Correction DS n°2

Exercice 1 : Limite d'une somme

Le but de cet exercice est de calculer :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$$

Dans toute la suite de cet exercice, on pose :

$$f(x)=\arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$$

1) Rappeler l'ensemble de définition de arctan et en déduire l'ensemble de définition de f.
2) Démontrer que :

$$\forall \mathrm{x}\in\mathbb{R}, \arctan'(\mathrm{x})=\frac{1}{1+\mathrm{x}^2}$$

3) En déduire que :

$$\forall x\in\mathbb{R}, \arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)=\arctan(x+1)-\arctan(x)$$

4) Démontrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, S_n=\arctan(n+1)$$

5) Déterminer la limite de S_n en $+\infty$.

1) On sait que $arctan$ est définie sur $\mathbb{R}$. On en déduit donc que :

$$\mathcal{D}_f=\{x\in\mathbb{R}, 1+x+x^2\neq 0\}$$

Or on a :

$$\forall x\in\mathbb{R}, 1+x+x^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}>0$$

On en déduit donc que $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$.
2) On sait que :

$$\forall x\in\mathbb{R}, tan'(x)=1+\tan^2(x)$$

On en déduit donc que :

$$\forall x\in\mathbb{R}, \arctan'(\mathrm{x})=\frac{1}{1+\tan^2(arctan(x))}=\frac{1}{1+x^2}$$

3) On pose pour tout x positif :

$$\forall \mathrm{x}\geq 0, \mathrm{g}(\mathrm{x})=\arctan\left(\frac{1}{\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+1}\right)-\arctan(\mathrm{x}+1)+\arctan(\mathrm{x})$$

$\mathrm{g}\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ par composé de fonctions dérivables et :

$$\begin{aligned}\forall \mathrm{x}\geq 0, \mathrm{g}'(\mathrm{x})&=-\frac{2\mathrm{x}+1}{(\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+1)^2}\times\frac{1}{1+\frac{1}{(1+\mathrm{x}+\mathrm{x}^2)^2}}-\frac{1}{1+(1+\mathrm{x})^2}+\frac{1}{1+\mathrm{x}^2}\\&=\frac{-2\mathrm{x}-1}{1+(\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+1)^2}+\frac{-1-\mathrm{x}^2+1+(1+\mathrm{x})^2}{(1+\mathrm{x}^2)(1+(1+\mathrm{x})^2)}\\&=\frac{-2\mathrm{x}-1}{1+(\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+1)^2}+\frac{2\mathrm{x}+1}{(1+\mathrm{x}^2)(1+(1+\mathrm{x})^2)}\end{aligned}$$

Or on a :

$$\forall \mathrm{x}\in\mathbb{R}, 1+(\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+1)^2=2+2\mathrm{x}+3\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}^3+\mathrm{x}^4$$

De même on a :

$$(1+\mathrm{x}^2)(1+(1+\mathrm{x})^2)=(1+\mathrm{x}^2)(2+2\mathrm{x}+\mathrm{x}^2)=2+2\mathrm{x}+3\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}^3+\mathrm{x}^4$$

On en déduit donc que :

$$\forall \mathrm{x}\geq 0, \mathrm{g}'(\mathrm{x})=0$$

Donc la fonction g est constante sur $\mathbb{R}^+$.
Or on a :

$$\mathrm{f}(0)=\arctan(1)-\arctan(1)+\arctan(0)=0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \geq 0, \arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) = \arctan(x+1) - \arctan(x)$$

b) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} (\arctan(k+1) - \arctan(k))$$
$$= \arctan(n+1) - \arctan(0) \quad \text{(par télescopage)}$$
$$= \arctan(n+1)$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 1 : Les fonctions trigonométriques réciproques

Dans tout cet exercice on pose :

$$f: x \mapsto \arccos[\cos(x)] + \frac{1}{2}\arccos[\cos(2x)]$$

1) a) Déterminer la valeur de $f(0)$ en justifiant.

b) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Déterminer la valeur de $f((2k+1)\pi)$.

2) Démontrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

3) Démontrer que f est paire.

4) Montrer que f est 2π −pédiodique.

5) Tracer le graphe de f sur $[-4\pi; 4\pi]$.

*(**Indication** : On pourra distinguer deux cas :* $\left[0;\frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$*)*

1) a) $f(0) = \arccos(\cos(0)) + \frac{1}{2}\arccos(\cos(0)) = \frac{3}{2}\arccos(1) = 0$

b) On a :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, f((2k+1)\pi) = \arccos(\cos((2k+1)\pi)) + \frac{1}{2}\arccos\left[\cos\left(2((2k+1)\pi)\right)\right]$$
$$= \arccos(-1) + \frac{1}{2}\arccos(1)$$
$$= \pi$$

2) On sait que :

$\mathcal{D}_{\arccos} = [-1;1]$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) \in [-1;1]$.

On en déduit donc que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

3) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \arccos[\cos(-x)] + \frac{1}{2}\arccos[\cos(2(-x)] = \arccos[\cos(x)] + \frac{1}{2}\arccos[\cos(2x)] = f(x)$$

Donc f est paire.

4) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+2\pi) = \arccos[\cos(x+2\pi)] + \frac{1}{2}\arccos[\cos(2(x+2\pi)] = \arccos[\cos(x)] + \frac{1}{2}\arccos[\cos(2x)]$$

Car cos est 2π −périodique.

On en déduit donc que f est 2π −périodique.

5) Il suffit d'étudier f sur $[0;\pi]$ puis de la prolonger sur $[-\pi;\pi]$ par parité puis sur $[-4\pi;4\pi]$ par périodicité.

On a :

$$\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], 2x \in [0;\pi]$$

De plus on sait que :

$$\forall x \in [0;\pi], \arccos(\cos(x)) = x$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], f(x) = \arccos[\cos(x)] + \frac{1}{2}\arccos[\cos(2x)] = x + \frac{1}{2} \times 2x = 2x$$

De plus on sait que :

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right], 2x \in [\pi; 2\pi]$$

De plus on sait que :

$$\forall x \in [\pi; 2\pi], \cos(x) = \cos(\pi + \alpha) = \cos(\pi - \alpha) \ \text{ avec } \alpha = x - \pi$$

De plus on a :

$$\forall x \in [\pi; 2\pi], x - \pi \in [0; \pi]$$

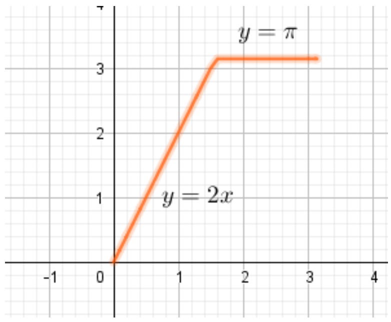
On en déduit donc que :

$$\forall x \in [\pi; 2\pi], \arccos(\cos(x)) = \arccos(\cos(\pi - \alpha)) = \pi - \alpha = \pi - (x - \pi) = 2\pi - x$$

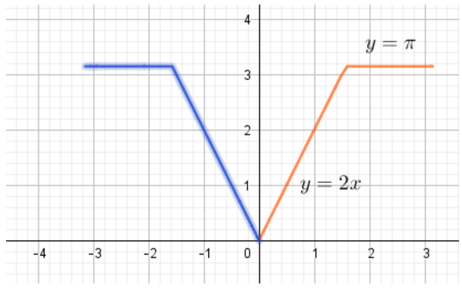
On en déduit donc que :

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right], f(x) = \arccos[\cos(x)] + \frac{1}{2}\arccos[\cos(2x)] = x + \frac{1}{2}(2\pi - 2x) = \pi$$

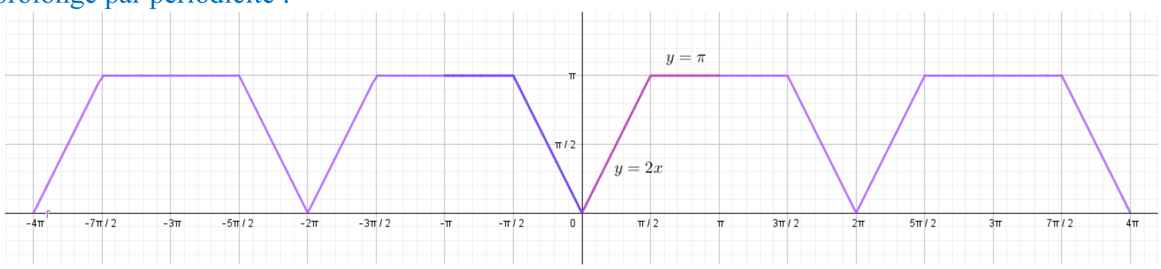
On a donc le graphe de f sur $[0; \pi]$:



Par parité on a :



Enfin on prolonge par périodicité :



Exercice 3 : Une bijection sur un sous-ensemble de $\mathbb{C}$

Dans tout cet exercice on pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{C}\backslash\{-i\} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \dfrac{z - i}{iz - 1} \end{cases}$$

1) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{C}\backslash\{i\}$ dans un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ à déterminer.

2) Déterminer une expression de $f^{-1}(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\{-i\}$.

3) Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R})$.

4) Démontrer que l'équation $f(z) = z$ admet deux solutions distinctes.

5) Dans cette question on souhaite montrer que :

$$f^{-1}(\mathbb{U}\backslash\{-i\}) = \mathbb{R}$$

a) Montrer que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, 1 - e^{i\theta} = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}}$$

b) En déduire que :

$$\forall\theta\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[, f(z)=e^{i\theta}\Leftrightarrow z=\frac{-1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

c) Soit $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. Rappeler les solutions de $z^n=1$.

d) Résoudre l'équation $\left(f(z)\right)^n=1$ et montrer que toutes les solutions sont réelles.

1) Soit $z'\in\mathbb{C}$. On résout :

$$f(z)=z'\Leftrightarrow\frac{z-i}{iz-1}=z'\Leftrightarrow z(1-iz')=i-z'$$

1^{er} cas : Si $1-iz'=0$

On sait que :

$$1-iz'=0\Leftrightarrow z'=-i$$

Or on a :

$$i-(-i)=2i\neq 0$$

On en déduit que $f(z)=-i\Leftrightarrow z\in\emptyset$

$2^{ième}$ cas : $1-iz'\neq 0$

On a alors :

$$f(z)=z'\Leftrightarrow z=\frac{i-z'}{1-iz'}=\frac{z'-i}{iz'-1}=f(z')$$

On en déduit donc que f est bijective de $\mathbb{C}\backslash\{-i\}$ dans lui-même et qu'elle est involutive : $f^{-1}=f$.

2) On l'a déjà fait précédemment !

3) On sait que $f^{-1}(\mathbb{R})=\left\{z\in\mathbb{C}\backslash\{-i\},\mathcal{Im}\left(f(z)\right)=0\right\}$.

On pose $z=x+iy, (x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0;-1)\}$. On a alors :

$$\begin{aligned}f(x+iy)&=\frac{x+i(y-1)}{(-1-y)+ix}\\&=\frac{\left(x+i(y-1)\right)(-(y+1)-ix)}{(1+y)^2+x^2}\\&=\frac{-x(y+1)+x(y-1)}{(1+y)^2+x^2}+i\frac{-x^2+1-y^2}{(1+y)^2+x^2}\end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$f(z)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z\in\mathbb{U}\backslash\{-i\}$$

4) On résout :

$$f(z)=z\Leftrightarrow\frac{z-i}{iz-1}=z\Leftrightarrow iz^2-2z+i=0$$

On a : $\Delta=4-4i^2=8$

On en déduit donc que l'équation admet deux solutions distinctes car $\Delta\neq 0$. On ne cherche pas forcément les solutions.

Les voici tout de même :

$$\frac{z-i}{iz-1}=z\Leftrightarrow\begin{cases}z_1=\dfrac{2-2\sqrt{2}}{2i}=i(\sqrt{2}-1)\\ \quad\quad ou\\ z_2=\dfrac{2+2\sqrt{2}}{2i}=-i(1+\sqrt{2})\end{cases}$$

5) a) On sait que :

$$\forall\theta\in\mathbb{R}, 1-e^{i\theta}=e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{-\frac{i\theta}{2}}-e^{\frac{i\theta}{2}}\right)=-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}}$$

b) On sait que :

$$\begin{aligned}\forall\theta\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[, f(z)=e^{i\theta}&\Leftrightarrow\frac{z-i}{iz-1}=e^{i\theta}\\&\Leftrightarrow z\left(1-ie^{i\theta}\right)=i-e^{i\theta}\\&\Leftrightarrow z\left(1-e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}\right)=i\left(1+e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}\right)\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -2\mathrm{i}z\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = 2\mathrm{i}\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

c) On sait que :

$$z^n = 1 \Leftrightarrow z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![0; n-1]\!]$$

d) On sait que :

$$\left(f(z)\right)^n = 1 \Leftrightarrow f(z) = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{tan\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{4}\right)}\ avec\ k \in [\![0; n-1]\!], k \neq \frac{1}{4}n$$

Remarque : L'énoncé est ici incomplet ! La question 5) nous demande de montrer que :

$$\boxed{\mathrm{f}^{-1}(\mathbb{U}\backslash\{-\mathrm{i}\}) = \mathbb{R}}$$

Cependant aucune sous-question ne nous demande de conclure ! C'est déjà un premier problème.
Ensuite si les questions et 2 et 3 sont bien faites, on a démontré que f était bijective, que $f^{-1} = f$ et que $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{U}\backslash\{-i\}$. On a donc :

$$f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{U}\backslash\{-i\} \Leftrightarrow f(\mathbb{R}) = \mathbb{U}\backslash\{-i\} \Leftrightarrow \mathbb{R} = f^{-1}(\mathbb{U}\backslash\{-i\})$$

Donc il n'y a aucun calcul à faire. Ce que je viens de faire précédemment, nous ne pouvons le faire que si f est bijective. Sinon on peut avoir $f(A) = B$ et $f^{-1}(B) \neq A$. Il suffit de prendre $f : x \mapsto x^2, A = [0;1]\ et\ B = [0;1]$. On a alors :

$$f(A) = B\ et\ f^{-1}(B) = [-1;1] \neq A$$

Mais ici il n'y a aucun problème !

Bon admettons que f ne soit pas bijective, et que l'on veuille démontrer que $\mathbb{R} = f^{-1}(\mathbb{U}\backslash\{-i\})$.
C'est-à-dire que l'on cherche tous les antécédents $z \in \mathbb{U}\backslash\{-i\}$ tel que $f(z) \in \mathbb{U}\backslash\{-i\}$.
On sait que $\mathbb{U}\backslash\{-i\} = \left\{z = e^{i\theta}, \theta \not\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]\right\}$. Ainsi on résout :

$$f(z) = e^{i\theta}$$

Ensuite on fait le calcul :

$$f(z) = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\ \left(avec\ \theta \not\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]\right)$$

On a donc montré que :

$$f^{-1}(\mathbb{U}\backslash\{-i\}) \subset \mathbb{R}$$

Encore faut-il montrer l'autre inclusion. On peut le faire de deux façons.
Soit on prendre un $z \in \mathbb{R}$ et on montre que $f(z) \in f^{-1}(\mathbb{U}\backslash\{-i\})$, ce qui montre que $\mathbb{R} \subset f^{-1}(\mathbb{U}\backslash\{-i\})$.
Ou bien on se sert de l'équivalence :

$$f(z) = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\ \left(avec\ \theta \not\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]\right)$$

Puis on montre que

$$g : \theta \mapsto = -\frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

Réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$, ce qui prouve que $f(x) \in \mathbb{U}\backslash\{-i\} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Problème : Des fonctions hyperboliques

Le but de ce problème est de démontrer que :

$$\forall\ \mathrm{x} \in \mathbb{R}, \frac{1}{2}\arctan(\mathrm{sh}(\mathrm{x})) = \arctan\left(\frac{\mathrm{sh}(\mathrm{x})}{1+\mathrm{ch}(\mathrm{x})}\right)$$

Partie A : En utilisant la dérivation

1) On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}\arctan(\mathrm{sh}(x)) \end{cases} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \arctan\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\right) \end{cases}$$

a) Démontrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} = g'(x)$$

b) En déduire que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \frac{1}{2}\arctan(\mathrm{sh}(x)) = \arctan\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\right)$$

Partie B : Grâce à la tangente

1) Rappeler le domaine de définition de la tangente, noté $\mathcal{D}_{\tan}$

2) a) Démontrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, 2f(x) \in \mathcal{D}_{\tan}$$

b) Déterminer l'expression de $\tan(2f(x))$

3) a) Etudier la fonction :

$$h : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)} \end{cases}$$

b) En déduire que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, h(x) \in]-1;1[$

c) En déduire que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, 2g(x) \in \mathcal{D}_{\tan}$

d) Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \tan(2g(x)) = \mathrm{sh}(x)$

e) En déduire le résultat voulu.

Partie C : Une application

1) a) Démontrer que

$$\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{et } \mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

b) Déterminer l'unique $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que :

$$\tan(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

2) En déduire que :

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

3) Proposez une autre façon de déterminer la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Partie A :

1) a) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{sh'(x)}{1+sh^2(x)} = \frac{1}{2} \times \frac{ch(x)}{ch^2(x)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}$$

De plus on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \arctan(u(x)) \; avec \; u(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}$$

On a d'une part :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = \frac{ch(x)(1+ch(x)) - sh^2(x)}{(1+ch(x))^2} = \frac{1+ch(x)}{(1+ch(x))^2} = \frac{1}{1+ch(x)}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)} = \frac{\frac{1}{1+ch(x)}}{1+\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\right)^2} = \frac{1+ch(x)}{(1+ch(x))^2 + sh^2(x)} = \frac{1+ch(x)}{1+2ch(x)+ch^2(x)+sh^2(x)}$$

Or on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, ch^2(x) + sh^2(x) = ch^2(x) + (ch^2(x) - 1) = 2ch^2(x) - 1$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{1 + ch(x)}{2ch(x)\big(1 + ch(x)\big)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{x})}$$

On a bien :

$$\boxed{\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}, \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{ch}(\mathbf{x})} = \mathbf{g}'(\mathbf{x})}$$

b) On pose :

$$\forall\, \mathrm{x} \in \mathbb{R}, \mathrm{h}(\mathrm{x}) = f(x) - g(x)$$

On a :

$$\forall\, \mathrm{x} \in \mathbb{R}, \mathrm{h}'(\mathrm{x}) = f'(x) - g'(x) = 0$$

On en déduit donc que :

$$\exists c \in \mathbb{R}, h(x) = c = h(0) = f(0) - g(0) = 0$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \mathbf{arctan}\big(\mathbf{sh}(\mathbf{x})\big) = \mathbf{arctan}\left(\frac{\mathbf{sh}(\mathbf{x})}{\mathbf{1} + \mathbf{ch}(\mathbf{x})}\right)}$$

Partie B :

1) On sait que :

$$\boxed{\mathcal{D}_{\tan} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[}$$

2) a) On sait que :

$$\forall\, \mathrm{x} \in \mathbb{R}, \arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$$

On en déduit donc que :

$$\forall\, \mathrm{x} \in \mathbb{R}, \arctan\big(sh(x)\big) \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}, \mathbf{2f}(\mathbf{x}) \in \mathcal{D}_{\tan}}$$

b) On a :

$$\boxed{\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}, \mathbf{tan}\big(\mathbf{2f}(\mathbf{x})\big) = \mathbf{tan}\Big(\mathbf{arctan}\big(\boldsymbol{sh}(\boldsymbol{x})\big)\Big) = \boldsymbol{sh}(\boldsymbol{x})}$$

3) a) On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = \frac{\mathrm{sh}(\mathrm{x})}{1 + \mathrm{ch}(\mathrm{x})}$$

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(-x) = \frac{\mathrm{sh}(-\mathrm{x})}{1 + \mathrm{ch}(-\mathrm{x})} = -\frac{\mathrm{sh}(\mathrm{x})}{1 + \mathrm{ch}(\mathrm{x})}$$

Donc u est impaire.

De plus on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = \frac{ch(x)\big(1 + ch(x)\big) - sh^2(x)}{\big(1 + ch(x)\big)^2} = \frac{1 + ch(x)}{\big(1 + ch(x)\big)^2} = \frac{1}{1 + ch(x)} > 0$$

Donc u est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{sh}(\mathrm{x})}{1 + \mathrm{ch}(\mathrm{x})} = \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{1 + \frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2 + e^x}}_{car \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2e^{-x} + 1} = 1$$

Par imparité on en déduit donc que :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\mathrm{sh}(\mathrm{x})}{1 + \mathrm{ch}(\mathrm{x})} = -1$$

b) On en déduit donc que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \frac{\mathbf{sh(x)}}{\mathbf{1+ch(x)}} \in]-1;1[}$$

c) On a d'après la question précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 < \frac{\mathrm{sh(x)}}{1+\mathrm{ch(x)}} < 1$$

$$\Longrightarrow \arctan(-1) < \arctan\left(\frac{\mathrm{sh(x)}}{1+\mathrm{ch(x)}}\right) < \arctan(1) \quad (car \arctan est\ croissante\ sur\ \mathbb{R})$$

$$\Longrightarrow -\frac{\pi}{4} < g(x) < \frac{\pi}{4}$$

$$\Longrightarrow -\frac{\pi}{2} < 2g(x) < \frac{\pi}{2}$$

On en déduit donc que : $\boxed{\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}, \mathbf{2g(x)} \in \mathcal{D}_{\mathbf{tan}}}$

d) On a :

$$\forall\, \mathrm{x} \in \mathbb{R}, 2\mathrm{g(x)} = 2\arctan\left(\frac{\mathrm{sh(x)}}{1+\mathrm{ch(x)}}\right)$$

$$\Longrightarrow \tan(2g(x)) = \tan\left(2\arctan\left(\frac{\mathrm{sh(x)}}{1+\mathrm{ch(x)}}\right)\right)$$

Or on sait que :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[, \tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

On en déduit donc que :

$$\forall\, \mathrm{x} \in \mathbb{R}, \tan(2g(x)) = \frac{2\tan\left(\arctan\left(\frac{\mathrm{sh(x)}}{1+\mathrm{ch(x)}}\right)\right)}{1-\tan^2\left(\arctan\left(\frac{\mathrm{sh(x)}}{1+\mathrm{ch(x)}}\right)\right)} = 2 \times \frac{\frac{\mathrm{sh(x)}}{1+\mathrm{ch(x)}}}{1-\left(\frac{\mathrm{sh(x)}}{1+\mathrm{ch(x)}}\right)^2}$$

$$\boxed{= \mathbf{2} \times \frac{\mathbf{sh(x)}(\mathbf{1}+\boldsymbol{ch(x)})}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{ch(x)})^2 - \boldsymbol{sh^2(x)}} = \mathbf{2} \times \frac{\mathbf{sh(x)}(\mathbf{1}+\boldsymbol{ch(x)})}{\mathbf{2}(\mathbf{1}+\boldsymbol{ch(x)})} = \boldsymbol{sh(x)}}$$

e) On a démontré grâce aux questions précédentes que :

$$\forall\, \mathrm{x} \in \mathbb{R}, \tan(2\mathrm{g(x)}) = \tan(2\mathrm{f(x)})$$

De plus on a :

$$\forall\, \mathrm{x} \in \mathbb{R}, 2\mathrm{g(x)} \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\ et\ \ 2\mathrm{f(x)} \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$$

Comme tan est bijective sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on en déduit donc que :

$$\forall\, \mathrm{x} \in \mathbb{R}, 2\mathrm{g(x)} = 2f(x)$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}, \mathbf{g(x)} = \boldsymbol{f(x)}}$$

Partie C

1) a) On a :

$$\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}\ln(3)} + e^{-\frac{1}{2}\ln(3)}}{2} = \frac{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{3+1}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

De même on a :

$$\boxed{\mathbf{sh}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{ln(3)}\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}\ln(3)} - e^{-\frac{1}{2}\ln(3)}}{\mathbf{2}} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{3}-\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}}$$

b) On sait que :

$$\tan(\mathrm{x}) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Come tan est bijective sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on en déduit donc que :

$$\boxed{\begin{cases} \tan(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6}}$$

2) On sait que :

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$$

Or on sait d'après la partie A ou la partie B que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \frac{1}{2}\arctan(\mathrm{sh}(x)) = \arctan\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\right)$$

On en déduit donc que :

$$\frac{\pi}{12} = \arctan\left(\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)}{1+\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)}\right)$$

$$\boxed{\Longrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)}{1+\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}}$$

3) On a :

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(2\times\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

On en déduit donc que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ est solution de :

$$X^2 + 2\sqrt{3}X - 1 = 0$$

Or on sait que :

$$X^2 + 2X - 1 = 0 \Leftrightarrow X \in \{-\sqrt{3}-2\,;2-\sqrt{3}\}$$

Or on sait que :

$$\frac{\pi}{12} \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\Longrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$$

On en déduit donc que ;

$$\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{3}}$$

Remarque : On a :

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$$

Problème 2 : Calcul des sommes des puissances successives des n premiers entiers naturels non nul

Soit $(\ell, \mathrm{n}) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$. On pose :

$$\mathrm{S}_\ell(\mathrm{n}) = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{k}=\mathrm{n}} \mathrm{k}^\ell$$

Le but de ce problème est de donner une relation de récurrence entre $\mathrm{S}_\ell(\mathrm{n})$ et tous ses prédécesseurs $\mathrm{S}_\mathrm{k}(\mathrm{n})$, pour $k \in [\![0;\ell-1]\!]$.

Partie A : Ce que l'on connait déjà

1) Déterminer la valeur de $\mathrm{S}_0(\mathrm{n})$ en fonction de n.
2) Déterminer la valeur de $\mathrm{S}_1(\mathrm{n})$ en fonction de n.
3) Démontrer que :

$$\mathrm{S}_2(\mathrm{n}) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Partie B : Une formule de récurrence

1) Enoncer la formule du binôme de Newton sur $\mathbb{R}$.
2) On pose :

$$A = \sum_{k=2}^{k=n+1} k^{\ell+1}$$

a) Démontrer que :

$$\forall(\ell, n) \in \mathbb{N}^2, A = (n+1)^{\ell+1} + S_{\ell+1}(n) - 1$$

b) Démontrer que :

$$\forall(\ell, n) \in \mathbb{N}^2, A = S_{\ell+1}(n) + \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell+1}{k} S_k(n)$$

$$\left(\textit{Indice} : \text{On pourra utiliser le fait que : } \sum_{k=2}^{n+1} k^{\ell+1} = \sum_{k=1}^{n} (k+1)^{\ell+1} \text{ et utilisez le binôme de Newton}\right)$$

c) En déduire la relation $(\mathcal{R}_{\ell,n})$ suivante :

$$\forall(\ell, n) \in \mathbb{N}^2, (\mathcal{R}_{\ell,n}) : \ (\ell+1)S_\ell(n) = (n+1)^{\ell+1} - 1 - \sum_{k=0}^{\ell-1} \binom{\ell+1}{k} S_k(n)$$

3) Dans cette question, on rappelle que :

$$S_3(n) = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

A l'aide de la relation $(\mathcal{R}_{4,n})$, déterminer $S_4(n)$.

Partie C : un peu de Python !

Ecrire une fonction Python sommeentier(ℓ, n) qui en argument prend deux entiers naturels, avec n non nul, et en sortie affiche la valeur de $S_\ell(n)$.

Partie A : Ce que l'on connait déjà

1) On a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, S_0(n) = \sum_{k=1}^{k=n} k^0 = \sum_{k=1}^{k=n} 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ fois}} = n}$$

2) On peut utiliser la méthode de Gauss :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_1(n) = \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} (n+1-k) \Longrightarrow 2S_1(n) = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} (n+1-k) = \sum_{k=1}^{n} (n+1) = n(n+1)$$

$$\boxed{\Longrightarrow S_1(n) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

3) On peut le faire par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n): "\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}"$$

Initialisation : Pour n = 1 on a :

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^3 = 1$$

$$\frac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel non nul fixé. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a alors :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (\mathbf{HR_n})$$

On veut montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

On sait que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2}_{\mathbf{HR_n}} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{(n+1)}{6}(n(2n+1) + 6n + 6)$$

$$= \frac{(n+1)}{6}(2n^2 + 7n + 6)$$

Ici on peut conclure de deux façons différentes :

- **Méthode 1 : On développe le résultat voulu :**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6$$

On en déduit donc que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)}{6}(2n^2 + 7n + 6) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

- **Méthode 2 : On factorise le polynôme $P(n) = 2n^2 + 7n + 6$ grâce à ses racines.**

On résout :

$$2x^2 + 7x + 6 = 0 \Longrightarrow \Delta = 49 - 2 \times 6 \times 4 = 1$$

On en déduit donc que :

$$2x^2 + 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{-7-1}{4} ; \frac{-7+1}{4}\right\} \Leftrightarrow x \in \left\{-2 ; -\frac{3}{2}\right\}$$

On en déduit donc que

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2x^2 + 7x + 6 = 2(x - (-2))\left(x - \left(-\frac{3}{2}\right)\right) = 2(x+2)\left(x + \frac{3}{2}\right) = (x+2)(2x+3)$$

On en déduit donc que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)}{6}(2n^2 + 7n + 6) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

On en déduit donc que si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ aussi.
Conclusion : $\mathcal{P}(1)$ est vraie et $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire donc d'après le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Partie B : Une formule de récurrence

1) On a :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

2) On pose :

$$A = \sum_{k=2}^{k=n+1} k^{\ell+1}$$

a) On a :

$$\forall(\ell,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*, A=\sum_{k=2}^{k=n+1}k^{\ell+1}=\sum_{k=2}^{k=n}k^{\ell+1}+(n+1)^{\ell+1}=\sum_{k=1}^{k=n}k^{\ell+1}-1^{\ell+1}+(n+1)^{\ell+1}$$
$$=(n+1)^{\ell+1}+S_{\ell+1}(n)-1$$

b) On a :

$$\forall(\ell,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*, A=\sum_{k=2}^{k=n+1}k^{\ell+1}=\sum_{k=1}^{k=n}(k+1)^{\ell+1}=\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{i=0}^{\ell+1}\binom{\ell+1}{i}k^i=\sum_{i=0}^{\ell+1}\sum_{k=1}^{k=n}\binom{\ell+1}{i}k^i$$
$$=\sum_{i=0}^{\ell+1}\binom{\ell+1}{i}\underbrace{\sum_{k=1}^{k=n}k^i}_{S_i(n)}=\sum_{i=0}^{\ell+1}\binom{\ell+1}{i}S_i(n)=\underbrace{\binom{\ell+1}{\ell+1}}_{=1}S_{\ell+1}(n)+\sum_{i=0}^{\ell}\binom{\ell+1}{i}S_i(n)$$
$$=S_{\ell+1}(n)+\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell+1}{k}S_k(n)$$

c) D'après la question 1 et 2 on en déduit que :

$$\forall(\ell,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*, (n+1)^{\ell+1}+S_{\ell+1}(n)-1=S_{\ell+1}(n)+\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell+1}{k}S_k(n)$$

On a donc :

$$\forall(\ell,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*, (n+1)^{\ell+1}-1=\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell+1}{k}S_k(n)$$

Or on voit que :

$$\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell+1}{k}S_k(n)=\sum_{k=0}^{\ell-1}\binom{\ell+1}{k}S_k(n)+\binom{\ell+1}{\ell}S_\ell(n)$$

De plus on sait que :

$$\binom{\ell+1}{\ell}=\frac{(\ell+1)!}{\ell!\,(\ell+1-\ell)!}=\frac{(\ell+1)!}{\ell!}=\ell+1$$

On en déduit donc que :

$$\forall(\ell,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*, (\ell+1)S_\ell(n)=(n+1)^{\ell+1}-1-\sum_{k=0}^{\ell-1}\binom{\ell+1}{k}S_k(n)$$

3) On a :

$$\forall(\ell,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*, (\ell+1)S_\ell(n)=(n+1)^{\ell+1}-1-\sum_{k=0}^{\ell-1}\binom{\ell+1}{k}S_k(n)$$

On utilise cette relation pour $\ell=4$:

$$5\times S_3(n)=5\times\sum_{k=1}^{k=n}k^4=(n+1)^5-1-\sum_{k=0}^{3}\binom{5}{k}S_k(n)$$
$$=n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n-\left(\binom{5}{0}S_0(n)+\binom{5}{1}S_1(n)+\binom{5}{2}S_2(n)+\binom{5}{3}S_3(n)\right)$$

Or on sait que :

$$\binom{5}{0}=1, \binom{5}{1}=5 \text{ et } \binom{5}{2}=\frac{5!}{3!\,2!}=10, \binom{5}{3}=10$$

On a donc :

$$5\times S_4(n)=n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n-n-\frac{5n(n+1)}{2}-10\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-10\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$
$$=n^5+5n^4+10n^3+10n^2+4n-\frac{5}{2}(n^2+n+n^4+2n^3+n^2)-\frac{5}{3}(2n^3+3n^2+n)$$
$$=\frac{6n^5+30n^4+60n^3+60n^2+24n-15n^4-30n^3-30n^2-15n-20n^3-30n^2-10n}{6}$$

$$= \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{6}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_4(n) = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$$

Remarque : On peut s'arrêter là ou bien factoriser le numérateur.
On pose :

$$P(x) = 6x^5 + 15x^4 + 10x^3 - x = x(6x^4 + 15x^3 + 10x^2 - 1) = xQ(x)$$

On chercher à factoriser le polynôme Q(x) avec :

$$Q(x) = 6x^4 + 15x^3 + 10x^2 - 1$$

On doit donc chercher les racines de Q.
On remarque que :

$$Q(-1) = 0$$

On a donc :

$$Q(x) = (x + 1)(ax^3 + bx^2 + cx + d)$$

Par identification simple, on a de suite que $a = 4$ (seul terme en x^4 en développant) et $d = -1$ (seul terme constant).
On a donc :

$$\exists(b, c) \in \mathbb{R}^2, \text{tel que } \forall x \in \mathbb{R}, 6x^4 + 15x^3 + 10x^2 - 1 = (x + 1)(6x^3 + bx^2 + cx - 1)$$

On peut donc prendre deux valeurs de x distinctes.
Pour $x = 1$ on a :

$$30 = 2(5 + b + c) \Longrightarrow b + c = 10$$

Pour $x = -2$ on a :

$$15 = -(-48 + 4b - 2c - 1) \Longrightarrow 2b - c = 17$$

On a donc le système suivant :

$$\begin{cases} b + c = 10 \\ 2b - c = 17 \end{cases} \Longrightarrow 3b = 27 \Longrightarrow b = 9 \Longrightarrow c = 1$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 6x^4 + 15x^3 + 10x^2 - 1 = (x + 1)(6x^3 + 9x^2 + x - 1)$$

On peut aller plus loin puisque $x = -\frac{1}{2}$ est racine (mais là ce n'est plus évident !!
On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 6x^4 + 15x^3 + 10x^2 - 1 = (x + 1)(2x + 1)(3x^2 + 3x - 1)$$

Au final on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_4(n) = \frac{n(n + 1)(2n + 1)(3n^2 + 3n - 1)}{30}$$

Partie C : Un peu de Python

On a le programme suivant qui fonctionne :

```
def sommeentier(l,n):
    s=0 #C'est notre futur Sl(n)
    for k in range(1,n+1): #c'est l'équivalence du k qui varie de 1 à n!
        s=s+k**l     #Là c'est l'équivalent du signe sigma!
    return (s)
```

Remarque 1 : Il faut faire attention avec le range(1,n+1). Il renvoie une liste (en fait un tupple !) qui va de 1 jusqu'à n. Il ne prend jamais le dernier !

Remarque 2 : Pour vérifier notre programme on peut faire par exemple :

```
>>> sommeentier(1,100)
5050
>>> |
```

C'est la fameuse légende sur Gauss :

$$1 + 2 + \cdots + 99 + 100 = 5050$$

Vous savez aussi que :

$$\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On peut essayer avec une valeur de n non négligeable !!

```
>>> sommeentier(2,153)
1205589
>>> 153*154*(2*153+1)/6
1205589.0
>>> 
```

Notre programme semble fonctionner !