Programme de Colle n°5
PCSI 2025-2026
(13 octobre au 17 octobre)

Calcul algébrique

Contenus	Capacités & commentaires
a) Sommes et produits	
Somme et produit d'une famille finie de nombres réels.	Notations $\sum_{i\in I} a_i$, $\sum_{i=1}^{n} a_i$, $\prod_{i\in I} a_i$, $\prod_{i=1}^{n} a_i$. Cas où I est vide.
Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes.	Dans la pratique, on est libre de présenter les calculs avec des points de suspension.
Expressions simplifiées de $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} x^k$.	
Factorisation de $a^n - b^n$ par $a-b$.	
Sommes doubles. Produit de deux sommes finies.	Exemples de sommes triangulaires.
Rappels sur la factorielle, les coefficients binomiaux. Formule du binôme dans $\mathbb{R}$.	Convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k<0$ et $k>n$.

Nombres complexes

a) Nombres complexes	
Parties réelle et imaginaire. Opérations sur les nombres complexes. Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^{n} x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme.	La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme.
Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.	On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct (« plan complexe »).
b) Conjugaison et module	
Conjugaison, compatibilité avec les opérations. Module. Relation $\lvert z\rvert^2 = z\overline{z}$, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	Image du conjugué dans le plan complexe. Interprétation géométrique de $\lvert z - z'\rvert$, cercles et disques.
c) Nombres complexes de module 1 et trigonométrie	
Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Définition de e^{it} pour $t\in\mathbb{R}$.	Notation $\mathbb{U}$.
Exponentielle d'une somme.	
Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1\pm \mathrm{e}^{it}$, de $\mathrm{e}^{ip}\pm\mathrm{e}^{iq}$.	Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p)\pm\cos(q)$, $\sin(p)\pm\sin(q)$. Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^{n}\cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^{n}\sin(kt)$.
Formule de Moivre.	Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.
d) Forme trigonométrique	
Forme trigonométrique $r\mathrm{e}^{i\theta}$ $(r>0)$ d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient.	
h) Interprétation géométrique des nombres complexes	
Interprétation géométrique des module et arguments de $\frac{c-a}{b-a}$.	Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité.
Interprétation géométrique des applications $z\mapsto az$ et $z\mapsto z+b$ pour $(a,b)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}$.	Il s'agit d'introduire certaines transformations du plan : translations, homothéties, rotations.
Interprétation géométrique de la conjugaison.	L'étude générale des similitudes est hors programme.

Remarque : Nous avons vu vendredi les arguments d'un nombre complexe mais nous n'avons pas fait d'exercices. Cependant les examinateurs pourront demander aux élèves d'écrire la forme exponentielle d'un nombre complexe, de calculer l'argument d'un nombre complexe… Cependant aucune technicité n'est attendue pour le moment.

Question de cours

Chapitre 5 :

- **Proposition V.d.3 (identité de Pascal)** : On a :
$$\forall\ (n;p) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq p \leq n, \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$
- **Proposition V.e.1 (binôme de Newton) (*)** : On a :
$$\forall\ (x;y) \in \mathbb{C}^2, \forall\ n \in \mathbb{N}, (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Chapitre 6 :

- **Propriété I.d.2 (Inégalité triangulaire avec cas d'égalité à la fin de la démonstration)** :
$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \big||z| - |z'|\big| \leq |z+z'| \leq |z| + |z'|$$
- *Application II.d.4* : Simplifier : $\forall\ \theta \in \mathbb{R}, \forall\ n \in \mathbb{N}$,
$$S_n(\theta) = 1 + cos(\theta) + cos(2\theta) + \ldots + cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{n} cos(k\theta)$$
$$W_n(\theta) = sin(\theta) + sin(2\theta) + \ldots + sin(n\theta) = \sum_{k=0}^{n} sin(k\theta)$$
- ***Application II.e.3* :** Déterminer une primitive de $f : x \mapsto sin(x)^4$
- ***Application II.e.4* :** Démontrer que
$$\forall \vartheta \in \mathbb{R}, \left|1 + e^{i\vartheta}\right| = 2\left|cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right|$$

Exercices à savoir refaire

Chapitre 5 :

- **Application I.d.2** : Calculer :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$
- **Propriété I.d.3 :**
$$\forall\ (a,b) \in \mathbb{C}^2, \forall\ n \in\ \mathbb{N} : a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$$
- **Application III.c.2** : Calculer :
$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} ij$$

$$A = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n \times 2^{n-1}$$

Chapitre 6 :

- Forme algébrique de :
$$z = \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{2025}$$

- **Application II.c.9 :** Déterminer l´ensemble des nombres complexes tel que :

$$\frac{z-1}{z+2i} \in \mathbb{R}, i\mathbb{R}$$

Application : Application Linéarisation de $\cos^{n}(x)$ et $\sin^{n}(x)$ avec la formule d'Euler ou de Moivre.