Programme de Colle n°4
PCSI 2025-2026
(6 octobre au 10 octobre)

Calcul algébrique

Contenus	Capacités & commentaires
a) Sommes et produits	
Somme et produit d'une famille finie de nombres réels.	Notations $\sum_{i\in I} a_i$, $\sum_{i=1}^{n} a_i$, $\prod_{i\in I} a_i$, $\prod_{i=1}^{n} a_i$. Cas où I est vide.
Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes.	Dans la pratique, on est libre de présenter les calculs avec des points de suspension.
Expressions simplifiées de $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} x^k$.	
Factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$.	
Sommes doubles. Produit de deux sommes finies.	Exemples de sommes triangulaires.
Rappels sur la factorielle, les coefficients binomiaux. Formule du binôme dans $\mathbb{R}$.	Convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k < 0$ et $k > n$.

Nombres complexes

Contenus	Capacités & commentaires
a) Nombres complexes	
Parties réelle et imaginaire. Opérations sur les nombres complexes.	La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme.
Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^{n} x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme.	
Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.	On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct (« plan complexe »).

Questions de cours

Chapitre V :

- ***Application I.b.2*** : Démontrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- **Application I.d.2** : Calculer :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

- **Propriété I.d.3 :**

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N} : a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$$

- **Propriété I.e.1** :

$$\forall q \in \mathbb{R}, q \neq 1, \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

- ***Application III.a.2*** : Calculer :

$$\sum_{0\leq i,j\leq n} (i+j)$$

- **Proposition V.d.3 (identité de Fermat)** : On a :

$$\forall (\mathrm{n};\mathrm{p}) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq \mathrm{p} \leq \mathrm{n}, \binom{\mathrm{n}+1}{\mathrm{p}+1} = \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{p}} + \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{p}+1}$$

- **Proposition V.e.1 (binôme de Newton)** : On a :

$$\forall\ (x; y) \in \mathbb{C}^2, \forall\ n \in \mathbb{N}, (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Chapitre VI :

- ***Application II.c.5***: Résoudre l'équation suivante en donnant la solution sous forme algébrique :

$$2iz + 3 = 4i + 5z$$

- ***Application II.c.6*** : Déterminer l´ensemble des nombres complexes tel que :

$$\frac{z-1}{z+2i} \in \mathbb{R}\ et\ \frac{z-1}{z+2i} \in i\mathbb{R}$$

Exemples d'exercices traités

Calcul de :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}, B_n = \sum_{0 \le i \le j \le n} \frac{i}{j+1}, C_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

Exemple I.b.4 : Soit $\mathrm{A}(2; -3)$ et $\mathrm{C}(-1; 2)$. Déterminer l'image de A par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$ radians.

Application II.b.1: Soit $A(5; -2)$ et $C(1; -3)$. Déterminer l'image de A par l'homothétie de centre C et de rapport -3

Exemple II.c.3 : Déterminer la forme algébrique de :

$$z_1 = \frac{2+3i}{1-2i}$$