)(1+(1+x)^2)}$$

Or on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1+(x^2+x+1)^2 = 2+2x+3x^2+2x^3+x^4$$

De même on a :

$$(1+x^2)(1+(1+x)^2) = (1+x^2)(2+2x+x^2) = 2+2x+3x^2+2x^3+x^4$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \geq 0, g'(x) = 0$$

Donc la fonction g est constante sur $\mathbb{R}^+$.
Or on a :

$$f(0) = arctan(1) - arctan(1) + arctan(0) = 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \geq 0, \mathrm{arctan}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) = \mathrm{arctan}(x+1) - \mathrm{arctan}(x)$$

b) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{arctan}\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{arctan}(k+1) - \mathrm{arctan}(k))$$

$$= \mathrm{arctan}(n+1) - \mathrm{arctan}(0) \quad \text{(par télescopage)}$$

$$= \mathrm{arctan}(n+1)$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{2}$$

Problème 1 : Les croissances comparées

Le but de ce problème est de démontrer les théorèmes de limite sur les croissances comparées : $\forall (\alpha, \beta) \in]0; +\infty[^2$:

$$(1) \lim_{x\to+\infty} \frac{[\ln(x)]^\alpha}{x^\beta} = 0 \quad (2) \lim_{x\to 0} x^\beta |\ln(x)|^\alpha = 0 \quad (3) \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)^\alpha}{x^\beta} = +\infty \quad (4) \lim_{x\to-\infty} |x|^\beta (e^x)^\alpha = 0$$

Partie A : Démontrons le (1)

On pose :

$$f: \begin{cases}]0; +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{ln(x)}{x} \end{cases}$$

1) Démontrer que :

$$\forall\, x > 1, 0 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$$

2) En déduire :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

3) Démontrer que :

$$\forall\ (\alpha,\beta) \in]0;+\infty[^2, \frac{[ln(x)]^\alpha}{x^\beta} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha f\left(x^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^\alpha$$

4) En déduire que :

$$\forall\ (\alpha,\beta) \in]0;+\infty[^2,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{[ln(x)]^\alpha}{x^\beta} = 0$$

Partie B : Les autres

1) Effectuer le changement de variable :

$$X = \frac{1}{x}$$

Puis déduisez-en le 2.

2) On pose :

$$g_{\alpha,\beta} : \begin{cases}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{(e^x)^\alpha}{x^\beta} \end{cases}$$

a) Déterminer la fonction $h_{\alpha,\beta}$ telle que :

$$\forall\ x > 0, g_{\alpha,\beta}(x) = e^{h_{\alpha,\beta}(x)}$$

b) Par composée de limite, déterminer :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)^\alpha}{x^\beta}$$

3) Avec un changement de variable judicieux, déterminer :

$$\lim_{x\to-\infty} |x|^\beta (e^x)^\alpha$$

Partie A : Démontrons le (1)

1) On sait que :

$$\forall x > 1, \begin{cases} \ln(x) > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x > 1, \frac{\ln(x)}{x} \geq 0$$

De plus on doit montrer que :

$$\forall x > 1, \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$$

On pose :

$$g: x \mapsto \ln(x) - 2\sqrt{x}$$

On sait que $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{*+})$ et :

$$\forall x > 0, g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{x}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x > 1, g'(x) < 0$$

De plus on a :

$$g(1) = -2 < 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x > 1, g(x) < 0 \Longrightarrow \forall x > 1, \ln(x) \leq 2\sqrt{x} \Longrightarrow \forall x > 1, \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x > 1, 0 \leq \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$$

2) On sait que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

On en déduit donc d'après le théorème des gendarmes que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

3)

$$\forall\,(\alpha,\beta)\in\,]0;+\infty[^2,\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha}f\left(x^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^{\alpha}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha}\left(\frac{\ln\left(x^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^{\alpha}$$

$$=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha}\times\frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\ln(x)\right)^{\alpha}}{\left(x^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^{\alpha}}$$

$$=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha}\times\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\alpha}\frac{\ln(x)^{\alpha}}{x^{\beta}}$$

$$=\frac{[\ln(x)]^{\alpha}}{x^{\beta}}$$

4) On sait que :

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{\beta}{\alpha}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\beta}{\alpha}\ln(x)}=+\infty\ \left(\text{car}\,\frac{\beta}{\alpha}>0\right)$$

De plus on sait que :

$$\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln(X)}{X}=0$$

On en déduit donc par composée que :

$$\lim_{x\to+\infty}f\left(x^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^{\alpha}=0$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{[\ln(x)]^{\alpha}}{x^{\beta}}=0$$

Partie B : Les autres

1) On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{[\ln(x)]^{\alpha}}{x^{\beta}}=\lim_{X\to0^+}\frac{\left[\ln\left(\frac{1}{X}\right)\right]^{\alpha}}{\frac{1}{X}^{\beta}}=0$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{X\to0^+}\frac{\left[\ln\left(\frac{1}{X}\right)\right]^{\alpha}}{\frac{1}{X}^{\beta}}=\lim_{X\to0^+}X^{\beta}(-\ln(X))^{\alpha}=0=\lim_{X\to0^+}X^{\beta}|\ln(X)|^{\alpha}$$

2) a) On sait que :

$$\forall x>0,g_{\alpha,\beta}(x)=\frac{(e^x)^{\alpha}}{x^{\beta}}>0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x>0,\ln\left(g_{\alpha,\beta}(x)\right)=\alpha x-\beta\ln(x)=h_{\alpha,\beta}(x)$$

b) On sait que :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(\alpha x-\beta\ln(x))=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\alpha-\beta\dfrac{\ln(x)}{x}\right)=+\infty\\ \lim\limits_{X\to+\infty}e^X=+\infty\end{cases}\underset{\text{par composée}}{\Longrightarrow}\lim_{X\to+\infty}\frac{(e^x)^{\alpha}}{x^{\beta}}=+\infty$$

3) On sait que :

$$\lim_{x\to-\infty}|x|^{\beta}(e^x)^{\alpha}=\lim_{X\to+\infty}|-X|^{\beta}\left(e^{-X}\right)^{\alpha}=\lim_{X\to+\infty}\frac{X^{\beta}}{(e^X)^{\alpha}}=0\ (\text{d'après la question précédente})$$