Feuille d'exercices : Calculs algébriques

Partie A : Mettre sous forme de somme

Exercice A.1 : Ecrire les différentes sommes suivantes à l'aide du signe Σ puis les calculer:

1) $S_1 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + 2019$
2) $S_2 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - \cdots + 2017 - 2018$
3) $S_3 = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \cdots + 2^{2018}$
4) $S_4 = 1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + \cdots + 301$

$$S_1 = \sum_{k=0}^{1009} (2k+1) = 2\sum_{k=0}^{1009} k + \sum_{k=0}^{1009} 1 = 1009 \times 1010 + 1010 = 1010^2 = 1020100$$

Vérification avec Python :

```
s=0
for i in range(0,1010):
    s=s+2*i+1
print(s)
```

```
*** Python 3.4.5 |Continuum Analytics, Inc.| (default, Jul  5 2
 win32. ***
>>>
*** Console de processus distant Réinitialisée ***
>>>
1020100
>>>
```

$$S_2 = \sum_{k=0}^{2018} (-1)^{k+1} k = \sum_{k=0}^{1008} (2k+1) - \sum_{k=1}^{1009} (2k) = 2 \times \sum_{k=0}^{1008} k + \sum_{k=0}^{1008} 1 - 2\sum_{k=1}^{1009} k = 1009 - 2 \times 1009 = -1009$$

Vérification avec Python :

```
s=0
for k in range(0,2019):
    s=s+(-1)**(k+1)*k
print(s)
```

```
*** Python 3.4.5 |Continuum Analytics, Inc.| (default, Jul  5 2
 win32. ***
>>>
*** Console de processus distant Réinitialisée ***
>>>
-1009
>>>
```

$$S_3 = \sum_{k=0}^{2018} (-2)^k = \frac{(-2)^{2019} - 1}{-2 - 1} = \frac{1}{3} + \frac{2^{2019}}{3}$$

Vérification avec Python :

```
s=0
for k in range(0,2019):
    s=s+(-2)**(k)
print(s)
```

```
>>>
*** Console de processus distant Réinitialisée ***
>>>
-1009
>>>
*** Console de processus distant Réinitialisée ***
>>>
2006503819879827853336612177930148440130309677975592764226741184016357805509610157037600962539694797476673993028
8181962752168103525098985120087956628730075508747794583005828219000372880690825548517243091255468358768021202734
7458875190703163162346745968992796118286159155813206555576782727040054892027939269455238763178812603284201117769
9054870435109736728564032544556114781090753321129848196497720533620387112469946575565999830613431281863503524686
1289946507219989614639235480887324689053683061730938323884297522813515076442309511423730998123390703393417929326
247507975268863542203157274022790413074104494763
```

$$S_4=\sum_{k=0}^{100}(3k+1)=3\sum_{k=0}^{100}k+\sum_{k=0}^{100}1=3\times 5050+101=15251$$

Vérification avec Python :

```
s=0
for k in range(0,101):
    s=s+3*k+1
print(s)
```

```
*** Python 3.4.5 |Continuum Analytics, Inc.| (default, Jul  5
 win32. ***
>>>
*** Console de processus distant Réinitialisée ***
>>>
15251
>>>
```

Exercice A.2 : Ecrire les algorithmes suivants à l'aide du signe Σ puis déterminer la valeur affichée :

Variable : S, I et A sont du type nombre

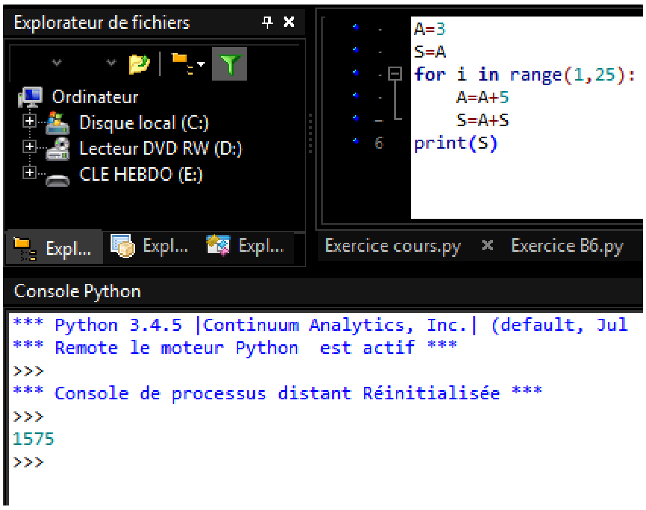
Traitement :
3 ← A
A ← S
Pour I allant de 1 à 24
  A+5 ← A
  S+A ← S
Fin POUR
Afficher S

Variable :
S,
I et A sont
du type
nombre

On a :

$$S=\sum_{k=0}^{24}(5k+3)=5\sum_{k=0}^{24}k+\sum_{k=0}^{24}3=5\times\frac{24\times 25}{2}+3\times 25=1575$$

On peut le vérifier avec un programme Python :



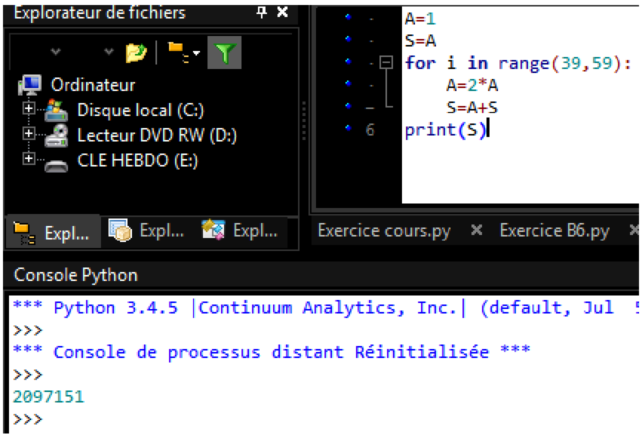
Variable :	S, I et A sont du type nombre

Traitement :	1 ← A
	A ← S
	Pour I allant de 39 à 58
	    2A ← A
	    S+A ← S
	Fin POUR
	Afficher S

On pose :

$$S = \sum_{k=38}^{58} 2^{(k-38)} = \sum_{k=0}^{20} 2^k = \frac{2^{21}-1}{2-1} = 2^{21} - 1$$

On peut le vérifier avec un programme Python :



Exercice A.3 : Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

a) $\sum_{k=0}^{n} (\alpha + a_k) = \alpha + \sum_{k=0}^{n} a_k$

b) $\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)$

c) $\sum_{k=0}^{n}(a_k)^{\beta} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)^{\beta}$

a) **FAUX**

Contre exemple avec $n = 1, a_0 = 1, a_1 = 2$ et $\alpha = 1$

On a alors :

$$\sum_{k=0}^{n}(\alpha + a_k) = \alpha + a_0 + \alpha + a_1 = 2\alpha + a_0 + a_1 = 5$$

$$\alpha + \sum_{k=0}^{n} a_k = \alpha + a_0 + a_1 = 4$$

En fait on a :

$$\sum_{k=0}^{n}(\alpha + a_k) = \sum_{k=0}^{n} \alpha + \sum_{k=0}^{n} a_k = n\alpha + \sum_{k=0}^{n} a_k$$

b) **FAUX**

On a le contre-exemple suivant :

$$a_0 = a_1 = b_1 = b_0 = 1$$

On a alors :

$$\sum_{k=0}^{1} a_k b_k = a_0 b_0 + a_1 b_1 = 2$$

$$\left(\sum_{k=0}^{1} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) = (a_0 + a_1)(b_0 + b_1) = 4$$

c) **FAUX**

Contre exemple avec $n = 1, a_0 = 1, a_1 = 2$ et $\beta = 2$

On a alors :

$$\sum_{k=0}^{1}(a_k)^{\beta} = (a_0)^2 + (a_1)^2 = 1^2 + 2^2 = 5$$

$$\left(\sum_{k=0}^{1} a_k\right)^{\beta} = (a_0 + a_1)^2 = 9$$

Partie B : Calcul de somme par récurrence ou séparation

Exercice B.1 : a) Démontrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

b) En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

a) On démontre cela par récurrence. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n): \text{"} \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \text{"}$$

Initialisation : Pour n = 1 on a :

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1$$
$$\frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel non nul fixé. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a alors :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad (\mathbf{HR_n})$$

On veut montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

On sait que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^3}_{HR_n} + (n+1)^3$$
$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$
$$= \frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2 + 4(n+1)\right)$$
$$= \frac{(n+1)^2}{4}(n^2 + 4n + 4)$$
$$= \frac{(n+1)^2}{4}(n+2)^2$$

On en déduit donc que si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ aussi.

Conclusion : $\mathcal{P}(1)$ est vraie et $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire donc d'après le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

b) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

Exercice B.2 : On pose la suite :

$$\begin{cases} a_0 = 5 \\ a_{n+1} = a_n + 7 \end{cases}$$

a) Déterminer :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

b) Calculer :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, Q_n = \sum_{k=n}^{2n} a_k$$

a) On a :

$$\begin{cases} a_0 = 5 \\ a_{n+1} = a_n + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_n = 5 + 7n$$

On en déduit donc que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} (5+7k) = \sum_{k=0}^{n} 5 + 7\sum_{k=0}^{n} k = 5(n+1) + \frac{7}{2}n(n+1)$$

On a donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{7}{2}n^2 + \frac{17}{2}n + 5$$

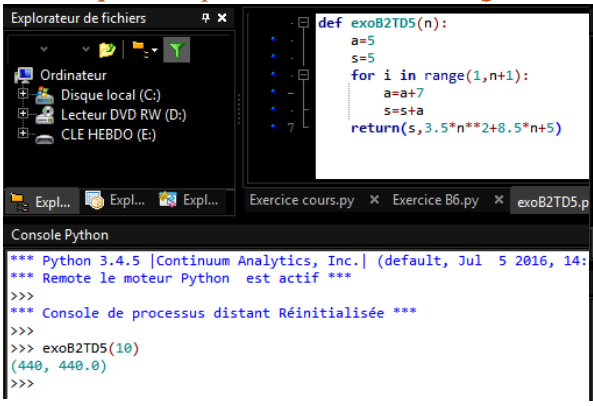
b) De même on a :

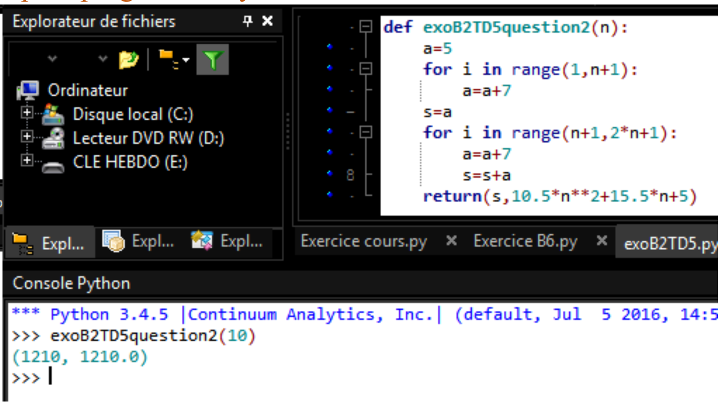
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, Q_n = \sum_{k=n}^{2n} a_k = \sum_{k=n}^{2n} (5+7k) = \sum_{k=n}^{2n} 5 + 7\sum_{k=n}^{2n} k = 5(n+1) + 7\left(\sum_{k=0}^{2n} k - \sum_{k=0}^{n-1} k\right)$$
$$= 5(n+1) + 7\left(n(2n+1) - \frac{(n-1)n}{2}\right)$$
$$= 5n + 5 + \frac{7}{2}(3n^2 + 3n)$$
$$= \frac{21}{2}n^2 + \frac{31}{2}n + 5$$

On a donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, Q_n = \sum_{k=n}^{2n} a_k = \frac{21}{2}n^2 + \frac{31}{2}n + 5$$

Remarque : On peut vérifier ce résultat grâce à un petit programme Python :





Exercice B.3 : Une piste d´athlétisme mesure 400m de circonférence. Marc décide de courir 10km sur cette piste. Au final, il a mis 33 minutes et 45 secondes. On sait de plus qu´à cause de la fatigue, il court 2 secondes plus lentement à chaque tour.
Combien a t´il mis pour parcourir le premier tour ?

Il faut déjà voir que :

$$\frac{10000}{400} = 25$$

Donc Marc a parcouru 25 tours.
On pose u_n le temps en seconde mis par Marc pour parcourir le n-ième tour. On a alors :

$$\forall n \in [\![1,24]\!], u_{n+1} = u_n + 2$$

On a donc :

$$\forall n \in [\![1,25]\!], u_n = u_1 + 2(n-1)$$

De plus on sait que :
33 minutes et 45 secondes=2025s
On en déduit donc que :

$$\sum_{k=1}^{25} u_k = \sum_{k=1}^{25} \big(u_1 + 2(k-1)\big) = 25 \times u_1 + 2 \times 24 \times \frac{25}{2} =$$

On en déduit donc que :

$$u_1 = \frac{2025 - 12 \times 50}{25} = 57$$

Donc Marc a parcouru le premier tour en 57s.

Exercice B.4 : Soit n un entier naturel non nul. Calculer :

$$\mathrm{S_n} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} (-1)^{\mathrm{k}} \mathrm{k}$$

On peut différencier le cas pair et impair.
On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{2k}(2k) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{2k-1}(2k-1)$$
$$= 2\sum_{k=1}^{n} k - 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$
$$= n$$

De même on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_{2n-1} = \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k k = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{2k}(2k) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{2k-1}(2k-1)$$
$$= 2\sum_{k=1}^{n-1} k - 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$
$$= n - 2n$$
$$= -n$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = (-1)^n E\left(\frac{n+1}{2}\right) = (-1)^n \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$$

Programme en Python pour vérifier avec les premiers termes

```python
def fonction(n):
    s=0
    for i in range(1,n+1):
        s=s+(-1)**i*i
    return(s)

for i in range(1,5):
    print("Valeur de Sn pour n="+str(i))
    print(fonction(i))
    print("Valeur de (-1)^n*E((n+1)/2) pour n="+str(i))
    print(((-1)**i*int((i+1)/2)))
```

```
>>>
Valeur de Sn pour n=1
-1
Valeur de (-1)^n*E((n+1)/2) pour n=1
-1
Valeur de Sn pour n=2
1
Valeur de (-1)^n*E((n+1)/2) pour n=2
1
Valeur de Sn pour n=3
-2
Valeur de (-1)^n*E((n+1)/2) pour n=3
-2
Valeur de Sn pour n=4
2
Valeur de (-1)^n*E((n+1)/2) pour n=4
2
>>>
```

Exercice B.5 : Démontrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k! \leq 2 \times n!$$

On peut faire une preuve par récurrence. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) = \text{"} \sum_{k=0}^{n} k! \leq 2 \times n! \text{"}$$

Initialisation : n = 0
On a :

$$\sum_{k=0}^{0} k! = 0! = 1 \ (par\ convention)$$
$$2 \times 0! = 2$$

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit n un entier naturel fixé. On suppose vraie $\mathcal{P}(\mathrm{n})$. On a alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k! = \sum_{k=0}^{n} k! + (n+1)! \leq 2 \times n! + (n+1)!$$

Or on sait :

$$2 \times n! + (n+1)! = (n+1)!\left(\frac{2}{n+1} + 1\right)$$

De plus on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{2}{n+1} \leq 1 \Longrightarrow \left(\frac{2}{n+1} + 1\right) \leq 2$$

On en déduit donc que :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k! \leq 2(n+1)!$$

Donc si $\mathcal{P}(\mathrm{n})$ est vraie, alors $\mathcal{P}(\mathrm{n}+1)$ aussi.
Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}(\mathrm{n})$ est héréditaire donc d'après le principe de récurrence $\mathcal{P}(\mathrm{n})$ est vraie pour tout entier naturel n.

Partie C : Décalage d'indice et télescopage

Exercice C.1 : Soit n un entier naturel non nul. On pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

a) Déterminer trois réels a, b et c tel que :

$$\forall\, k \geq 1, \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$$

b) En déduire la valeur de $\mathrm{S_n}$.

a) On peut le faire de différentes méthodes :
Méthode 1 : Par identification

$$\forall\, k \geq 1, \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2} = \frac{a(k+1)(k+2) + bk(k+2) + ck(k+1)}{k(k+1)(k+2)}$$
$$= \frac{k^2(a+b+c) + k(3a+2b+c) + 2a}{k(k+1)(k+2)}$$

On en déduit donc par identification que :

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ 2a=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ 2b+c = -\dfrac{3}{2} \\ b+c = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\forall\, k \geq 1, \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{k+2}$$

Méthode 2 : Comme monsieur Huguet en SI

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}+\frac{c}{k+2}\Longrightarrow\frac{1}{(k+1)(k+2)}=a+\frac{bk}{k+1}+\frac{ck}{k+2}\underset{k=0}{\Longrightarrow}a=\frac{1}{2}$$

De même :

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}+\frac{c}{k+2}\Longrightarrow\frac{1}{k(k+2)}=\frac{a(k+1)}{k}+b+\frac{c(k+1)}{k+2}\underset{k=-1}{\Longrightarrow}b=-1$$

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}+\frac{c}{k+2}\Longrightarrow\frac{1}{k(k+1)}=\frac{a(k+2)}{k}+\frac{b(k+2)}{k+1}+c\underset{k=-2}{\Longrightarrow}c=\frac{1}{2}$$

b) On a :

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}^*, S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{k+2}\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\\&=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)-\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}\right)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{n+2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{n+1}\\&=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Programme en Python pour vérifier avec les premiers termes

```python
def fonction(n):
    s=0
    for i in range(1,n+1):
        s=s+1/(i*(i+1)*(i+2))
    return(s)

for i in range(1,5):
    print("Valeur de Sn pour n="+str(i))
    print(fonction(i))
    print("Valeur de 1/4-1/(2(n+2)(n+1)) pour n="+str(i))
    print(1/4-1/(2*(i+1)*(i+2)))
```

```
Valeur de Sn pour n=1
0.16666666666666666
Valeur de 1/4-1/(2(n+2)(n+1)) pour n=1
0.16666666666666669
Valeur de Sn pour n=2
0.20833333333333331
Valeur de 1/4-1/(2(n+2)(n+1)) pour n=2
0.20833333333333334
Valeur de Sn pour n=3
0.22499999999999998
Valeur de 1/4-1/(2(n+2)(n+1)) pour n=3
0.225
Valeur de Sn pour n=4
0.2333333333333333
Valeur de 1/4-1/(2(n+2)(n+1)) pour n=4
0.23333333333333334
```

Exercice C.2 : a) Calculer de deux manières différentes :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(k+1)^5-\sum_{k=1}^{n}k^5$$

b) En déduire la valeur de :

$$Q_n=\sum_{k=1}^{n}k^4$$

c) Vérifier ce résultat par récurrence.

a) **Méthode 1 : Par télescopage**

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} (k+1)^5 - \sum_{k=1}^{n} k^5 = (n+1)^5 - 1$$

Méthode 2 : En développant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![1;n]\!], (k+1)^5 = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} (k+1)^5 - \sum_{k=1}^{n} k^5 = \sum_{k=1}^{n} k^5 + 5\sum_{k=1}^{n} k^4 + 10\sum_{k=1}^{n} k^3 + 10\sum_{k=1}^{n} k^2 + 5\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{n} k^5$$
$$= 5\sum_{k=1}^{n} k^4 + 10\sum_{k=1}^{n} k^3 + 10\sum_{k=1}^{n} k^2 + 5\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

b) On sait d'après le cours et les exercices précédents que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

De plus on sait d'après la question 1 que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 5\sum_{k=1}^{n} k^4 + 10\sum_{k=1}^{n} k^3 + 10\sum_{k=1}^{n} k^2 + 5\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = (n+1)^5 - 1$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 5\sum_{k=1}^{n} k^4 = (n+1)^5 - \frac{5}{2} \times n^2(n+1)^2 - \frac{5}{3} \times n(n+1)(2n+1) - \frac{5}{2}n(n+1) - n - 1$$
$$= (n+1)\left((n+1)^4 - \frac{5}{2}n^2(n+1) - \frac{5}{3}n(2n+1) - \frac{5}{2}n - 1\right)$$
$$= \frac{(n+1)}{6}(6n^4 + 24n^3 + 36n^2 + 24n + 6 - 15n^3 - 15n^2 - 20n^2 - 10n - 15n - 6)$$
$$= \frac{(n+1)}{6}(6n^4 + 9n^3 + n^2 - n)$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{(n+1)}{30}(6n^4 + 9n^3 + n^2 - n)$$

Remarque : On peut factoriser le polynôme $P(X) = 6X^4 + 9X^3 + X^2 - X$

$$= X(6X^3 + 9X^2 + X - 1)$$
$$= X(2X+1)(3X^3 + 3X - 1)$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

c) On raisonne par récurrence. On pose pour un entier naturel n non nul la proposition $\mathcal{P}(n)$ suivante :

$$\mathcal{P}(n) = \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

Initialisation : Pour n = 1 on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = 1^4 = 1$$
$$\frac{1(1+1)(2\times1+1)(3\times1^2+3\times1-1)}{30} = 1$$

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel n non nul fixé. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a alors :

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \qquad (\mathbf{HR_n})$$

On veut montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^4 = \frac{(n+1)\,(n+2)(2n+3)(3n^2+9n+5)}{30}$$

Car on a au rang n :

$$u_{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}+1)(2\mathbf{n}+1)(3\mathbf{n}^2+3\mathbf{n}-1)}{30}$$

Donc au range n+1 :

$$u_{\mathbf{n+1}} = \frac{(\mathbf{n+1})(\mathbf{n+1}+1)(2(\mathbf{n+1})+1)(3(\mathbf{n+1})^2+3(\mathbf{n+1})-1)}{30}$$

On sait que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^4 = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^4}_{\mathbf{HR_n}} + (n+1)^4$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} + (n+1)^4$$

$$= \frac{n+1}{30} \times \left[\frac{n(2n+1)(3n^2+3n-1) + 30(n+1)^3}{30}\right]$$

$$= \frac{n+1}{30} \times [(2n^2+n)(3n^2+3n-1) + 30(n^3+3n^2+3n+1)]$$

$$= \frac{n+1}{30}(6n^4+39n^3+91n^2+89n+30)$$

On calcule à présent :

$$(n+2)(2n+3)(3n^2+9n+5) = 6n^4+39n^3+91n^2+89n+30$$

On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^4 = \frac{(n+1)\,(n+2)(2n+3)(3n^2+9n+5)}{30}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(1)$ est vraie et $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire donc d'après le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul.

Exercice C.3 : Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$$

On peut déterminer le résultat par deux méthodes différentes.

Méthode 1 : Par télescopage

On sait que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \frac{k}{(k+1)!} = \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

On en déduit donc que :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \; (par\ télescopage)$$

Méthode 2 : Par récurrence

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$$

On peut calculer les premiers termes de la suite :

$$S_0 = \sum_{k=0}^{0} \frac{k}{(k+1)!} = 0, S_1 = \sum_{k=0}^{1} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{2}, S_2 = \sum_{k=0}^{2} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{5}{6}, S_3 = \sum_{k=0}^{3} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{23}{24}$$

On peut donc conjecturer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(0): "S_n = \frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}"$$

Démontrons cela par récurrence :

Initialisation : Pour n = 0 on a :

$$S_0 = \sum_{k=0}^{0} \frac{k}{(k+1)!} = 0$$

$$1 - \frac{1}{1!} = 0$$

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel n non nul fixé. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a alors :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \qquad (\boldsymbol{HR_n})$$

On veut montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+2)!}$$

On sait que :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{(k+1)!} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}}_{\boldsymbol{HR_n}} + \frac{n+1}{(n+2)!}$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!}$$

$$= 1 - \frac{n+2}{(n+2)!} + \frac{n+1}{(n+2)!}$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+2)!}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire donc d'après le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

Exercice C.4 : Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} k \times k!$$

On peut déterminer le résultat par deux méthodes différentes.

Méthode 1 : Par télescopage

On sait que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, k! \times k = k! \times (k+1) - k! = (k+1)! - k!$$

On en déduit donc que :

$$\sum_{k=0}^{n} k \times k! = \sum_{k=0}^{n} \big((k+1)! - k!\big) = (n+1)! - 1! = (n+1)! - 1 \ (par\ télescopage)$$

Méthode 2 : Par récurrence :

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} k \times k!$$

On peut calculer les premiers termes de la suite :

$$S_0 = \sum_{k=0}^{0} k \times k! = 0, S_1 = \sum_{k=0}^{1} k \times k! = 1, S_2 = \sum_{k=0}^{2} k \times k! = 5, S_3 = \sum_{k=0}^{3} k \times k! = 23$$

On peut donc conjecturer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(0): "S_n = (n+1)! - 1 "$$

Démontrons cela par récurrence :

Initialisation : Pour n = 0 on a :

$$S_0 = \sum_{k=0}^{0} k \times k! = 0$$

$$1! - 1 = 0$$

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel n non nul fixé. On suppose que $\mathcal{P}(\mathrm{n})$ est vraie. On a alors :

$$\sum_{k=0}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1 \qquad (\boldsymbol{HR_n})$$

On veut montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k \times k! = (n+2)! - 1$$

On sait que :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k \times k! &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}}_{\boldsymbol{HR_n}} + (n+1)(n+1)! \\ &= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! \\ &= (n+1)! \times (1 + n + 1) - 1 \\ &= (n+2)! - 1\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(\mathrm{n}+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}(\mathrm{n})$ est héréditaire donc d'après le principe de récurrence $\mathcal{P}(\mathrm{n})$ est vraie pour tout entier naturel n.

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$$

Partie D : Somme des termes d'une suite géométrique

Exercice D.1 : On pose la suite :

$$\begin{cases} a_0 = 5 \\ a_{n+1} = a_n \times 3 \end{cases}$$

a) Déterminer :

b) Calculer :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, Q_n = \sum_{k=n}^{2n} a_k$$

a) On sait que :

$$\begin{cases} a_0 = 5 \\ a_{n+1} = a_n \times 3 \end{cases} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_n = 5 \times 3^n$$

On en déduit donc que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} 5 \times 3^k = 5 \times \sum_{k=0}^{n} 3^k = 5 \times \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

b) De même on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, Q_n = \sum_{k=n}^{2n} a_k = \sum_{k=n}^{2n} 5 \times 3^k = 5 \times 3^n \times \sum_{k=0}^{n} 3^k = 5 \times 3^n \times \frac{3^{n+1} - 1}{2} = 3^n \times S_n$$

Exercice D.2 : Soit q un complexe. Calculer :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^{2k}$$

On a :

$$\forall q \in \mathbb{C}\backslash\{-1; 1\}, \sum_{k=0}^{n} q^{2k} = \sum_{k=0}^{n} (q^2)^k = \frac{1 - (q^2)^{n+1}}{1 - q^2} = \frac{1 - q^{2n+2}}{1 - q^2} = \frac{q^{2n+2} - 1}{q^2 - 1}$$

De plus on a :

$$\sum_{k=0}^{n} 1^{2k} = n + 1 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{2k}$$

Partie E : Somme double

Exercice E.1 : Soit n un entier naturel non nul. Calculer :

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} (i + j)^2$$

On peut faire un tableau à double entrée :

i \ j	1	2	3	...	n − 1	n
1	$(1+1)^2$	$(1+2)^2$	$(1+3)^2$	...	$(1+n-1)^2$	$(1+n)^2$
2	$(1+2)^2$	$(2+2)^2$	$(3+2)^2$	...		
3				...		
⋮				...		
n − 1				...		
n	$(n+1)^2$	$(n+2)^2$		...	$(2n-1)^2$	$(2n)^2$

En sommant sur les lignes on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{1 \leq i,j \leq n} (i + j)^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (i^2 + 2ij + j^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} i^2 + 2i \sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=1}^{n} j^2 \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(ni^2 + in(n+1) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$$

$$= \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{2} + \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{n^2(n+1)}{6}\big(2(2n+1) + 3(n+1)\big)$$

$$= \frac{n^2(n+1)}{6}(7n+5)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{1 \le i,j \le n} (i+j)^2 = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}$$

Programme en Python pour vérifier avec les premiers termes

```
def fonction(n):
    s=0
    for i in range(1,n+1):
        for j in range(1,n+1):
            s=s+(i+j)**2
    return(s)

for i in range(1,5):
    print("Valeur de Sn pour n="+str(i))
    print(fonction(i))
    print("Valeur de n^2(n+1)(7n+5)/6 pour n="+str(i))
    print(i**2*(i+1)*(7*i+5)/6)
```

```
Valeur de Sn pour n=1
4
Valeur de n^2(n+1)(7n+5)/6 pour n=1
4.0
Valeur de Sn pour n=2
38
Valeur de n^2(n+1)(7n+5)/6 pour n=2
38.0
Valeur de Sn pour n=3
156
Valeur de n^2(n+1)(7n+5)/6 pour n=3
156.0
Valeur de Sn pour n=4
440
Valeur de n^2(n+1)(7n+5)/6 pour n=4
440.0
>>>
```

Exercice E.2 : Soit n un entier naturel non nul. Calculer :

$$\sum_{1 \le i,j \le n} ij$$

En sommant sur les lignes on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{1 \le i,j \le n} i \times j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} i \times j = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \sum_{j=1}^{n} j^3 = \left(\sum_{j=1}^{n} j \right)^2$$

Programme en Python pour vérifier avec les premiers termes

```python
def fonction(n):
    s=0
    for i in range(1,n+1):
        for j in range(1,n+1):
            s=s+i*j
    return(s)

for i in range(1,5):
    print("Valeur de Sn pour n="+str(i))
    print(fonction(i))
    print("Valeur de n^2(n+1)^2/4 pour n="+str(i))
    print(i**2*(i+1)**2/4)
```

```
Valeur de n^2(n+1)^2/4 pour n=1
1.0
Valeur de Sn pour n=2
9
Valeur de n^2(n+1)^2/4 pour n=2
9.0
Valeur de Sn pour n=3
36
Valeur de n^2(n+1)^2/4 pour n=3
36.0
Valeur de Sn pour n=4
100
Valeur de n^2(n+1)^2/4 pour n=4
100.0
```

Exercice E.3 : Soient n un entier naturel non nul et x complexe. Calculer :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} x^{i+j}$$

En sommant sur les lignes on a :

$$\forall x \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{1\leq i,j\leq n} x^{i+j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x^{i+j} = \sum_{i=1}^{n} x^i \sum_{j=1}^{n} x^j$$

On différencie les cas.

1er cas : Si x = 1

On a alors :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} x^{i+j} = \sum_{1\leq i,j\leq n} 1 = n^2$$

2ième cas : Si x ≠ 1

On a alors :

$$\sum_{j=1}^{n} x^j = x\sum_{j=0}^{n-1} x^j = x \times \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{1\leq i,j\leq n} x^{i+j} = x^2 \times \left(\frac{x^n - 1}{x - 1}\right)^2$$

Exercice E.4 : Soit n un entier naturel non nul. Calculer :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} |i-j|$$

On peut faire un tableau à double entrée :

i \ j	1	2	3	…	n − 1	n
1	$\lvert 1-1\rvert = 0$	1	2	…	n − 2	n − 1
2	1	0	1	…	$n-3$	$n-2$
3			⋱	…		
⋮				⋱		
n − 1				…	⋱	
n	$n-1$	n − 2		…	1	0

On peut le faire de deux méthodes.

Méthode 1 : De manière « brutale »

En sommant sur les lignes on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{1 \leq i,j \leq n} |i-j| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|i-j| = \sum_{j=1}^{n}|1-j| + \sum_{j=1}^{n}|n-j| + \sum_{i=2}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{i-1}|i-j| + \sum_{j=i+1}^{n}|i-j|\right)$$

Or on sait que :

$$\sum_{j=1}^{n}|1-j| = \sum_{j=2}^{n}(j-1) = \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{2}$$

De même on a :

$$\sum_{j=1}^{n}|n-j| = \sum_{j=1}^{n}(n-j) = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{1 \leq i,j \leq n} |i-j| &= n(n-1) + \sum_{i=2}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{i-1}|i-j| + \sum_{j=i+1}^{n}|i-j|\right)\\
&= (n-1)n + \sum_{i=2}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{i-1}(i-j) + \sum_{j=i+1}^{n}(j-i)\right)\\
&= (n-1)n + \sum_{i=2}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{i-1} i - \sum_{j=1}^{i-1} j + \sum_{j=i+1}^{n} j - \sum_{j=i+1}^{n} i\right)\\
&= (n-1)n + \sum_{i=2}^{n-1}\left(i(i-1) - \sum_{j=1}^{i-1} j + \sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{i} j - (n-i)i\right)\\
&= (n-1)n + \sum_{i=2}^{n-1}\left(2i^2 - (n+1)i + \frac{n(n+1)}{2} - (i-1)i - i\right)\\
&= (n-1)n + \sum_{i=2}^{n-1}\left(i^2 - (n+1)i + \frac{n(n+1)}{2}\right)\\
&= (n-1)n + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - 1 - (n+1) \times \left(\frac{(n-1)n}{2} - 1\right) + \frac{n(n+1)}{2}(n-2)\\
&= (n-1)n + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - 1 + \frac{n+1}{2}\left(n(n-2) - n^2 + n + 2\right)\\
&= (n-1)n + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - 1 - \frac{n+1}{2}(n-2)\\
&= \frac{1}{6}\left(6n^2 - 6n + 2n^3 - 3n^2 + n - 6 - 3(n^2 - n - 2)\right)\\
&= \frac{1}{6}(2n^3 - 2n)\\
&= \frac{n(n+1)(n-1)}{3}
\end{aligned}$$

Méthode 2 : Par symétrie

Grâce au tableau qui est symétrique par rapport à la diagonale $i = j$ on peut écrire que :

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i,j \leq n} |i-j| &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|i-j| = 2\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}|i-j|\\
&= 2\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}(i-j)
\end{aligned}$$

$$= 2\sum_{i=2}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1} i - \sum_{j=1}^{i-1} j\right)$$
$$= 2\sum_{i=2}^{n}\left(i(i-1) - \frac{i(i-1)}{2}\right)$$
$$= 2\sum_{i=2}^{n}\frac{i^2}{2} - 2\sum_{i=2}^{n}\frac{i}{2}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} i^2 - 1 - \left(\sum_{i=1}^{n} i + 1\right)$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{n(n+1)}{6}(2n+1-3)$$
$$= \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{1 \le i,j \le n} |i-j| = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$$

Programme en Python pour vérifier avec les premiers termes

```python
def fonction(n):
    s=0
    for i in range(1,n+1):
        for j in range(1,n+1):
            s=s+abs(i-j)
    return(s)

for i in range(1,5):
    print("Valeur de Sn pour n="+str(i))
    print(fonction(i))
    print("Valeur de n(n-1)(n+1)/3 pour n="+str(i))
    print(i*(i+1)*(i-1)/3)
```

```
>>>
Valeur de Sn pour n=1
0
Valeur de n(n-1)(n+1)/3 pour n=1
0.0
Valeur de Sn pour n=2
2
Valeur de n(n-1)(n+1)/3 pour n=2
2.0
Valeur de Sn pour n=3
8
Valeur de n(n-1)(n+1)/3 pour n=3
8.0
Valeur de Sn pour n=4
20
Valeur de n(n-1)(n+1)/3 pour n=4
20.0
```

Exercice E.5 : Soit n un entier naturel non nul. Calculer :

$$\sum_{0 \le i \le j \le n} \frac{i}{j+1}$$

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{0 \le i \le j \le n} \frac{i}{j+1} = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j+1}\right) = \sum_{i=0}^{n} i\left(\sum_{j=i}^{n}\frac{1}{j+1}\right)$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_i = \left(\sum_{j=i}^{n}\frac{1}{j+1}\right)$$

Remarque : On ne sait pas exprimer simplement cette somme !

Il faut donc réécrire cette somme différemment !

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{0 \le i \le j \le n} \frac{i}{j+1} = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{j} \frac{i}{j+1} \right) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j+1} \left(\sum_{i=0}^{j} i \right) = \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{j+1} \times \frac{j(j+1)}{2} \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n} j = \frac{n(n+1)}{4}$$

Partie F : Calcul de produit

Exercice F.1 : Soit n un entier naturel. Calculer :

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} 2^k$$

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = \prod_{k=0}^{n} 2^k = 2^{\sum_{k=0}^{n} k} = 2^{\frac{n}{2}(n+1)}$$

Exercice F2 : Soit n un entier naturel non nul. Calculer :

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{k(k+1)}}$$

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n = \prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{k(k+1)}} = 2^{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}}$$

Or on sait que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n = \prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{k(k+1)}} = 2^{\frac{n}{n+1}}$$

Exercice F3 : Déterminer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \prod_{k=0}^{n} (2k+1)$$

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \prod_{k=0}^{n} (2k+1) = 1 \times 3 \times \dots \times (2n+1) = \frac{1 \times \mathbf{2} \times 3 \times \mathbf{4} \times \dots \times (\mathbf{2n}) \times (2n+1)}{\mathbf{2} \times \mathbf{4} \times \dots \times (\mathbf{2n})} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

Exercice F4 : Démontrer que :

$$\forall\, n \geq 1, \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

On doit démontrer deux inégalités. On va prouver les deux par récurrence.
On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

On pose les propositions suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n) = " \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}} "$$

Initialisation : n = 1

On sait que :

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$$

La proposition $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel non nul fixé. On suppose vrai $\mathcal{P}(\mathrm{n})$. On a alors :

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

On sait que :

$$\frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}\left((n+1)!\right)^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n+1} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}} \times \frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}$$

Montrons que :

$$\forall n \geq 2, \frac{n+\frac{1}{2}}{n+1} \geq \frac{2\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}}$$

On sait que :

$$\forall n \geq 2, \frac{n+\frac{1}{2}}{n+1} \geq \frac{2\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}} \Leftrightarrow n+\frac{1}{2} \geq \sqrt{n(n+1)}$$

Or on a :

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - n(n+1) = \frac{1}{4} \geq 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \geq 2, \frac{n+\frac{1}{2}}{n+1} \geq \frac{2\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}}$$

On en déduit donc que :

$$\frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}\left((n+1)!\right)^2} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}} \times \frac{n+\frac{1}{2}}{n+1} \geq \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$$

Donc $\mathcal{P}(\mathrm{n}+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(1)$ est vraie et $\mathcal{P}(\mathrm{n})$ est héréditaire donc d'après le principe de récurrence :

$$\forall n \geq 1, \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n}$$

De même on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{Q}(n) = " \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} "$$

Initialisation : n = 1

On sait que :

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \ \left(car\ 2 > \sqrt{3}\right)$$

La proposition $\mathcal{Q}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel non nul fixé. On suppose vrai $\mathcal{P}(\mathrm{n})$. On a alors :

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

On sait que :

$$\frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}\left((n+1)!\right)^2}=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\times\frac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2}=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\times\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n+1}\leq\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\times\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}$$

Montrons que :

$$\forall n\geq 2,\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}\leq\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n+3}}$$

On sait que :

$$\forall n\geq 2,\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}\leq\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n+3}}\Leftrightarrow n+\frac{1}{2}\leq\sqrt{n+\frac{1}{2}}\times\frac{n+1}{\sqrt{n+\frac{3}{2}}}\Leftrightarrow n+\frac{1}{2}\leq\frac{(n+1)^2}{n+\frac{3}{2}}\ \left(car\ x\mapsto\sqrt{x}\ est\ croissante\ sur\ \mathbb{R}^+\right)$$

Or on a :

$$n+\frac{1}{2}-\frac{n^2+2n+1}{n+\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4\left(n+\frac{3}{2}\right)}<0$$

On en déduit donc que :

$$\forall n\geq 2,\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}\leq\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n+3}}$$

On en déduit donc que :

$$\frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}\left((n+1)!\right)^2}\leq\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\times\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}\leq\frac{1}{\sqrt{2n+3}}$$

Donc $\mathcal{Q}(\mathrm{n}+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{Q}(1)$ est vraie et $\mathcal{Q}(\mathrm{n})$ est héréditaire donc d'après le principe de récurrence :

$$\forall n\geq 1,\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2n-1}{2n}\leq\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n\geq 1,\frac{1}{2\sqrt{n}}\leq\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2n-1}{2n}\leq\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

Exercice F5 : Soit n un entier naturel non nul.

a) Calculer :

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}k(n+1-k)$$

b) En déduire que :

$$\forall\ n\in\mathbb{N}^*,n!\leq\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

a) On sait que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,P_n=\prod_{k=1}^{n}k(n+1-k)=\left(\prod_{k=1}^{n}k\right)\times\left(\prod_{k=1}^{n}(n+1-k)\right)=\left(\prod_{k=1}^{n}k\right)\left(\prod_{k=1}^{n}k\right)=(n!)^2$$

b) On pose la fonction :

$$f_n:\begin{cases}[1;n]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x(n+1-x)\end{cases}$$

On sait que $\mathrm{f_n}\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ car c'est un polynôme et :

$$\forall x\in\mathbb{R},f_n'(x)=n+1-x-x=-2x+n+1$$

On en déduit les variations de $\mathrm{f_n}$:

x	1	$\frac{n+1}{2}$	n
$f_n'(x)$	$+$	0	$-$
f_n	$n \nearrow$		$\searrow n$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in [1;n], f(x) \leq f\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

Or on a :

$$f\left(\frac{n+1}{2}\right) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n = (n!)^2 = \prod_{k=1}^{n} k(n+1-k) \leq \left(\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\right) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}$$

Or la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit donc que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

Partie G : binôme de Newton

Exercice G.1 : Soit $(a, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$. Ecrire sous une seule forme :

$$(1+a)^n + (1-a)^n - 2a^n$$

D'après la formule du binôme de Newton on a :

$$(a,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*, (1+a)^n + (1-a)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k a^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+(-1)^k)a^k$$

On peut donc distinguer deux cas.

1er cas : n est pair : $\exists p \in \mathbb{N}, n = 2p$

On a alors :

$$(1+a)^{2p} + (1-a)^{2p} = \sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}(1+(-1)^k)a^k = \sum_{k=0}^{p}\binom{2p}{2k}2a^{2k} = 2a^{2p} + 2\sum_{k=0}^{p}\binom{2p}{2k}a^{2k}$$

On en déduit donc que :

$$(1+a)^{2p} + (1-a)^{2p} - 2a^{2p} = 2\sum_{k=0}^{p}\binom{2p}{2k}a^{2k}$$

2ième cas : n est impair : $\exists p \in \mathbb{N}, n = 2p+1$

On a alors :

$$(1+a)^{2p+1} + (1-a)^{2p+1} = \sum_{k=0}^{2p+1}\binom{2p+1}{k}(1+(-1)^k)a^k = \sum_{k=0}^{p}\binom{2p+1}{2k}2a^{2k}$$

On a alors :

$$(1+a)^{2p+1} + (1-a)^{2p+1} - 2a^{2p+1} = -2a^{2p+1} + 2\sum_{k=0}^{p}\binom{2p+1}{2k}a^{2k}$$

On en déduit donc que :

$$\forall (a,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*, (1+a)^n + (1-a)^n - 2a^n = 2\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k}a^{2k} - (1-(-1)^n)a^n$$

Exercice G.2 : Démontrer que :

$$\forall\ (x;n) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1 + nx$$

On sait d'après le binôme de Newton que :

$$\forall\ (x;n) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}, n \geq 2, (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \binom{n}{0} x^0 + \binom{n}{1} x^1 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Or on sait que :

$$\forall\ (x;n) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}, n \geq 2, \forall k \in [\![2;n]\!], \binom{n}{k} x^k \geq 0$$

On en déduit que :

$$\forall\ (x;n) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}, n \geq 2, \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k \geq 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall\ (x;n) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}, n \geq 2\ (1+x)^n \geq 1 + nx$$

Pour $n = 1$ et $n = 0$ c'est une égalité. On en déduit donc que :

$$\forall\ (x;n) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1 + nx$$

Exercice G.3 : Déterminer les sommes suivantes :

$$A = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \qquad B = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} \qquad C = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$$

$$A = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$$

On peut faire ce calcul de deux manières différentes.

Méthode 1 : La méthode « brutale »

1er cas : $n = 0 \Longrightarrow A = 0$

2^{ième} cas : $n \geq 1$

On a :

$$A = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$$

De plus on sait que :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![1,n]\!], k \binom{n}{k} &= k \times \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!\,\big((n-1)-(k-1)\big)!} \\ &= n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,\big((n-1)-(k-1)\big)!} \\ &= n \binom{n-1}{k-1}\end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \geq 1, A = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n \times \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n \times 2^{n-1}$$

Cette formule reste vraie pour $n = 0$.

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n \times 2^{n-1}$$

Méthode 2 : En utilisant une fonction

Soit $n \geq 1$. On pose :

$$f_n:\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (1+x)^n \end{cases}$$
Alors f est une fonction polynômiale, donc elle est dérivable et :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = n(1+x)^{n-1}$$
De plus, d'après la formule du binôme on sait que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$
On en déduit donc que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}$$
On a alors :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}$$
Il suffit ensuite de prendre $x = 1$ et on obtient :
$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n \times 2^{n-1}$$

$$B = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$$
On peut faire ce calcul de deux manières différentes.

Méthode 1 : La méthode « brutale »

1er cas : $n = 0 \Longrightarrow B = 0$

2ième cas : $n \geq 1$

On a :
$$B = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}$$
De plus on sait que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![1,n]\!], k^2 \binom{n}{k} = k^2 \times \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = k \times k \times \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = n \times k \times \binom{n-1}{k-1}$$
D'après la question précédente.

On en déduit donc que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, B = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n \sum_{k=1}^{n} k \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \binom{n-1}{k} = n \sum_{k=0}^{n-1} k \binom{n-1}{k} + n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}$$
On en déduit donc que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, B = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n \sum_{k=0}^{n-1} k \binom{n-1}{k} + n \times 2^n$$
De plus on sait que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n \times 2^{n-1}$$
On en déduit donc que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} k \binom{n-1}{k} = (n-1)2^{n-2}$$
On en déduit donc que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, B = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n \times 2^{n-1} = n \times 2^{n-2}(n-1+2) = n(n+1)2^{n-2}$$
Cette formule reste valable pour $n = 0$.

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$$

Méthode 2 : En utilisant une fonction

Soit $n \geq 1$. On pose :

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (1+x)^n \end{cases}$$

Alors f est une fonction polynômiale, donc elle est dérivable deux fois et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$$

De plus, d'après la formule du binôme on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^{k-2}$$

On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^{k-2} = n(n-1)(1+x)^{n-2}$$

Il suffit ensuite de prendre $x = 1$ et on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n \times (n-1)2^{n-2}$$

On a alors :

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} - \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n \times (n-1)2^{n-2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = n \times (n-1)2^{n-2} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$$

$$= n \times (n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}$$

$$= n2^{n-2}(n-1+2)$$

$$= n(n+1)2^{n-2}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$$

$$C = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$$

On peut faire ce calcul de deux manières différentes.

Méthode 1 : La méthode « brutale »

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![1, n]\!], \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{k+1} \times \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{1}{n+1} \times \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,\big((n+1)-(k+1)\big)!}$$

$$= \frac{1}{n+1} \times \binom{n+1}{k+1}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, C = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} - 1\right) = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

Méthode 2 : En utilisant une fonction

Soit n ∈ ℕ. On pose :

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (1+x)^n \end{cases}$$

Alors f est une fonction polynômiale, donc elle est continue donc elle admet une primitive F_n :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}$$

De plus, d'après la formule du binôme on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

On en déduit donc qu'une primitive de f_n est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k} x^{k+1}}{k+1}$$

On a alors :

$$\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} x^{k+1} + c$$

ATTENTION : Deux primitives diffèrent d'une constante !!

Pour déterminer c il faut prendre une valeur particulière pour x. Par exemple $x = 0$.

On a alors :

$$\frac{1}{n+1} = c$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} x^{k+1} + \frac{1}{n+1}$$

On prend ensuite $x = 1$ et on obtient :

$$\frac{2^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} + \frac{1}{n+1}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

Exercice G.4 : Calculer :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$$

Indice : On pourra faire le changement d'indice j=2n+1-k

Il peut être judicieux de comprendre ce que cela représente dans le triangle de Pascal.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	1									
3	1	1	1								
4	2	1	2	1							
5	3	1	3	3	1						
6	4	1	4	6	4	1					
7	5	1	5	10	10	5	1				
8	6	1	6	15	20	15	6	1			
9	7	1	7	21	35	35	21	7	1		
10	8	1	8	28	56	70	56	28	8		
11	9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

On sait que dans le triangle de Pascal, la somme de la ligne n vaut 2^n, résultat qui se traduit par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Ce résultat a été démontré en cours et dans l'exercice précédent (A).
Ici on nous demande la valeur de la moitié de la somme de la ligne $2n+1$, ce qui revient à dire que le résultat est :

$$\frac{2^{2n+1}}{2} = 2^{2n}$$

On doit donc démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n}$$

Démontrons ce résultat.
On pose le changement de variable suivant :

$$j = 2n+1-k$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} = \sum_{j=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{2n+1-j} = \sum_{j=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} \left(car\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0;n]\!], \binom{n}{k} = \binom{k}{n-k} \right)$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} + \sum_{j=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} = \sum_{j=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} = 2^{2n+1}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n}$$

Exercice G.5 : Calculer :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 1^{n-k} = (1-1)^n = 0$$

Exercice G.6 : Soit n un entier naturel non nul. On pose :

$$f_n : \begin{cases}]-1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^{n-1} \ln(1+x) \end{cases}$$

Montrer que :

$$\forall x > -1, f_n^{(n)}(x) = (n-1)!\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+x)^k}\right)$$

On démontre cela par récurrence.
On a :

$$f_n : \begin{cases}]-1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^{n-1}\, ln(1+x) \end{cases}$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n = \left\{\forall x > -1, f_n^{(n)}(x) = (n-1)!\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+x)^k}\right)\right\}$$

On raisonne par récurrence pour montrer que P_n est toujours vraie pour tout entier naturel n non nul.

Initialisation : *n=1*
On a :

$$\forall x > -1, f_1(x) = ln(1+x) \Longrightarrow f_1'(x) = \frac{1}{x+1}$$

Or on a :

$$(1-1)!\left(\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{(1+x)^k}\right) = 0! \times \frac{1}{x+1} = f_1'(x)$$

Donc P_1 est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel non nul fixé. On suppose vraie P_n. On a :

$$f_{n+1} : \begin{cases}]-1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^{n}\, ln(1+x) \end{cases} \Longrightarrow \forall x > -1, f_{n+1}(x) = x f_n(x)$$

On utilise alors la formule de Leibniz :

Application (La formule de Leibniz): Soient $(f, g) \in \left(\mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})\right)^2$. Alors $f \times g \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$ et on a :

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

On a alors :

$$\forall x > -1, f_{n+1}^{(n+1)}(x) = x f_n^{(n+1)}(x) + (n+1)\, f_n^{(n)}(x)$$

Or on sait d'après l'hypothèse de récurrence que :

$$\forall x > -1, f_n^{(n)}(x) = (n-1)!\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+x)^k}\right)$$

$$\Longrightarrow \forall x > -1, f_n^{(n+1)}(x) = f_n^{(n)\prime}(x) = (n-1)!\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{-k}{(1+x)^{k+1}}\right)$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \forall x > -1, f_{n+1}^{(n+1)}(x) &= x(n-1)!\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{-k}{(1+x)^{k+1}}\right) + (n+1)(n-1)!\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+x)^k}\right) \\ &= (n-1)!\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-xk}{(1+x)^{k+1}} + \frac{n+1}{(1+x)^k}\right) \\ &= (n-1)!\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-k(1+x)+k}{(1+x)^{k+1}} + \frac{n+1}{(1+x)^k}\right) \\ &= (n-1)!\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{(1+x)^{k+1}} + \frac{n+1-k}{(1+x)^k}\right) \end{aligned}$$

$$= (n-1)!\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+1-k}{(1+x)^k}\right) + (n-1)!\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{(1+x)^{k+1}}\right)$$
$$= (n-1)!\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+1-k}{(1+x)^k}\right) + (n-1)!\sum_{k=2}^{n+1}\left(\frac{k-1}{(1+x)^k}\right)$$
$$= \frac{n!}{1+x} + \frac{n!}{(1+x)^{n+1}} + (n-1)!\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{n}{(1+x)^k}\right)$$
$$= n!\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{(1+x)^k}\right)$$

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : P_1 est vraie et P_n est héréditaire donc d'après le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier naturel n non nul.

Exercice G.7 : Soit n un entier naturel. Déterminer la dérivée n-ième de $x \mapsto x^n(1+x)^n$. En déduire la valeur de :

$$I = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$$

_ Calcul de la dérivée $n-i\grave{e}me$

Méthode 1 : En développant

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^n(1+x)^n = x^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n+k}$$

De plus on sait par une récurrence immédiate que :

$$\frac{d^i}{dx^i}(x^k) = \begin{cases} 0 \; si \; k > i \\ \dfrac{k!}{(k-i)!}x^{k-i} si \; 0 \le k \le i \end{cases}$$

On a donc par linéarité de la dérivation :

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(n+k)!}{k!}x^k = \frac{(2n)!}{n!}x^n + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\frac{(n+k)!}{k!}x^k$$

Méthode 2 : Avec Leibniz

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^n(1+x)^n = g_n(x) \times h_n(x) \; avec \begin{cases} g_n(x) = x^n \\ h_n(x) = (1+x)^n \end{cases}$$

De même par récurrence immédiate on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_n^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k}\big(g_n(x)\big) = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, h_n^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k}\big(h_n(x)\big) = \frac{n!}{(n-k)!}(1+x)^{n-k}$$

O a donc d'après Leibniz :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g_n^{(k)}(x)h_n^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}\frac{n!}{(k)!}(1+x)^k$$
$$= n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k}x^{n-k}(1+x)^k$$

Or on sait que :

$$x^{n-k}(1+x)^k = x^{n-k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^i = x^n + \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}x^i$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\left[x^n + \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}x^i\right]$$
$$= n!\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 x^n + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}x^i\right)$$
$$= \left(n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\right)x^n + \sum_{i=0}^{k-1}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{k}{i}\right)x^i$$

_ Observation des termes devant x^n

On peut maintenant conclure en observant les termes devant x^n, qui doivent être égaux !

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{n!}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{n! \times n!} = \binom{2n}{n}}$$