DS n°2
PCSI 2025-2026

Exercice 1 : Une étude de fonction

Dans cet exercice on pose la fonction $f: x \mapsto \arccos(4x^3 - 3x)$.
De plus on pose $P: x \mapsto 4x^3 - 3x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1) Démontrer que l'ensemble de définition de f est $[-1;1]$.
2) Déterminer $f(0), f\left(\frac{1}{2}\right)\ et\ f(1)$.
3) Dans cette question on cherche à résoudre $P(x) = 1\ et\ P(x) = -1$.
   a) Déterminer trois rées a, b, c tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, 4x^3 - 3x - 1 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$
   b) En déduire les solutions de $P(x) = 1$.
   c) Sur le même modèle, résoudre l'équation $P(x) = -1$ (*On pourra remarquer que* -1 *est solution*).
4) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f.
5) a) Montrer que :
$$\forall x \in [-1;1], \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$$
   b) En déduire une expression de $f(-x)$ en fonction de $f(x)$.
6) Dresser le tableau de variation de f sur $[-1;1]$.
7) a) Démontrer que :
$$\forall x \in [-1;1], \exists!\, \theta_x \in [0;\pi]\ tel\ que \cos(\theta_x) = x$$
   b) Démontrer que :
$$\forall \theta_x \in [0;\pi], f(\cos(\theta_x)) = \arccos(\cos(3\theta_x))$$
   c) En déduire, en fonction des valeurs de $\theta_x \in [0;\pi]$, une expression simplifiée de $f(\cos(\theta_x))$.
   d) Exprimer alors $f(x)$ en fonction de $\arccos(x)$ pour $x \in [-1;1]$.
(*On pourra faire une disjonction de 3 cas !*).
8) Tracer la courbe de f.

Exercice 2 : Une nouvelle somme

Dans tout cet exercice on pose :
$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=1}^{n} k^4$$
$$\forall j \in \mathbb{N}^*, H_j: x \mapsto \prod_{i=0}^{j-1}(x+i)\ définie\ sur\ \mathbb{R}$$
Le but de cet exercice est d'exprimer S_n en fonction de n.
1) Calculer $H_j(0)$, $H_j(1)$ et $H_1(x)$.
2) a) Exprimer $H_{j+1}(x) - H_{j+1}(x-1)$ en fonction de $H_j(x)$.
   b) En déduire que :
$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} H_j(k) = j! \times \binom{n+j}{j+1}$$
3) Démontrer que :
$$\sum_{k=1}^{n} H_1(k) = \frac{n(n+1)}{2}$$
4) Déduire des deux questions précédentes que :
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
5) Démontrer par la méthode de votre choix que :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

6) En déduire que S_n s'écrit :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{30} \times P(n) \ \ (\text{où } P \text{ est un polynôme à déterminer})$$

Exercice 3 : La fonction $Argch$

Dans tout ce problème on rappelle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Partie A : Etude de ch

1) Démontrer que ch ne définie pas une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2) Montrer que la restriction de ch à $[0; +\infty[$ réalise une bijection de $[0; +\infty[$ dans un ensemble à déterminer.
On appelle la bijection réciproque de ch, restreinte sur $[0; +\infty[$, $Argch$.
3) Démontrer que :

$$\forall x \geq 1, Argch(x) = \ln\left(\sqrt{x^2 - 1} + x\right)$$

4) Démontrer que :

$$\forall x > 1, Argch'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

5) Dans cette question on pose :

$$g : x \mapsto Argch\left(\sqrt{\frac{1 + ch(x)}{2}}\right)$$

Déterminer l'ensemble de définition de g puis reconnaître une fonction bien connue étudiée cette année en classe.

Problème 1 : Deux résultats du triangle de Pascal

Le but de ce problème est de s'intéresser à la troisième colonne du triangle de Pascal, plus particulièrement à la somme des inverses des coefficients $\binom{n}{2}$, pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	**1**						
3	1	3	**3**	1					
4	1	4	**6**	4	1				
5	1	5	**10**	10	5	1			
6	1	6	**15**	20	15	6	1		
7	1	7	**21**	35	35	21	7	1	
8	1	8	**28**	56	70	56	28	8	1

Partie A : Une première somme

1) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

2) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\binom{k}{2}} = \frac{2(n-1)}{n}$$

3) En déduire :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\binom{k}{2}}$$

Remarque : On verra plus tard dans l'année que l'on peut noter :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{\binom{k}{2}} = 2$$

Nous allons à présent, dans la partie B et C, démontrer un joli résultat. Si l'on fait la somme alternée (mais tous les deux signes !) des inverses des coefficients de la troisième colonne, nous découvrons une jolie connexion entre les coefficients du triangle de Pascal et π. Nous allons démontrer que :

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{21}\right)-\left(\frac{1}{28}-\frac{1}{36}\right)+\cdots=\pi-2$$

Cela revient à démontrer que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\left[\frac{1}{\binom{2k}{2}}+\frac{1}{\binom{2k+1}{2}}\right]=\pi-2$$

Dans toute la suite de ce problème, nous allons poser :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left[\frac{1}{\binom{2k}{2}}+\frac{1}{\binom{2k+1}{2}}\right]$$

Partie B : Simplification de la somme

1) a) Calculer la valeur de S_1.

b) Montrer que :

$$S_2 = \frac{16}{15}$$

2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, S_n = 4 \times \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)(2k+1)}$$

3) a) Déterminer deux réels $a\ et\ b$ tels que :

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{a}{2k-1} + \frac{b}{2k+1}$$

b) En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} + \frac{1}{2} \times \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, S_n = 4 \times \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} - 2 + 2 \times \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Il reste donc à trouver :

$$\lim_{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

Nous allons démontrer cela dans la partie C.

Partie C : Etude de la limite

Dans toute cette partie on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}\ et\ f_n(x) = \arctan(x) - P_{n+1}(x)$$

1) Déterminer $P_1(x)$ et $P_2(x)$.

2) Montrer que la fonction f_n est impaire.

3) a) Démontrer que :

$$\forall q \in \mathbb{R}, q \neq 1, \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

b) Démontrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$$

c) En déduire que :

$$\forall x \geq 0, \begin{cases} 0 \leq \arctan(x) - P_n(x) \leq \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} \ \textit{si n est pair} \\ -\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} \leq \arctan(x) - P_n(x) \leq 0 \ \ \textit{si n est impair} \end{cases}$$

c) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, |\arctan(x) - P_n(x)| \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

d) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\arctan(x) - P_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}$$

e) En déduire que :

$$\lim_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

4) Démontrer que :

$$\lim_n \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left[\frac{1}{\binom{2k}{2}} + \frac{1}{\binom{2k+1}{2}} \right] = \pi - 2$$