DS n°2, PCSI 2023-2024
14 octobre 2023

Exercice 1 : Limite d'une somme

Le but de cet exercice est de calculer :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$$

Dans toute la suite de cet exercice, on pose :

$$f(x)=\arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$$

1) Rappeler l'ensemble de définition de arctan et en déduire l'ensemble de définition de f.
2) Démontrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

3) En déduire que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)=\arctan(x+1)-\arctan(x)$$

4) Démontrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N},S_n=\arctan(n+1)$$

5) Déterminer la limite de S_n en $+\infty$.

Exercice 2 : Les fonctions trigonométriques réciproques

Dans tout cet exercice on pose :

$$f:x\mapsto\arccos[\cos(x)]+\frac{1}{2}\arccos[\cos(2x)]$$

1) a) Déterminer la valeur de $f(0)$ en justifiant.
b) Soit $k\in\mathbb{Z}$. Déterminer la valeur de $f\big((2k+1)\pi\big)$.
2) Démontrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
3) Démontrer que f est paire.
4) Montrer que f est 2π $-$pédiodique.
5) Tracer le graphe de f sur $[-4\pi;4\pi]$.
*(**Indication** : On pourra distinguer deux cas : $\left[0;\frac{\pi}{2}\right],\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$)*

Exercice 3 : Une bijection sur un sous-ensemble de $\mathbb{C}$

Dans tout cet exercice on pose :

$$f:\begin{cases}\mathbb{C}\backslash\{-i\}\to\mathbb{C}\\ z\mapsto\dfrac{z-i}{iz-1}\end{cases}$$

1) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{C}\backslash\{i\}$ dans un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ à déterminer.
2) Déterminer une expression de $f^{-1}(z)$ pour tout $z\in\mathbb{C}\backslash\{-i\}$.
3) Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R})$.
4) Démontrer que l'équation $f(z)=z$ admet deux solutions distinctes.
5) Dans cette question on souhaite montrer que :

$$f^{-1}(\mathbb{U}\backslash\{-i\})=\mathbb{R}$$

a) Montrer que :

$$\forall\theta\in\mathbb{R},1-e^{i\theta}=-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}}$$

b) En déduire que :

$$\forall\theta\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[,f(z)=e^{i\theta}\Leftrightarrow z=\frac{-1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

c) Soit $n\in\mathbb{N},n\geq 2$. Rappeler les solutions de $z^n=1$.

d) Résoudre l'équation $\left(f(z)\right)^n = 1$ et montrer que toutes les solutions sont réelles.

Problème 1 : Des fonctions hyperboliques

Le but de ce problème est de démontrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \frac{1}{2}\arctan\left(\mathrm{sh}(x)\right) = \arctan\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\right)$$

Partie A : En utilisant la dérivation

1) On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{2}\arctan\left(\mathrm{sh}(x)\right) \end{cases} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \arctan\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\right) \end{cases}$$

a) Démontrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} = g'(x)$$

b) En déduire que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \frac{1}{2}\arctan\left(\mathrm{sh}(x)\right) = \arctan\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\right)$$

Partie B : Grâce à la tangente

1) Rappeler le domaine de définition de la tangente, noté $\mathcal{D}_{\tan}$

2) a) Démontrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, 2f(x) \in \mathcal{D}_{\tan}$$

b) Déterminer l'expression de $\tan\left(2f(x)\right)$

3) a) Etudier la fonction :

$$h : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)} \end{cases}$$

b) En déduire que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, h(x) \in \left]-1; 1\right[$

c) En déduire que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, 2g(x) \in \mathcal{D}_{\tan}$

d) Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \tan\left(2g(x)\right) = \mathrm{sh}(x)$

e) En déduire le résultat voulu.

Partie C : Une application

1) a) Démontrer que

$$\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{et } \mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

b) Déterminer l'unique $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que :

$$\tan(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

2) En déduire que :

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

3) Proposez une autre façon de déterminer la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Problème 2 : Calcul célèbre de sommes

Soit $(\ell, \mathrm{n}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. On pose :

$$\mathrm{S}_\ell(\mathrm{n}) = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{k}=\mathrm{n}} \mathrm{k}^\ell$$

Le but de ce problème est de donner une relation de récurrence entre $\mathrm{S}_\ell(\mathrm{n})$ et tous ses prédécesseurs $\mathrm{S}_\mathrm{k}(\mathrm{n})$, pour $k \in [\![0; \ell - 1]\!]$.

Partie A : Ce que l'on connait déjà

1) Déterminer la valeur de $\mathrm{S}_0(\mathrm{n})$ en fonction de n.
2) Déterminer la valeur de $\mathrm{S}_1(\mathrm{n})$ en fonction de n.
3) Démontrer que :

$$\mathrm{S}_2(\mathrm{n}) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Partie B : Une formule de récurrence

1) Enoncer la formule du binôme de Newton sur $\mathbb{R}$.
2) On pose :

$$\mathrm{A} = \sum_{\mathrm{k}=2}^{\mathrm{k}=\mathrm{n}+1} \mathrm{k}^{\ell+1}$$

a) Démontrer que :

$$\forall (\ell, \mathrm{n}) \in \mathbb{N}^2, \mathrm{A} = (\mathrm{n}+1)^{\ell+1} + \mathrm{S}_{\ell+1}(\mathrm{n}) - 1$$

b) Démontrer que :

$$\forall (\ell, \mathrm{n}) \in \mathbb{N}^2, \mathrm{A} = \mathrm{S}_{\ell+1}(\mathrm{n}) + \sum_{\mathrm{k}=0}^{\ell} \binom{\ell+1}{\mathrm{k}} \mathrm{S}_\mathrm{k}(\mathrm{n})$$

$$\left(\textit{Indice} : \text{On pourra utiliser le fait que : } \sum_{\mathrm{k}=2}^{\mathrm{n}+1} \mathrm{k}^{\ell+1} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} (\mathrm{k}+1)^{\ell+1} \text{ et utilisez le binôme de Newton} \right)$$

c) En déduire la relation $(\mathcal{R}_{\ell,n})$ suivante :

$$\forall (\ell, \mathrm{n}) \in \mathbb{N}^2, (\mathcal{R}_{\ell,n}) : \ (\ell+1)\mathrm{S}_\ell(\mathrm{n}) = (\mathrm{n}+1)^{\ell+1} - 1 - \sum_{\mathrm{k}=0}^{\ell-1} \binom{\ell+1}{\mathrm{k}} \mathrm{S}_\mathrm{k}(\mathrm{n})$$

3) Dans cette question, on rappelle que :

$$S_3(n) = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

A l'aide de la relation $(\mathcal{R}_{4,n})$, déterminer $S_4(n)$.

Partie C : un peu de Python !

Ecrire une fonction Python sommeentier(ℓ, n) qui en argument prend deux entiers naturels, avec n non nul, et en sortie affiche la valeur de $\mathrm{S}_\ell(\mathrm{n})$.