

Correction TD 6 : Nombres complexes

Partie A : Utilisation de l'écriture $z = x + iy$

Exercice A.1 : A quelle condition $Z = z^2 + 2z + 1 - 3i$ est-il un réel ?

On pose $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a alors :

$$z^2 + 2z + 1 - 3i = (x^2 - y^2 + 2x + 1) + i(2xy + 2y - 3)$$

On sait de plus que :

$$z^2 + 2z + 1 - 3i \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{I}(z^2 + 2z + 1 - 3i) = 0$$

On en déduit que :

$$z^2 + 2z + 1 - 3i \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2xy + 2y - 3 = 0$$

On en déduit donc que :

$$z^2 + 2z + 1 - 3i \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = \frac{3}{2(x+1)}$$

Exercice A.2 : Déterminer l'ensemble des points dont l'affixe vérifie :

$$z\bar{z} + z + \bar{z} - 1 = 0$$

On pose $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a alors :

$$z\bar{z} + z + \bar{z} - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 2$$

On en déduit donc que $M(z)$ vérifie l'équation $z\bar{z} + z + \bar{z} - 1 = 0$ si et seulement si le point M est sur le cercle de centre $I(-1; 0)$ et de rayon $\sqrt{2}$ ($M \in \mathcal{C}((-1; 0), \sqrt{2})$).

Partie B : Utilisation du conjugué pour la division des nombres complexes et propriétés du conjugué

Exercices B.1 : Déterminer la partie réelle et imaginaire des nombres complexes suivants :

$$\text{a) } z = (1 - 3i)(5 + 2i) \quad \text{b) } z = \frac{2 + i}{5 - 2i} \quad \text{c) } z = (2 + i)^2 \quad \text{d) } z = \frac{1}{1 - 2\sqrt{3}i}$$

On a :

$$z_a = (1 - 3i)(5 + 2i) = 11 - 13i$$

$$z_b = \frac{2 + i}{5 - 2i} = \frac{(2 + i)(5 + 2i)}{29} = \frac{8}{29} + \frac{9}{29}i$$

$$z_c = (2 + i)^2 = 3 + 4i$$

$$z_d = \frac{1}{1 - 2\sqrt{3}i} = \frac{1 + 2\sqrt{3}i}{1 + 12} = \frac{1}{13} + \frac{2\sqrt{3}}{13}i$$

Exercice B.2 : a) Soit z un nombre complexe différent de $1 + i$. En posant $z = x + iy$, déterminer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe :

$$Z = \frac{z - 2i}{z - 1 - i}$$

b) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M d'affixes z tels que Z soit un réel et l'ensemble (E) des points M tels que Z soit un imaginaire pur.

c) Déterminer $\bar{Z}$ en fonction de z puis retrouver le résultat de la question b).

d) Déterminer l'ensemble des nombres complexes tel que Z^2 soit un réel.

a) On a :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1 + i\}, \exists! (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 1)\} \text{ tel } z = x + iy$$

$$\Rightarrow Z = \frac{x + (y - 2)i}{(x - 1) + i(y - 1)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(x + (y-2)i)(x-1-i(y-1))}{(x-1)^2 + (y-1)^2} \\
&= \frac{x(x-1) + (y-2)(y-1)}{(x-1)^2 + (y-1)^2} + \frac{(y-2)(x-1) - x(y-1)}{(x-1)^2 + (y-1)^2} \\
&= \frac{x^2 - x + y^2 - 3y + 2}{(x-1)^2 + (y-1)^2} + \frac{-y - x + 2}{(x-1)^2 + (y-1)^2} i
\end{aligned}$$

b) On sait que :

$$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \Re(Z) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + y^2 - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

On en déduit donc que le point M d'affixe Z est sur le cercle de centre I $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) On sait que :

$$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{Z} = -Z$$

Or on sait que :

$$Z = \frac{z - 2i}{z - 1 - i} \Leftrightarrow \bar{Z} = \frac{\bar{z} + 2i}{\bar{z} - 1 + i}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned}
\bar{Z} = -Z &\Leftrightarrow \frac{z - 2i}{z - 1 - i} = -\frac{\bar{z} + 2i}{\bar{z} - 1 + i} \\
&\Leftrightarrow (z - 2i)(\bar{z} - 1 + i) = -(\bar{z} + 2i)(z - 1 - i) \\
&\Leftrightarrow z\bar{z} - z + iz - 2i\bar{z} + 2i + 2 = -z\bar{z} + \bar{z} + i\bar{z} - 2iz + 2i - 2 \\
&\Leftrightarrow 2z\bar{z} - (z + \bar{z}) + 3i(z - \bar{z}) = -4 \\
&\Leftrightarrow (x^2 + y^2) - x - 3y = -2 \\
&\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que le point M d'affixe Z est sur le cercle de centre I $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

d) On a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

On en déduit que $Z^2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Re(Z) = 0$ ou $\Im(Z) = 0$.

On en déduit donc que :

$$Z^2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - x + y^2 - 3y + 2}{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 0 \\ \text{ou} \\ \frac{-y - x + 2}{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ y = -x + 2 \end{cases} \quad (x, y) \neq (1, 1)$$

Exercice B.3 : Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} iz - 2w = -4 + 3i \\ 2\bar{w} + \bar{z} = 3 \end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} iz - 2w = -4 + 3i \\ 2\bar{w} + \bar{z} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} iz - 2w = -4 + 3i \\ 2w + z = 3 \end{cases} \Rightarrow (1 + i)z = -4 + 3i \Rightarrow z = \frac{(-4 + 3i)(1 - i)}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}i$$

On en déduit que :

$$w = \frac{3 - z}{2} = \frac{7}{4} - \frac{7}{4}i$$

On a donc :

$$\begin{cases} iz - 2w = -4 + 3i \\ 2\bar{w} + \bar{z} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow (z, w) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{7}{2}i; \frac{7}{4} - \frac{7}{4}i\right)$$

Exercice B.4 : Démontrer que pour tout nombre complexe du plan et pour tout entier naturel n non nul :

$$(\bar{z})^n = \overline{(z^n)}$$

On le fait par récurrence. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n): "(\bar{z})^n = \overline{(z^n)}"$$

Initialisation : $n = 1$

$$\forall (\bar{z})^1 = \bar{z} = \overline{(z)}$$

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel n non nul fixé. On suppose vraie $\mathcal{P}(n)$. On a alors :

$$(\bar{z})^{n+1} = (\bar{z})^n \times (\bar{z}) = \overline{(z^n)} \times (\bar{z}) = \overline{(z^n \times z)} = \overline{(z^{n+1})} \text{ (d'après la proposition démontrée en cours !)}$$

Conclusion : $\mathcal{P}(1)$ est vraie et $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire donc d'après le principe de récurrence on en déduit que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}^*, (\bar{z})^n = \overline{(z^n)}$$

Remarque : La proposition reste vraie pour $n = 0$ et toutes valeurs de z complexe non nul. La seule difficulté réside dans le fait que $z^0 = 1 \forall z \in \mathbb{C}^*$ mais il y a une incohérence avec $z = 0$!

Partie C : Module d'un nombre complexe

Exercice C.1 : Démontrer que :

$$|z| \leq 1 \Rightarrow \operatorname{Re}(z^2 + 4z + 3) \geq 0$$

On pose $z = x + iy, (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a alors :

$$\operatorname{Re}(z^2 + 4z + 3) = x^2 - y^2 + 4x + 3$$

De plus on a :

$$|z| \leq 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1 \Leftrightarrow -y^2 \geq x^2 - 1$$

On en déduit donc que :

$$|z| \leq 1 \Rightarrow \operatorname{Re}(z^2 + 4z + 3) = x^2 - y^2 + 4x + 3 \geq 2x^2 + 4x + 2 \geq 2(x + 1)^2 \geq 0$$

On a donc :

$$|z| \leq 1 \Rightarrow \operatorname{Re}(z^2 + 4z + 3) \geq 0$$

Exercice C.2 : Démontrer que :

$$\forall (u; v) \in \mathbb{C}^2, \begin{cases} |u| = |v| = 1 \\ uv \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \frac{u+v}{1+uv} \in \mathbb{R}$$

b) La réciproque est-elle vraie ?

a) On a :

$$\begin{cases} |u| = |v| = 1 \\ uv \neq -1 \end{cases} \Rightarrow u\bar{u} = v\bar{v} = 1$$

On a alors :

$$\overline{\left(\frac{u+v}{1+uv}\right)} = \frac{\bar{u} + \bar{v}}{1 + \bar{u}\bar{v}} = \frac{\frac{1}{u} + \frac{1}{v}}{1 + \frac{1}{uv}} = \frac{u+v}{uv+1}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} |u| = |v| = 1 \\ uv \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \frac{u+v}{1+uv} \in \mathbb{R}$$

b) La réciproque est évidemment fautive ! Il suffit de prendre un contre-exemple $(u, v) = (3, 3)$. On a alors :

$$u \notin \mathbb{U} \text{ et } \frac{u+v}{1+uv} \in \mathbb{R}$$

Exercice C.3 : Démontrer que :

$$\forall (u; v) \in \mathbb{C}^2, \bar{a}b \neq 1, \begin{cases} |a| = 1 \\ \text{ou} \\ |b| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = 1$$

On a :

$$\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right) = \frac{1}{\overline{\left(\frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right)}} \Leftrightarrow \left(\frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right) = \frac{1-a\bar{b}}{\bar{a}-\bar{b}} \Leftrightarrow (a-b)(\bar{a}-\bar{b}) = (1-a\bar{b})(1-\bar{a}b)$$

De plus on a :

$$\begin{aligned} (a-b)(\bar{a}-\bar{b}) &= (1-a\bar{b})(1-\bar{a}b) \Leftrightarrow a\bar{a} - a\bar{b} - \bar{a}b + b\bar{b} = 1 - \bar{a}b - \bar{b}a + \bar{a}b\bar{a} \\ &\Leftrightarrow a\bar{a}(1-b\bar{b}) + b\bar{b} - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (1-b\bar{b})(1-a\bar{a}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b\bar{b} = 1 \\ \text{ou} \\ a\bar{a} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| = 1 \\ \text{ou} \\ |b| = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} |a| = 1 \\ \text{ou} \\ |b| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = 1$$

Remarque : Attention de bien travailler par équivalence ! Si vous avez le moindre doute, faites un sens puis l'autre !

Exercice C.4 : On pose $a \in \mathbb{C}$, tel que $|a| < 1$. On pose alors la transformation suivante :

$$f_a: \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{1}{\bar{a}} \right\} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \end{cases}$$

1) Démontrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \Rightarrow |f_a(z)| = 1$$

2) Démontrer que la réciproque est vraie.

3) On définit :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$$

On pose alors :

$$g_a: \begin{cases} \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U} \\ z \mapsto \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \end{cases}$$

(on dit que g_a est la restriction de f_a sur $\mathbb{U}$, noté aussi : $f_a|_{\mathbb{U}}$)

Montrer que g_a est bijective et déterminer g_a^{-1} .

1) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$. On sait que :

$$|z| = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1$$

On a alors :

$$\left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right) \times \overline{\left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right)} = \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right) \times \left(\frac{\bar{z}-\bar{a}}{1-\bar{a}\bar{z}} \right) = \frac{z\bar{z} - \bar{a}z - a\bar{z} + a\bar{a}}{1 - \bar{a}\bar{z} - \bar{a}z + \bar{a}\bar{a}z\bar{z}} = \frac{1 + |a|^2 - 2\operatorname{Re}(a\bar{z})}{1 + |a|^2 - 2\operatorname{Re}(a\bar{z})} = 1$$

On en déduit donc que :

$$|z| = 1 \Rightarrow |f_a(z)| = 1$$

2) On a :

$$|f_a(z)| = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right) = \frac{1}{\overline{\left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right)}} = \frac{1-a\bar{z}}{\bar{z}-\bar{a}} \Rightarrow (z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = (1-a\bar{z})(1-\bar{a}z) \Rightarrow z\bar{z}(1-a\bar{a}) = 1-a\bar{a}$$

On en déduit donc que :

$$|f_a(z)| = 1 \Rightarrow (1-z\bar{z})(1-a\bar{a}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |z|^2 = 1 \\ |a|^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow |z| = 1 \text{ car } |a| < 1$$

3) On résout :

$$\frac{z-a}{1-\bar{a}z} = z' \Leftrightarrow z(1+\bar{a}z') = z' + a \Leftrightarrow z = \frac{z' + a}{1+\bar{a}z'} = g_{-a}(z')$$

On en déduit donc que g_a est bijective et $g_a^{-1} = g_{-a}$.

Exercice C.5 : Soit ABCD un parallélogramme. Démontrer que :

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$$

Nous allons montrer que :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$$

On sait que :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z + z'|^2 + |z - z'|^2 = (z + z')(\bar{z} + \bar{z}') + (z - z')(\bar{z} - \bar{z}') = 2(z\bar{z} + z'\bar{z}') = 2(|z|^2 + |z'|^2)$$

Il ne reste plus qu'à appliquer l'égalité précédente avec $z = z_{\overline{AB}}$ et $z' = z_{\overline{BC}}$. On a alors :

$$|z_{\overline{AB}} + z_{\overline{BC}}|^2 + |z_{\overline{AB}} - z_{\overline{BC}}|^2 = 2(|z_{\overline{AB}}|^2 + |z_{\overline{BC}}|^2) = 2(AB^2 + BC^2)$$

De plus on a :

$$|z_{\overline{AB}} + z_{\overline{BC}}|^2 + |z_{\overline{AB}} - z_{\overline{BC}}|^2 = |z_{\overline{AC}}|^2 + |z_{\overline{DC}} + z_{\overline{CB}}|^2 = AC^2 + BD^2$$

On a donc :

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$$

Exercice C.6 : Déterminer l'ensemble des points du plan d'affixe z tel que :

$$\text{a) } |z| = 1 \quad \text{b) } |z| \leq 3 \quad \text{c) } |z + 2 - 3i| = 2 \quad \text{d) } |z + 2i| = |z - 3 - i|$$

$$\text{a) } |z| = 1$$

On sait que :

$$\{M(z); |z| = 1\} = \mathcal{C}(O(0,0), 1)$$

Autrement dit l'ensemble des points d'affixe z tel que $|z| = 1$ est le cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon 1.

$$\text{b) } |z| \leq 3$$

On sait que :

$$\{M(z); |z| \leq 3\} = \overline{\mathcal{D}}(O(0,0), 3)$$

Autrement dit l'ensemble des points d'affixe z tel que $|z| \leq 3$ est le disque fermé de centre $O(0,0)$ et de rayon 3.

$$\text{c) } |z + 2 - 3i| = 2$$

On sait que :

$$\{M(z); |z + 2 - 3i| = 2\} = \mathcal{C}(I(-2,3), 2)$$

Autrement dit l'ensemble des points d'affixe z tel que $|z + 2 - 3i| = 2$ est le cercle de centre $I(-2,3)$ et de rayon 2.

$$\text{d) } |z + 2i| = |z - 3 - i|$$

On sait que :

$$|z + 2i| = |z - 3 - i| \Leftrightarrow AM = BM \text{ avec } A(-2i), B(3 + i) \text{ et } M(z)$$

On en déduit donc que l'ensemble des points d'affixe z tel que $|z + 2i| = |z - 3 - i|$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

Exercice C.7 : Démontrer que :

$$\forall (a; b) \in \mathbb{C}^2, 1 + |1 - ab| \leq (1 + |a - 1|)((1 + |b - 1|))$$

On pose $u = a - 1$ et $v = b - 1$. On a alors :

$$\begin{aligned} 1 + |1 - ab| &= 1 + |ab - 1| = 1 + |uv + u + v| \leq 1 + |uv| + |u| + |v| = (1 + |u|)(1 + |v|) \\ &= (1 + |a - 1|)((1 + |b - 1|)) \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\forall (a; b) \in \mathbb{C}^2, 1 + |1 - ab| \leq (1 + |a - 1|)((1 + |b - 1|))$$

Exercice C.8 : 1) Démontrer que :

$$\forall (a; b) \in \mathbb{C}^2, |a| + |b| \leq |a + b| + |a - b|$$

2) Etudiez les cas d'égalités.

1) Il suffit d'écrire que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, 2a = (a + b) + (a - b)$$

On en déduit donc que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, 2|a| \leq |a + b| + |a - b|$$

De même on a :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, 2|b| \leq |a + b| + |a - b|$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, 2(|a| + |b|) &\leq 2(|a + b| + |a - b|) \\ \Rightarrow \forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, |a| + |b| &\leq |a + b| + |a - b| \end{aligned}$$

2) On a égalité si et seulement si :

$$\begin{aligned} \begin{cases} |(a + b) + (a - b)| = |a + b| + |a - b| \\ |(a + b) + (b - a)| = |a + b| + |b - a| \end{cases} \\ \Leftrightarrow |a| = |b| \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ \text{ou} \\ a = -b \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice C.9 : Démontrer que :

$$\forall (a; b; c) \in \mathbb{C}^3, |1 + a| + |b + a| + |c + b| + |c| \geq 1$$

On a :

$$\forall (a; b; c) \in \mathbb{C}^3, 1 = 1 + a - (a + b) + (b + c) - c$$

On en déduit donc grâce à l'inégalité triangulaire que :

$$\forall (a; b; c) \in \mathbb{C}^3, 1 \leq |1 + a| + |b + a| + |c + b| + |c|$$

Exercice C.10 : Démontrer que :

$$\forall (z_1; \dots; z_n) \in \mathbb{C}^n, |z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n|$$

Autrement noté :

$$\forall (z_1; \dots; z_n) \in \mathbb{C}^n, \left| \sum_{i=1}^n z_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |z_i|$$

Il suffit de faire une récurrence et d'utiliser dans l'hérédité l'inégalité triangulaire démontrée en cours.

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n) : \left| \sum_{i=1}^n z_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |z_i|$$

Initialisation : $n = 1$

On a alors :

$$\left| \sum_{i=1}^1 z_i \right| = |z_1| \text{ et } \sum_{i=1}^1 |z_i| = |z_1|$$

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel non nul fixé. On suppose vraie $\mathcal{P}(n)$. On a alors :

$$\left| \sum_{i=1}^{n+1} z_i \right| = \left| \sum_{i=1}^n z_i + z_{n+1} \right| \underset{\substack{\text{d'après l'inégalité} \\ \text{triangulaire}}}{\leq} \left| \sum_{i=1}^n z_i \right| + |z_{n+1}| \leq \sum_{i=1}^n |z_i| + |z_{n+1}| \leq \sum_{i=1}^{n+1} |z_i|$$

Conclusion : $\mathcal{P}(1)$ est vraie et $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire donc d'après le principe de récurrence, on en déduit que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul.

Partie D : Avec la forme exponentielle

Exercice D.1 : Ecrire $\cos^3(x)$ en fonction de $\cos(3x)$, $\cos(2x)$, $\cos(x)$ et 1. Faire de même avec $\sin^3(x)$ en fonction de $\sin(3x)$, $\sin(2x)$, $\sin(x)$ et 1

On sait que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^3(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 = \frac{e^{3ix} + e^{-3ix} + 3(e^{ix} + e^{-ix})}{8} = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$$

De même on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin^3(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 = -\frac{e^{3ix} - e^{-3ix} - 3(e^{ix} - e^{-ix})}{8i} = -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)$$

Exercice D.2 : Ecrire $\cos(3x)$ comme une fonction polynôme de $\cos(x)$. Faire de même avec $\sin(3x)$ comme une fonction polynôme de $\sin(x)$.

On sait d'après la formule de Moivre que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\cos(x) + i\sin(x))^3 = \cos(3x) + i\sin(3x)$$

De plus on sait d'après la formule du binôme de Newton que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\cos(x) + i\sin(x))^3 = \cos^3(x) + 3(\cos^2(x) i\sin(x)) + 3(\cos(x) (-\sin^2(x))) - i\sin^3(x)$$

On en déduit donc avec les parties réelles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(3x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)[1 - \cos^2(x)] = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$$

De même on a avec les parties imaginaires :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(3x) = 3(1 - \sin^2(x))(\sin(x)) - \sin^3(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$$

Exercice D.3 : Soit $\theta \in]-\pi; \pi[$. Déterminer la forme algébrique de :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } z_a = (2 + i)e^{3i\theta} & \text{b) } z_b = (1 - 2i)e^{-i\theta} & \text{c) } z_c = \frac{e^{2i\theta}}{1 - i} \\ \text{d) } z_d = (\sqrt{3} - i)^{2018} & \text{e) } z_e = (1 + e^{i\theta})^n & \text{f) } z_f = \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right)^{666} \end{array}$$

a) On a : $z_a = (2 + i)e^{3i\theta} = (2 + i)(\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)) = (2\cos(3\theta) - \sin(3\theta)) + i(\cos(3\theta) + 2\sin(3\theta))$

On a donc :

$$(2 + i)e^{3i\theta} = (2\cos(3\theta) - \sin(3\theta)) + i(\cos(3\theta) + 2\sin(3\theta))$$

b) On a : $z_b = (1 - 2i)e^{-i\theta} = (1 - 2i)(\cos(\theta) - i\sin(\theta)) = (\cos(\theta) - 2\sin(\theta)) - i(2\cos(\theta) - \sin(\theta))$

On a donc :

$$(1 - 2i)e^{-i\theta} = (\cos(\theta) - 2\sin(\theta)) - i(2\cos(\theta) - \sin(\theta))$$

c) On a :

$$z_c = \frac{e^{2i\theta}}{1 - i} = \frac{(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta))(1 + i)}{2} = \frac{1}{2}(\cos(2\theta) - \sin(2\theta)) + \frac{i}{2}(\cos(2\theta) + \sin(2\theta))$$

On a donc :

$$\frac{e^{2i\theta}}{1 - i} = \frac{1}{2}(\cos(2\theta) - \sin(2\theta)) + \frac{i}{2}(\cos(2\theta) + \sin(2\theta))$$

d) On a :

$$z_d = (\sqrt{3} - i)^{2018} = 2^{2018} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)^{2018} = 2^{2018} \times \left(e^{-\frac{i\pi}{6}} \right)^{2018} = 2^{2018} \times e^{-\frac{2018\pi}{6}i}$$

De plus on sait que :

$$\frac{2018\pi}{6} = 336\pi + \frac{\pi}{3} = 168 \times 2\pi + \frac{\pi}{3}$$

On en déduit donc que :

$$e^{-\frac{2018\pi}{6}} = e^{-\frac{2018\pi}{6}i} = e^{-(168 \times 2\pi + \frac{\pi}{3})i} = e^{-\frac{i\pi}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

On en déduit donc que :

$$(\sqrt{3} - i)^{2018} = 2^{2017} - i2^{2017}\sqrt{3}$$

e) On a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, z_n &= (1 + e^{i\theta})^n \\ &= \left(e^{\frac{i\theta}{2}} \left(e^{-\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{i\theta}{2}} \right) \right)^n \\ &= e^{\frac{ni\theta}{2}} (2 \cos(\theta))^n \\ &= 2^n \cos^n(\theta) \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) + i2^n \cos^n(\theta) \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, z_n = (1 + e^{i\theta})^n = 2^n \cos^n(\theta) \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) + i2^n \cos^n(\theta) \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$

f) On a :

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{666} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^{666} = \left(e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)^{666} = e^{-222i\pi} = 1$$

On en déduit donc que :

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{666} = 1$$

Exercice D.4 : Soit x réel. Ecrire les nombres réels suivant sous la forme $A \cos(x + \omega)$ avec $A > 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$.

a) $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$ b) $g(x) = \cos(x) - \sqrt{3} \sin(x)$ c) $h(x) = a \cos(x) + b \sin(x)$

a) On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(x) \right) = \sqrt{2} \left(\cos(x) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin(x) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

b) On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) - \sqrt{3} \sin(x) = 2 \left(\frac{1}{2} \cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(x) \right) = 2 \left(\cos(x) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin(x) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) - \sqrt{3} \sin(x) = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

c) Ce n'est pas précisé dans l'énoncé mais a et b sont des réels, sinon le résultat peut être complexe, et nous ne pouvons pas répondre à l'énoncé !

On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, h(x) &= a \cos(x) + b \sin(x) = \operatorname{Re}(ae^{ix} - bie^{ix}) = \operatorname{Re}\left(e^{ix} \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right) e^{-i \arg(a+ib)}\right) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{Re}(e^{i(x - \arg(a+ib))}) \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, h(x) = a \cos(x) + b \sin(x) = |a + ib| \cos(x - \arg(a + ib))$$

Exercice D.5 : Calculer :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \sin(3kx)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, S_n(x) = \sum_{k=0}^n \sin(3kx) = \sum_{k=0}^n \operatorname{Im}(e^{3ikx}) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^n (e^{3ix})^k\right)$$

1^{er} cas : $e^{3ix} = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 3x = 2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{2k\pi}{3}$

On a alors :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \sin(3kx) = 0$$

2^{ième} cas : $x \neq \frac{2k\pi}{3}$

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n (e^{3ix})^k = \frac{(e^{3ix})^{n+1} - 1}{e^{3ix} - 1} = \frac{e^{\frac{3}{2}i(n+1)x} (e^{\frac{3}{2}i(n+1)x} - e^{-\frac{3}{2}i(n+1)x})}{e^{\frac{3}{2}ix} (e^{\frac{3}{2}ix} - e^{-\frac{3}{2}ix})} = e^{\frac{3}{2}nix} \times \frac{\sin\left(\frac{3}{2}(n+1)x\right)}{\sin\left(\frac{3}{2}x\right)}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \sin(3kx) = \frac{\sin\left(\frac{3}{2}(n+1)x\right)}{\sin\left(\frac{3}{2}x\right)} \sin\left(\frac{3}{2}nx\right)$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \sin(3kx) = \begin{cases} 0 & \text{si } \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{2k\pi}{3} \\ \frac{\sin\left(\frac{3}{2}(n+1)x\right)}{\sin\left(\frac{3}{2}x\right)} \sin\left(\frac{3}{2}nx\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice D.6 : Soit x réel. Résoudre l'équation (lorsqu'elle a un sens) :

$$\sum_{k=0}^n \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)} = 0$$

On peut déjà voir quand cette équation à un sens ! On sait que cette équation à un sens si et seulement si :

$$\cos(x) \neq 0$$

On en déduit donc que cette équation à un sens pour tous les x réels tels que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, \sum_{k=0}^n \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)} = \sum_{k=0}^n \operatorname{Re}\left(\frac{e^{ikx}}{\cos^k(x)}\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n \left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)^k\right)$$

Ici encore on doit faire attention.

On résout :

$$\frac{e^{ix}}{\cos(x)} = 1 \Leftrightarrow e^{ix} = \cos(x) \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = k\pi$$

1^{er} cas : $\exists k \in \mathbb{Z}, x = k\pi$

On a alors :

$$\forall j \in \llbracket 0; n \rrbracket, \frac{\cos(jx)}{\cos^j(x)} = \frac{\cos(jk\pi)}{(\cos(k\pi))^j} = \frac{(-1)^{jk}}{((-1)^k)^j} = 1$$

On en déduit alors que

$$\exists k \in \mathbb{Z}, x = k\pi \Rightarrow \sum_{k=0}^n \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)} = n + 1 \neq 0$$

2^{ème} cas : $x \neq k\pi$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)} = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n \left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)} \right)^k \right) = \frac{\left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)} \right)^{n+1} - 1}{\frac{e^{ix}}{\cos(x)} - 1}$$

De plus on sait que :

$$\frac{\left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)} \right)^{n+1} - 1}{\frac{e^{ix}}{\cos(x)} - 1} = \frac{e^{i(n+1)x} - \cos^{n+1}(x)}{e^{ix} - \cos(x)} \times \frac{1}{\cos^n(x)}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n \left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)} \right)^k \right) &= \frac{1}{\cos^n(x)} \times \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i(n+1)x} - \cos^{n+1}(x)}{e^{ix} - \cos(x)} \right) \\ &= \frac{1}{\cos^n(x)} \times \operatorname{Re} \left(\frac{(\cos((n+1)x) - \cos^{n+1}(x)) + i \sin((n+1)x)}{i \sin(x)} \right) \\ &= \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x) \cos^n(x)} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\sum_{k=0}^n \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin((n+1)x) = 0 \\ x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{n+1} \quad n \geq 2 \text{ et } k \in \mathbb{Z} \setminus \{(n+1)i; i \in \mathbb{Z}\}$$

On en déduit donc que :

$$\sum_{k=0}^n \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{n+1} \quad n \geq 2 \text{ et } k \in \mathbb{Z} \setminus \{(n+1)i; i \in \mathbb{Z}\}$$

Exercice D.7 : Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n |\cos(kx)| \geq \frac{2n+5}{8}$$

On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\cos(x)| \geq \cos^2(x) \text{ car } \forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos(x) \leq 1$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n |\cos(kx)| \geq \sum_{k=0}^n \cos^2(kx)$$

De plus on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) = \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \cos^2(kx) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \cos(2kx) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n 1$$

De plus on sait que :

$$\forall x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}, \sum_{k=0}^n \cos(2kx) = \frac{\cos(nx) \sin((n+1)x)}{\sin(x)} = \frac{1}{2} \frac{\sin(x) + \sin((2n+1)x)}{\sin(x)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}$$

On distingue alors deux cas.

1^{er} cas : $\exists k' \in \mathbb{Z}, x = k'\pi$

On a alors :

$$\sum_{k=0}^n |\cos(kx)| = \sum_{k=0}^n 1 = n+1 \geq \frac{n}{4} + \frac{5}{8} \left(\text{car } \forall n \in \mathbb{N}, \frac{3}{4}n \geq -\frac{3}{8} \right)$$

2^{ème} cas : $x \neq k'\pi, k' \in \mathbb{Z}$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n |\cos(kx)| \geq \sum_{k=0}^n \cos^2(kx) \geq \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \cos(2kx)$$

De plus on a :

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \cos(2kx) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n |\cos(kx)| \geq \frac{2n+3}{4} + \frac{1}{4} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}$$

On veut montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq k'\pi, k' \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}, \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} \geq \frac{1}{2} - n$$

On pose la fonction :

$$f: \begin{cases} \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} \end{cases}$$

On voit que f est paire et π -périodique :

$$\forall x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi\}, f(x+\pi) = \frac{\sin((2n+1)x + (2n+1)\pi)}{\sin(x+\pi)} = \frac{-\sin((2n+1)x)}{-\sin(x)} = f(x)$$

On étudie f sur $]0; \frac{\pi}{2}[$.

A finir...

Partie E : Module et argument

Exercice E.1 : Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$\text{a) } z_a = 1 + i \quad \text{b) } z_b = \sqrt{3} - i \quad \text{c) } z_c = (-3 + 3i)^{456}$$

a) On a :

$$z_a = 1 + i \Rightarrow |1 + i| = \sqrt{2}$$

De plus si on pose θ un argument de $1 + i$ on a alors :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

On en déduit que $\theta = \frac{\pi}{4}$ est un argument possible pour $1 + i$.

On a donc :

$$1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

b) On a :

$$z_b = \sqrt{3} - i \Rightarrow |\sqrt{3} - i| = \sqrt{4} = 2$$

De plus si on pose θ un argument de $\sqrt{3} - i$ on a alors :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

On en déduit que $\theta = -\frac{\pi}{6}$ est un argument possible pour $\sqrt{3} - i$.

On a donc :

$$\sqrt{3} - i = 2e^{-\frac{i\pi}{6}}$$

c) On cherche tout d'abord le module et un argument de $-3 + 3i$

$$|-3 + 3i| = 3\sqrt{2}$$

De plus si on pose θ un argument de $-3 + 3i$ on a alors :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{+3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

On en déduit que $\theta = \frac{3\pi}{4}$ est un argument possible pour $-3 + 3i$.

On a donc :

$$-3 + 3i = 3\sqrt{2}e^{3\frac{i\pi}{4}}$$

On en déduit donc que :

$$(-3 + 3i)^{456} = \left(3\sqrt{2}e^{3\frac{i\pi}{4}}\right)^{456} \times \left(e^{3\frac{i\pi}{4}}\right)^{456} = 3^{456} \times 2^{228} e^{342i\pi} = 3^{456} \times 2^{228}$$

Ainsi un argument de $(-3 + 3i)^{456}$ est 0 et son module est $3^{456} \times 2^{228}$.

$$(-3 + 3i)^{456} = 3^{456} \times 2^{228}$$

Exercice E.2 : Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$\begin{array}{llll} \text{a) } z_a = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} & \text{b) } z_b = -2i(2+2i) & \text{c) } z_c = \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{6}+i\sqrt{2}} & \text{d) } z_d = 1+i \tan(\theta) \\ \text{e) } z_e = 1+e^{i\theta} & \text{f) } z_f = 1-e^{i\theta} & \text{g) } z_g = \frac{1+\cos(\theta)+i\sin(\theta)}{1-\cos(\theta)-i\sin(\theta)} & \text{h) } z_h = (1+i)^n \end{array}$$

Ici il faut passer par la forme exponentielle, c'est beaucoup plus rapide !

a) On a :

$$z_a = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}}{2e^{-\frac{i\pi}{6}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times e^{\frac{5i\pi}{12}}$$

Donc le module de $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ est $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et un argument est $\frac{5\pi}{12}$.

b) On a :

$$z_b = -2i(2+2i) = 4-4i = 4\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$$

c) On a :

$$z_c = \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{6}+i\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+i)} = \frac{\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{2} \times e^{-\frac{i\pi}{6}}$$

d) On a :

$$z_d = 1+i \tan(\theta) = \frac{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{1}{\cos(\theta)} e^{i\theta}$$

ATTENTION : ici $\cos(\theta)$ n'est pas nécessairement positif ! Il faut distinguer des cas !

1^{er} cas : $\exists k \in \mathbb{Z}, \theta \in \left] -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right[$

On a alors :

$$\forall \theta \in \left] -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right[, \cos(\theta) > 0 \Rightarrow \begin{cases} |z_d| = \frac{1}{\cos(\theta)} \\ \arg(z_d) = \theta \text{ (à } 2\pi - \text{près)} \end{cases}$$

2^{ième} cas : $\exists k \in \mathbb{Z}, \theta \in \left] \frac{\pi}{2} + 2k\pi; 3\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right[$

On a alors :

$$\begin{aligned} \forall \theta \in \left] -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right[, \cos(\theta) < 0 \\ \Rightarrow z_d = \frac{1}{\cos(\theta)} e^{i\theta} = -\frac{1}{\cos(\theta)} e^{i\pi} e^{i\theta} = -\frac{1}{\cos(\theta)} e^{i(\pi+\theta)} \\ \Rightarrow \begin{cases} |z_d| = \frac{-1}{\cos(\theta)} \\ \arg(z_d) = \pi + \theta \text{ (à } 2\pi - \text{près)} \end{cases} \end{aligned}$$

e) On a :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, z_e = 1 + e^{i\theta} = e^{\frac{i\theta}{2}} \left(e^{-\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{i\theta}{2}} \right) = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times e^{\frac{i\theta}{2}}$$

ATTENTION ici $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ n'est pas nécessairement positif ! Il faut distinguer des cas !

On sait que :

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{\theta}{2} \in \left] -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right[\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \theta \in]-\pi + 4k\pi; \pi + 4k\pi[$$

1^{er} cas : $\exists k \in \mathbb{Z}, \theta \in]-\pi + 4k\pi; \pi + 4k\pi[$

On a alors :

$$\forall \theta \in]-\pi + 4k\pi; \pi + 4k\pi[, \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0 \Rightarrow \begin{cases} |z_e| = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \arg(z_e) = \frac{\theta}{2} \text{ (à } 2\pi - \text{près)} \end{cases}$$

2^{ième} cas : $\exists k \in \mathbb{Z}, \theta \in]\pi + 4k\pi; 3\pi + 4k\pi[$

On a alors :

$$\forall \theta \in \theta \in]\pi + 4k\pi; 3\pi + 4k\pi[, \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) < 0 \Rightarrow \begin{cases} |z_e| = -2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \arg(z_e) = \frac{\theta}{2} + \pi \text{ (à } 2\pi - \text{près)} \end{cases}$$

f) On a :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, z_f = 1 - e^{i\theta} = e^{\frac{i\theta}{2}} \left(e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}} \right) = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times e^{\frac{i\theta}{2}} = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta-\pi}{2}}$$

ATTENTION ici $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ n'est pas nécessairement positif ! Il faut distinguer des cas !

On sait que :

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{\theta}{2} \in]2k\pi; (2k+1)\pi[\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \theta \in]4k\pi; (4k+2)\pi[$$

1^{er} cas : $\exists k \in \mathbb{Z}, \theta \in]4k\pi; (4k+2)\pi[$

On a alors :

$$\forall \theta \in]4k\pi; (4k+2)\pi[, \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0 \Rightarrow \begin{cases} |z_f| = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \arg(z_f) = \frac{\theta - \pi}{2} \text{ (à } 2\pi - \text{près)} \end{cases}$$

2^{ième} cas : $\exists k \in \mathbb{Z}, \theta \in](4k+2)\pi; 4(k+1)\pi[$

On a alors :

$$\forall \theta \in \theta \in \left] -k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi \right[, \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) < 0 \Rightarrow \begin{cases} |z_f| = -2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \arg(z_f) = \frac{\theta + \pi}{2} \text{ (à } 2\pi - \text{ près)} \end{cases}$$

g) On a :

$$z_g = \frac{1 + \cos(\theta) + i\sin(\theta)}{1 - \cos(\theta) - i\sin(\theta)} = \frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} = -\frac{2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{i}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Remarque : On peut définir la fonction cotangente là où $\tan$ est définie et ne s'annule pas, noté $\cotan$, par :

$$\cotan(x) = \frac{1}{\tan(x)}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} |z_g| = \frac{1}{\left| \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|} \\ \arg(z_g) = \pm \frac{\pi}{2} \text{ (à } 2\pi - \text{ près)} \end{cases}$$

On peut préciser le signe de l'argument et la valeur exacte du module !

On sait que :

$$\tan(x) > 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x \in \left] k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$$

On en déduit donc que :

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{\theta}{2} \in \left] k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \theta \in]2k\pi; \pi + 2k\pi[$$

On distingue alors deux cas :

1^{er} cas : $\exists k \in \mathbb{Z}, \theta \in]2k\pi; \pi + 2k\pi[$

On a alors :

$$\begin{cases} |z_g| = \frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ \arg(z_g) = +\frac{\pi}{2} \text{ (à } 2\pi - \text{ près)} \end{cases}$$

2^{ième} cas : $\exists k \in \mathbb{Z}, \theta \in]\pi + 2k\pi; 2k\pi[$

On a alors :

$$\begin{cases} |z_g| = \frac{-1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ \arg(z_g) = -\frac{\pi}{2} \text{ (à } 2\pi - \text{ près)} \end{cases}$$

h) On a :

$$z_h = (1 + i)^n = \sqrt{2}^n e^{\frac{in\pi}{4}}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} |z_h| = 2^{\frac{n}{2}} \\ \arg(z_h) = \frac{n\pi}{4} \end{cases}$$

Exercice E.3 : Pour quelles valeurs de n , le nombre complexe :

$$\left(\frac{(1 - i\sqrt{3})^5}{(1 - i)^3} \right)^n$$

Est-il un réel positif ?

On sait que :

$$z \in \mathbb{R}^{+*} \Leftrightarrow \arg(z) = 0 \text{ (à } 2\pi - \text{ près)}$$

Nous allons donc chercher l'argument de :

$$z_n = \left(\frac{(1 - i\sqrt{3})^5}{(1 - i)^3} \right)^n$$

On sait que :

$$\arg(z_n) = n \arg \left(\frac{(1 - i\sqrt{3})^5}{(1 - i)^3} \right) = n \left(\arg((1 - i\sqrt{3})^5) - \arg((1 - i)^3) \right)$$

De plus on sait que :

$$\arg((1 - i\sqrt{3})^5) = 5 \arg(1 - i\sqrt{3}) = -\frac{5\pi}{3}$$

De même on a :

$$\arg((1 - i)^3) = 3 \arg(1 - i) = -\frac{3\pi}{4}$$

On en déduit donc que :

$$\arg \left(\left(\frac{(1 - i\sqrt{3})^5}{(1 - i)^3} \right)^n \right) = n \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{5\pi}{3} \right) = -\frac{11\pi}{12} n$$

On en déduit donc que :

$$z_n \in \mathbb{R}^{+*} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{11\pi}{12} n = 2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = \frac{24}{11} k$$

De plus n étant un entier, on en déduit donc que z_n est un réel positif si et seulement si n est un multiple de 24 !

On a donc :

$$\left(\frac{(1 - i\sqrt{3})^5}{(1 - i)^3} \right)^n \in \mathbb{R}^{+*} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 24k$$

Exercice E.4 : Déterminer l'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tel que :

$$1) \arg(z) = \frac{\pi}{3} \quad 2) \arg(z - 1 + 2i) = -\frac{3\pi}{4}$$

1) En raisonnant sur la géométrie de l'argument on obtient :

$$\arg(z) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow M(z) \text{ appartient à la demi-droite ouverte }]OA) \text{ où } A(1, \sqrt{3})$$

2) De même on sait que :

$$\arg(z - 1 + 2i) = \arg(z - (1 - 2i)) = (\vec{i}; \overrightarrow{AM}) \text{ avec } A(1, -2) \text{ et } M(z)$$

On en déduit donc que :

$$\arg(z - 1 + 2i) = -\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow M(z) \text{ appartient à la demi-droite ouverte }]AB) \text{ où } B(0, -3)$$

Exercice E.5 : Ecrire l'écriture complexe de la rotation de centre A(1 ; -2) et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

On pose $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ l'écriture complexe de la rotation de centre A(1 ; -2) et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

On sait que :

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C}, f(z) - z_A &= e^{-\frac{i\pi}{3}} (z - z_A) \\ \Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}, f(z) &= 1 - 2i + \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right) (z - 1 + 2i) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right) z + \sqrt{3} + i \frac{\sqrt{3} - 2}{2} \end{aligned}$$

On en déduit donc que l'écriture complexe de la rotation de centre A(1 ; -2) et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ est donné par :

$$f: \begin{cases} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z + \sqrt{3} + i\frac{\sqrt{3}-2}{2} \end{cases}$$

Exercice E.6 : Soient A(2 ;3), B(4 ;5) et C(3 ;3+√3). Déterminer la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

On sait que :

$$z_{\overrightarrow{AB}} = 2 + 2i \text{ et } z_{\overrightarrow{AC}} = 1 + \sqrt{3}i$$

On en déduit donc que :

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \arg(z_C - z_A) - \arg(z_B - z_A) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

Exercice E.7 : A quelle condition les points A(a), B(b) et C(c) forment-ils un triangle équilatéral ?

ABC est un triangle équilatéral si et seulement si :

$$\begin{cases} |\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}| = \frac{\pi}{3} \\ AB = AC \end{cases}$$

On en déduit donc que :

ABC est un triangle équilatéral si et seulement si :

$$z_{\overrightarrow{AC}} = e^{i\frac{\pi}{3}} z_{\overrightarrow{AB}}, \text{ avec } \epsilon^2 = 1$$

1^{er} cas : $z_{\overrightarrow{AC}} = e^{i\frac{\pi}{3}} z_{\overrightarrow{AB}}$

On a alors :

$$z_{\overrightarrow{AC}} = e^{i\frac{\pi}{3}} z_{\overrightarrow{AB}} \Leftrightarrow (c - a) = e^{i\frac{\pi}{3}} (b - a) \Leftrightarrow c - be^{i\frac{\pi}{3}} = \left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)a \Leftrightarrow c - be^{i\frac{\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}a$$

On en déduit donc que :

$$z_{\overrightarrow{AC}} = e^{i\frac{\pi}{3}} z_{\overrightarrow{AB}} \Leftrightarrow c - be^{i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}}a = 0$$

Si on pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ on obtient alors :

$$jc + b - e^{i\frac{\pi}{3}}a = 0 \Leftrightarrow j^2c + bj + a = 0$$

On a donc :

$$z_{\overrightarrow{AC}} = e^{i\frac{\pi}{3}} z_{\overrightarrow{AB}} \Leftrightarrow j^2c + bj + a = 0$$

2^{ième} cas : $z_{\overrightarrow{AC}} = e^{-i\frac{\pi}{3}} z_{\overrightarrow{AB}}$

On a alors :

$$z_{\overrightarrow{AC}} = e^{-i\frac{\pi}{3}} z_{\overrightarrow{AB}} \Leftrightarrow (c - a) = e^{-i\frac{\pi}{3}} (b - a) \Leftrightarrow c - be^{-i\frac{\pi}{3}} = \left(1 - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)a \Leftrightarrow c - be^{-i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}}a$$

On en déduit donc que :

$$z_{\overrightarrow{AC}} = e^{-i\frac{\pi}{3}} z_{\overrightarrow{AB}} \Leftrightarrow c - be^{-i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{3}}a = 0$$

Si on pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ on obtient alors :

$$jc - be^{-i\frac{\pi}{3}} + a = 0 \Leftrightarrow j^2c + b + aj = 0$$

On a donc :

$$z_{\overrightarrow{AC}} = e^{i\frac{\pi}{3}} z_{\overrightarrow{AB}} \Leftrightarrow j^2c + bj + a = 0$$

On en déduit donc que :

A(a), B(b) et C(c) forment un triangle équilatéral si et seulement si :

$$\begin{cases} j^2c + bj + a = 0 \\ \text{ou} \\ j^2c + b + aj = 0 \end{cases} \text{ avec } j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

Exercice E.8 : Déterminer les nombres complexes z tels que :

- $1, z$ et z^2 forment un triangle rectangle isocèle.
- z, z^2 et z^4 sont alignés.

On pose $A(1), M_1(z)$ et $M_2(z^2)$.

Il faut distinguer des cas.

1^{er} cas : AM_1M_2 est rectangle en A

On sait que :

AM_1M_2 est rectangle en A si et seulement si :

$$z^2 - 1 = \epsilon i(z - 1) \text{ avec } \epsilon^2 =$$

$$_ \text{ On a } z^2 - 1 = i(z - 1) \Leftrightarrow z^2 - iz - 1 + i = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z + 1 - i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ \text{ou} \\ z = -1 + i \end{cases}$$

$$_ \text{ On a } z^2 - 1 = -i(z - 1) \Leftrightarrow z^2 + iz - 1 - i = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z + 1 + i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ \text{ou} \\ z = -1 - i \end{cases}$$

On en déduit donc que $A(1), M_1(z)$ et $M_2(z^2)$ forment un triangle rectangle isocèle en A si et seulement si $z = -1 + i$ ou $z = -1 - i$.

On fait de même pour un triangle rectangle isocèle en M_1 et M_2 .

Partie F : Exponentielle complexe

Exercice F.1 : Résoudre sur $\mathbb{C}$:

1) $e^z = i$ 2) $e^z = 1 + i\sqrt{3}$ 3) $e^z = 3$

1) On a :

$$e^z = i \Leftrightarrow e^a e^{ib} = e^{\frac{i\pi}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow z = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$$

2) On a :

$$e^z = 1 + i\sqrt{3} \Leftrightarrow e^a e^{ib} = 2e^{\frac{i\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \ln(2) \\ b = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow z = \ln(2) + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$$

3) On a :

$$e^z = 3 \Leftrightarrow e^a e^{ib} = 3e^{i \times 0} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \ln(3) \\ b = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow z = \ln(3) + i2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Partie G : Equation sur $\mathbb{C}$

Exercice G.1 : Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

1) $z = 1 + 6i$ 2) $z = -119 + 120i$

1) On pose :

$$\delta = x + iy, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \delta^2 = 1 + 6i$$

On en déduit alors que :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ xy = 3 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{37} \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$2x^2 = 1 + \sqrt{37} \Leftrightarrow x \in \left\{ -\sqrt{\frac{1 + \sqrt{37}}{2}}; \sqrt{\frac{1 + \sqrt{37}}{2}} \right\}$$

De plus on sait que :

$$y^2 = x^2 - 1 = \sqrt{\frac{\sqrt{37} - 1}{2}} \text{ et } xy > 0$$

On en déduit donc que :

$$\delta^2 = 1 + 6i \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{37}}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{37} - 1}{2}} \\ \text{ou} \\ \delta = -\sqrt{\frac{1 + \sqrt{37}}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{37} - 1}{2}} \end{cases}$$

2) On pose :

$$\delta = x + iy, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \delta^2 = -119 + 120i$$

On en déduit alors que :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -119 \\ xy = 60 \\ x^2 + y^2 = 169 \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$2x^2 = 50 \Leftrightarrow x \in \{-5; 5\}$$

De plus on sait que :

$$y^2 = x^2 + 119 = 144 \text{ et } xy > 0$$

On en déduit donc que :

$$\delta^2 = -119 + 120i \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = 5 + 12i \\ \text{ou} \\ \delta = -5 - 12i \end{cases}$$

Exercice G.2 : Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Soit u une racine carrée de zz' . Démontrer que :

$$|z| + |z'| = \left| \frac{z + z'}{2} + u \right| + \left| \frac{z - z'}{2} + u \right|$$

On sait que :

$$u^2 = zz'$$

1^{er} cas : Si $z=0$ ou $z'=0$ l'égalité est vraie car :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| = \left| \frac{z}{2} \right| + \left| \frac{z}{2} \right|$$

2^{ième} cas : Si $z \neq 0$ et $z' \neq 0$

Alors z et z' admettent une racine carrée, notée v et v' .

On sait que :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2) \text{ (démontré dans l'exercice D5 !)}$$

On a donc :

$$|v + v'|^2 + |v - v'|^2 = 2(|v|^2 + |v'|^2)$$

De plus on sait que $|v|^2 = |v'|^2 = |z|$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} |v + v'|^2 + |v - v'|^2 &= 2(|z| + |z'|) \\ \Rightarrow \frac{|v + v'|^2 + |v - v'|^2}{2} &= |z| + |z'| \end{aligned}$$

De plus on a :

$$|v + v'|^2 = |(v + v')^2| = |v^2 + v'^2 + 2vv'| = |z + z' + 2vv'|$$

De même on a :

$$|v + v'|^2 = |z + z' - 2vv'|$$

De plus on sait que :

$$(vv')^2 = v^2 v'^2 = zz'$$

Donc vv' est une racine carrée de zz' . On pose $u = vv'$. On a alors :

$$|z| + |z'| = \frac{|v + v'|^2 + |v - v'|^2}{2} = \frac{|z + z' + 2u|}{2} + \frac{|z - z' + 2u|}{2} = \left| \frac{z + z'}{2} + u \right| + \left| \frac{z - z'}{2} + u \right|$$

Exercice G.3 : Calculer les racines carrées de :

$$Z_{a,b} = 4ab + 2(a^2 - b^2)i \text{ avec } (a; b) \in \mathbb{R}^2$$

On sait que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, (a - ib)^2 = a^2 - b^2 - 2iab$$

De plus on a :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, Z_{a,b} = 4ab + 2(a^2 - b^2)i = (a^2 - b^2 - 2iab)(2i)$$

On en déduit donc que :

$$Z_{a,b} = (a - ib)^2(2i) = (a - ib)^2(1 + i)^2 = ((a - ib)(1 + i))^2 = (a + b + i(a - b))^2$$

On en déduit donc que les deux racines carrées de $Z_{a,b}$ sont : $a + b + i(a - b)$ et $-(a + b + i(a - b))$:

$$z^2 = 4ab + 2(a^2 - b^2)i \Leftrightarrow \begin{cases} z = a + b + i(a - b) \\ \text{ou} \\ z = -(a + b) - i(a - b) \end{cases}$$

Exercice G.4 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $z^2 - 2iz + 2 - 4i = 0$

2) $(2 + i)z^2 + (5 - i)z + 2 - 2i = 0$

3) $z^4 + (3 - 6i)z^2 - 2(4 + 3i) = 0$

4) $z^{2n} - 2\cos(n\theta)z^n + 1 = 0$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$

1) On a :

$$z^2 - 2iz + 2 - 4i = 0 \Rightarrow \Delta = -4 - 4(2 - 4i) = -12 + 16i = \delta^2$$

On pose alors $\delta = x + iy, (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On en déduit donc que :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -12 \\ xy = 8 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$x^2 = 4 \Rightarrow x \in \{-2; 2\}$$

De plus on sait que :

$$xy = 8$$

On en déduit donc que :

$$\delta^2 = -12 + 16i \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = -2 - 4i \\ \text{ou} \\ \delta = 2 + 4i \end{cases}$$

On a alors :

$$z^2 - 2iz + 2 - 4i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{2i - 2 - 4i}{2} = -1 - i \\ \text{ou} \\ z = \frac{2i + 2 + 4i}{2} = 1 + 3i \end{cases}$$

2) On a :

$$(2 + i)z^2 + (5 - i)z + 2 - 2i = 0 \Rightarrow \Delta = (5 - i)^2 - 4(2 + i)(2 - 2i) = 24 - 10i - 24 + 8i = -2i = (1 - i)^2$$

$$(2+i)z^2 + (5-i)z + 2 - 2i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{-(5-i) - (1-i)}{2(2+i)} = \frac{-3+i}{2+i} = \frac{(-3+i)(2-i)}{5} = -1+i \\ \text{ou} \\ z = \frac{-(5-i) + (1-i)}{2(2+i)} = -\frac{2}{2+i} = \frac{-2(2-i)}{5} = -\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i \end{cases}$$

3) On a :

$$z^4 + (3-6i)z^2 - 2(4+3i) = 0 \Leftrightarrow Z^2 + (3-6i)Z - 2(4+3i) = 0 \text{ avec } Z = z^2$$

On résout l'équation :

$$\begin{aligned} Z^2 + (3-6i)Z - 2(4+3i) &= 0 \\ \Rightarrow \Delta &= (3-6i)^2 + 8(4+3i) = -27 - 36i + 32 + 24i = 5 - 12i \end{aligned}$$

On pose alors $\delta = x + iy, (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On en déduit donc que :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = -6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$x^2 = 9 \Rightarrow x \in \{-3; 3\}$$

De plus on sait que :

$$xy = -6$$

On en déduit donc que :

$$\delta^2 = 5 - 12i \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = 3 - 2i \\ \text{ou} \\ \delta = -3 + 2i \end{cases}$$

On a alors :

$$Z^2 + (3-6i)Z - 2(4+3i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Z = \frac{-3+6i+3-2i}{2} = 2i \\ \text{ou} \\ Z = \frac{-3+6i-3+2i}{2} = -3+4i \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$z^4 + (3-6i)z^2 - 2(4+3i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = 2i \\ \text{ou} \\ z^2 = -3+4i \end{cases}$$

Or on sait que :

$$z^2 = 2i \Leftrightarrow z \in \{1+i; -1-i\}$$

Il nous reste à résoudre :

$$z^2 = -3+4i$$

On pose $z = x + iy, (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a alors :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow x \in \{-1; 1\} \Leftrightarrow (x, y) = (1, 2) \text{ ou } (x, y) = (-1, -2)$$

On en déduit donc que :

$$z^2 = -3+4i \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1+2i \\ \text{ou} \\ z = -1-2i \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$z^4 + (3-6i)z^2 - 2(4+3i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1+i \\ \text{ou} \\ z = -1-i \\ \text{ou} \\ z = 1+2i \\ \text{ou} \\ z = -1-2i \end{cases}$$

4) On a :

$$\forall (z, n, \theta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}, z^{2n} - 2 \cos(n\theta) z^n + 1 = (z^n - e^{in\theta})(z^n - e^{-in\theta})$$

On en déduit donc que :

$$z^{2n} - 2 \cos(n\theta) z^n + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^n = e^{in\theta} \\ \text{ou} \\ z^n = e^{-in\theta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{z}{e^{i\theta}}\right)^n = 1 \\ \text{ou} \\ (ze^{i\theta})^n = 1 \end{cases}$$

Or on sait que :

$$z^n = 1 \Leftrightarrow z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0; n \rrbracket$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} \left(\frac{z}{e^{i\theta}}\right)^n = 1 \\ \text{ou} \\ (ze^{i\theta})^n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = e^{\frac{2ik\pi}{n} + i\theta} \\ \text{ou} \\ z = e^{\frac{2ik\pi}{n} - i\theta} \end{cases}$$

On a donc :

$$z^{2n} - 2 \cos(n\theta) z^n + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = e^{\frac{2ik\pi}{n} + i\theta} \\ \text{ou} \\ z = e^{\frac{2ik\pi}{n} - i\theta} \end{cases}$$

Exercice G.5 : On pose l'équation (E) :

$$(E): 2z^3 - (3 + 4i)z^2 - (4 - 7i)z + 4 + 2i = 0$$

1) Montrer que (E) admet une solution réel.

2) En déduire toutes les solutions de (E).

1) On sait que z est solution de (E) si et seulement si :

$$2z^3 - (3 + 4i)z^2 - (4 - 7i)z + 4 + 2i = 0$$

D'après les propriétés du conjugué que :

$$2z^3 - (3 + 4i)z^2 - (4 - 7i)z + 4 + 2i = 0 \Leftrightarrow 2\bar{z}^3 - (3 - 4i)\bar{z}^2 - (4 + 7i)\bar{z} + 4 - 2i = 0$$

On en déduit que $z \in \mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{cases} 2z^3 - (3 + 4i)z^2 - (4 - 7i)z + 4 + 2i = 0 \\ 2z^3 - (3 - 4i)z^2 - (4 + 7i)z + 4 - 2i = 0 \end{cases} \quad (\text{car } z = \bar{z})$$

De plus on a :

$$\begin{cases} 2z^3 - (3 + 4i)z^2 - (4 - 7i)z + 4 + 2i = 0 \\ 2z^3 - (3 - 4i)z^2 - (4 + 7i)z + 4 - 2i = 0 \end{cases} \Rightarrow -8iz^2 + 14iz + 4i = 0 \Rightarrow z^2 - \frac{7}{4}z - \frac{1}{2} = 0$$

On résout :

$$z^2 - \frac{7}{4}z - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \Delta = \frac{81}{16}$$

On en déduit donc que :

$$z^2 - \frac{7}{4}z - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{\frac{7}{4} - \frac{9}{4}}{2} = -\frac{1}{4} \\ \text{ou} \\ z = \frac{\frac{7}{4} + \frac{9}{4}}{2} = 2 \end{cases}$$

Il ne nous reste plus qu'à essayer dans l'équation.

On calcule :

$$2(2^3) - (3 + 4i)(2)^2 - (4 - 7i)2 + 4 + 2i = 16 - 12 - 16i - 8 + 14i + 4 + 2i = 0$$

Donc $z = 2$ est solution. On peut ensuite le vérifier pour $z = \frac{1}{2}$ mais cela ne va pas fonctionner !

2) Il suffit de factoriser le polynôme par $z - 2$. On a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, 2z^3 - (3 + 4i)z^2 - (4 - 7i)z + 4 + 2i = (z - 2)(2z^2 + az + b)$$

En écrivant cette égalité pour $z = 0$ on obtient immédiatement que $b = -2 - i$

On développe alors :

$$(z - 2)(2z^2 + az - 2 - i) = 2z^3 + z^2(a - 4) + z(-2a - 2 - i) + 4 + 2i$$

On identifie alors et on trouve $a = 1 - 4i$

On a alors :

$$\forall z \in \mathbb{C}, 2z^3 - (3 + 4i)z^2 - (4 - 7i)z + 4 + 2i = (z - 2)(2z^2 + (1 - 4i)z - 2 - i)$$

On a donc :

$$2z^3 - (3 + 4i)z^2 - (4 - 7i)z + 4 + 2i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 \\ \text{ou} \\ 2z^2 + (1 - 4i)z - 2 - i = 0 \end{cases}$$

On résout la deuxième équation.

$$\Delta = (1 - 4i)^2 + 8(2 + i) = 1$$

On en déduit donc que :

$$2z^2 + (1 - 4i)z - 2 - i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{-1 + 4i + 1}{4} = i \\ \text{ou} \\ z = \frac{-1 + 4i - 1}{4} = -\frac{1}{2} + i \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$2z^3 - (3 + 4i)z^2 - (4 - 7i)z + 4 + 2i = 0 \Leftrightarrow z \in \left\{ 1; i; -\frac{1}{2} + i \right\}$$

Exercice G.6 : On pose l'équation (E) :

$$(E): z^3 + (1 - 2i)z^2 + (1 - i)z - 2i = 0$$

1) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure.

2) En déduire toutes les solutions de (E).

1) On sait que z est solution de (E) si et seulement si :

$$z^3 + (1 - 2i)z^2 + (1 - i)z - 2i = 0$$

D'après les propriétés du conjugué que :

$$z^3 + (1 - 2i)z^2 + (1 - i)z - 2i = 0 \Leftrightarrow \bar{z}^3 + (1 + 2i)\bar{z}^2 + (1 + i)\bar{z} + 2i = 0$$

On en déduit que $z \in \mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{cases} z^3 + (1 - 2i)z^2 + (1 - i)z - 2i = 0 \\ -z^3 + (1 + 2i)z^2 - (1 + i)z + 2i = 0 \end{cases} \quad (\text{car } -z = \bar{z})$$

De plus on a :

$$\begin{cases} z^3 + (1 - 2i)z^2 + (1 - i)z - 2i = 0 \\ -z^3 + (1 + 2i)z^2 - (1 + i)z + 2i = 0 \end{cases} \Rightarrow 2z^2 - 2iz = 0 \Rightarrow z = 0 \text{ ou } z = i$$

Il ne nous reste plus qu'à essayer dans l'équation.

On calcule :

$$i^3 + (1 - 2i)i^2 + (1 - i)i - 2i = -i - 1 + 2i + i + 1 - 2i = 0$$

Donc $z = i$ est solution. On voit que $z = 0$ n'est pas solution.

2) Il suffit de factoriser le polynôme par $z - i$. On a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, z^3 + (1 - 2i)z^2 + (1 - i)z - 2i = (z - i)(z^2 + (1 - i)z + 2)$$

On a donc :

$$z^3 + (1 - 2i)z^2 + (1 - i)z - 2i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = i \\ \text{ou} \\ z^2 + (1 - i)z + 2 = 0 \end{cases}$$

On résout la deuxième équation.

$$\Delta = (1 - i)^2 - 8 = -8 - 2i = \delta^2$$

On pose $\delta = x + iy, (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a alors :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ xy = -1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$x \in \left\{ \sqrt{\sqrt{17} - 4}; -\sqrt{\sqrt{17} - 4} \right\}$$

On en déduit donc que

$$-8 - 2i = \delta^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = \sqrt{\sqrt{17} - 4} - i\sqrt{\sqrt{17} + 4} \\ \text{ou} \\ \delta = -\sqrt{\sqrt{17} - 4} + i\sqrt{\sqrt{17} + 4} \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$z^2 + (1 - i)z + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{-1 + i - (\sqrt{\sqrt{17} - 4} - i\sqrt{\sqrt{17} + 4})}{2} \\ \text{ou} \\ z = \frac{-1 + i + (\sqrt{\sqrt{17} - 4} - i\sqrt{\sqrt{17} + 4})}{2} \end{cases}$$

Il se peut qu'il y est des erreurs de calculs devant un résultat aussi peu « sympathique »...

$$z^3 + (1 - 2i)z^2 + (1 - i)z - 2i = 0 \Leftrightarrow z \in \left\{ i; \frac{-1 + i - (\sqrt{\sqrt{17} - 4} - i\sqrt{\sqrt{17} + 4})}{2}; \frac{-1 + i + (\sqrt{\sqrt{17} - 4} - i\sqrt{\sqrt{17} + 4})}{2} \right\}$$

Exercice G.7 : Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 1 + i \\ xy = 2 - i \end{cases}$$

On sait que :

$$\begin{cases} x + y = 1 + i \\ xy = 2 - i \end{cases} \Leftrightarrow x \text{ et } y \text{ sont solutions de } z^2 - (1 + i)z + 2 - i = 0$$

On résout :

$$z^2 - (1 + i)z + 2 - i = 0 \Rightarrow \Delta = (1 + i)^2 - 4(2 - i) = 2i - 8 + 4i = -8 + 6i = \delta^2$$

De plus si on pose $\delta = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a alors :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ xy = 3 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (-1; -3) \text{ ou } (x, y) = (1; 3)$$

On en déduit donc que :

$$z^2 - (1 + i)z + 2 - i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1 + i - 1 - 3i}{2} = -i \\ \text{ou} \\ z = \frac{1 + i + 1 + 3i}{2} = 1 + 2i \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} x + y = 1 + i \\ xy = 2 - i \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) \in \{(-i, 1 + 2i); (1 + 2i, -i)\}$$

Exercice G.8 : Démontrer que pour tout x réel distinct de $[-1; 1]$ ($x \in \mathbb{R} \setminus [-1; 1]$), il existe un unique z complexe tel que :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \\ |z| > 1 \end{cases}$$

On a :

$$x = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \Leftrightarrow z^2 - 2xz + 1 = 0$$

On a alors $\Delta = 4x^2 - 4 = 4(x^2 - 1) > 0$ car $|x| > 1$

On en déduit donc que :

$$x = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \Leftrightarrow z^2 - 2xz + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = x - \sqrt{x^2 - 1} \\ \text{ou} \\ z = x + \sqrt{x^2 - 1} \end{cases}$$

Exercice G.9 : Résoudre :

1) $z^{10} = 1$ 2) $z^5 = -1$

1) Il suffit d'appliquer la formule :

$$z^{10} = 1 \Leftrightarrow z = e^{\frac{2ik\pi}{10}} = e^{\frac{ik\pi}{5}}; k \in \llbracket 0; 9 \rrbracket$$

2) Ici on a :

$$z^5 = -1 \Leftrightarrow z^5 = e^{i\pi} \Leftrightarrow \left(\frac{z}{e^{\frac{i\pi}{5}}} \right)^5 = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{e^{\frac{i\pi}{5}}} = e^{\frac{2ik\pi}{5}}, k \in \llbracket 0; 4 \rrbracket \Leftrightarrow z = e^{\frac{i\pi}{5}(2k+1)}, k \in \llbracket 0; 4 \rrbracket$$

On en déduit donc que :

$$z^5 = -1 \Leftrightarrow z = e^{\frac{i\pi}{5}(2k+1)}, k \in \llbracket 0; 4 \rrbracket$$

Exercice G.10 : Résoudre : 1) $z^5 = \frac{1-i}{\sqrt{3}+i}$ 2) $(z+1)^n = (z-1)^n$ 3) $4(z+i)^4 - (z+1)^4 = 0$

1) On a :

$$\frac{1-i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}}{2e^{\frac{i\pi}{6}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{5i\pi}{12}}$$

On en déduit donc que :

$$z^5 = \frac{1-i}{\sqrt{3}+i} \Leftrightarrow \left(\frac{z}{e^{-\frac{5i\pi}{12}}} \right)^5 = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{e^{-\frac{5i\pi}{12}}} = e^{\frac{2ik\pi}{5}}, k \in \llbracket 0; 4 \rrbracket \Leftrightarrow z = e^{-\frac{5i\pi}{12}} e^{\frac{2ik\pi}{5}} = e^{\frac{-1}{10} \left(\frac{2k}{5} + \frac{1}{12} \right) i\pi}$$

On en déduit donc que :

$$z^5 = \frac{1-i}{\sqrt{3}+i} \Leftrightarrow e^{\frac{-1}{10} \left(\frac{2k}{5} + \frac{1}{12} \right) i\pi}, k \in \llbracket 0; 4 \rrbracket$$

2) On peut déjà voir que $z = 1$ n'est pas solution !

On a alors :

$$(z+1)^n = (z-1)^n \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^n = 1 \Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \text{ car } \frac{z+1}{z-1} \neq 1$$

De plus on sait que :

$$\frac{z+1}{z-1} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \Leftrightarrow z \left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) = -e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 \Leftrightarrow ze^{\frac{ik\pi}{n}} 2i \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) = 2e^{\frac{ik\pi}{n}} \cos \left(\frac{k\pi}{n} \right) \Leftrightarrow z = -\frac{i}{\tan \left(\frac{k\pi}{n} \right)}$$

On en déduit donc que :

$$(z+1)^n = (z-1)^n \Leftrightarrow z = -\frac{i}{\tan \left(\frac{k\pi}{n} \right)} = i \cotan \left(\frac{k\pi}{n} \right), k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$$

3) On a :

$$4(z+i)^4 - (z+1)^4 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}(z+i)}{z+1} \right)^4 = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}(z+i)}{z+1} \in \{1; -1; i; -i\}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}(z+i)}{z+1} = 1 &\Leftrightarrow z = \frac{1-i\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{(1-i\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{3} = \frac{\sqrt{2}+1}{3} - i \frac{2+\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}(z+i)}{z+1} = i &\Leftrightarrow z = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i} i = \frac{(1-\sqrt{2})(\sqrt{2}+i)}{3} i = \frac{\sqrt{2}-1}{3} - i \frac{2-\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{2}(z+i)}{z+1} = -1 \Leftrightarrow z = -\frac{1+i\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{(1+i\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}{3} = \frac{\sqrt{2}-1}{3} + i\frac{2-\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{2}(z+i)}{z+1} = -i \Leftrightarrow z = \frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+i} i = \frac{(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-i)}{3} (-i) = -\frac{\sqrt{2}+1}{3} - i\frac{2+\sqrt{2}}{3}$$

On en déduit donc que :

$$4(z+i)^4 - (z+1)^4 = 0 \Leftrightarrow z \in \left\{ \frac{\sqrt{2}+1}{3} - i\frac{2+\sqrt{2}}{3}; \frac{\sqrt{2}-1}{3} - i\frac{2-\sqrt{2}}{3}; \frac{\sqrt{2}-1}{3} + i\frac{2-\sqrt{2}}{3}; -\frac{\sqrt{2}+1}{3} - i\frac{2+\sqrt{2}}{3} \right\}$$

Exercice G.11 : On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{7}}$, $u = z + z^2 + z^4$ et $v = z^3 + z^5 + z^6$.

1) Calculer $u+v$ puis u^2 en fonction de u et de v .

2) En déduire la valeur de :

$$S = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$$

1) On sait que :

$$u + v = \sum_{k=1}^6 z^k = \sum_{k=0}^6 z^k - 1 = \frac{z^7 - 1}{z - 1} - 1 = -1$$

De plus on sait que :

$$u^2 = (z + z^2 + z^4)^2 = z^2 + z^4 + z^8 + 2z^3 + 2z^5 + 2z^6 = u + 2v$$

$$\text{En effet on a : } z^8 = \left(e^{\frac{2i\pi}{7}}\right)^8 = \left(e^{\frac{2i\pi}{7}}\right)^7 \times \left(e^{\frac{2i\pi}{7}}\right) = e^{\frac{2i\pi}{7}} = z$$

2) On sait que :

$$\begin{aligned} S &= \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) \\ &= \mathcal{I}m\left(e^{\frac{2i\pi}{7}}\right) + \mathcal{I}m\left(e^{\frac{4i\pi}{7}}\right) + \mathcal{I}m\left(e^{\frac{8i\pi}{7}}\right) \\ &= \mathcal{I}m\left(e^{\frac{2i\pi}{7}} + e^{\frac{4i\pi}{7}} + e^{\frac{8i\pi}{7}}\right) \\ &= \mathcal{I}m(u) \end{aligned}$$

De plus d'après la question 1 on sait que :

$$\begin{cases} u + v = -1 \\ u + 2v = u^2 \end{cases} \Rightarrow u^2 + u + 2 = 0$$

On résout alors $u^2 + u + 2 = 0$. On a $\Delta = 1 - 4 = -3 = (\sqrt{7}i)^2$. On en déduit donc que :

$$u = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2} \text{ ou } u = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$$

On en déduit donc que :

$$|\mathcal{I}m(u)| = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

De plus on sait que :

$$\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{7} + \pi\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)$$

Comme la fonction sinus est croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ on en déduit donc que $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) > \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$.

De plus la fonction sinus est positive sur $[0; \pi]$ on en déduit donc que $\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) > 0$

On en déduit donc que $\mathcal{I}m(u) > 0$.

On en déduit donc que :

$$S = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Remarque : On a démontré par la même occasion que :

$$S = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) = -\frac{1}{2}$$

Exercice G.12 : Montrer que :

$$\sum_{k=0}^4 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{11}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{11}\right) = \frac{1}{2}$$

On sait que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{11}\right) = \sum_{k=0}^4 \operatorname{Re}\left(e^{\frac{i(2k+1)\pi}{11}}\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^4 e^{\frac{i(2k+1)\pi}{11}}\right)$$

De plus on sait que :

$$\sum_{k=0}^4 e^{\frac{i(2k+1)\pi}{11}} = e^{\frac{i\pi}{11}} \left(\sum_{k=0}^4 \left(e^{\frac{2i\pi}{11}} \right)^k \right) = e^{\frac{i\pi}{11}} \frac{\left(e^{\frac{2i\pi}{11}} \right)^5 - 1}{e^{\frac{2i\pi}{11}} - 1} = \frac{e^{\frac{5i\pi}{11}} 2i \sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{2i \sin\left(\frac{\pi}{11}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)} e^{\frac{5i\pi}{11}}$$

On en déduit donc que :

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^4 e^{\frac{i(2k+1)\pi}{11}}\right) = \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right) \cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)} = \frac{1}{2} \times \frac{\sin\left(\frac{10\pi}{11}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)}$$

On a utilisé ici le fait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

On en déduit donc que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{11}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\sin\left(\frac{10\pi}{11}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)} = \frac{1}{2} \times \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{11}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)} = \frac{1}{2} \times \frac{\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)} = \frac{1}{2}$$

On a donc bien démontré que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{11}\right) = \frac{1}{2}$$

Exercice G.13 : Soient $z_1, z_2, \dots, z_n$ les n racines n -ième de a (avec $|a| = 1$). Montrer que les points images de $(1 + z_1)^n, (1 + z_2)^n, \dots, (1 + z_n)^n$ sont alignés.

Cet exercice n'a de sens que si $n \geq 3$ car pour $n=1$ il n'y a qu'un seul point et pour $n=2$ il y a deux points (car $a \neq 0$) et deux points sont toujours alignés !

On sait que :

$$|a| = 1 \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, a = e^{i\theta}$$

On a alors :

$$z^n = a \Leftrightarrow z^n = \left(e^{\frac{i\theta}{n}} \right)^n \Leftrightarrow \left(\frac{z}{e^{\frac{i\theta}{n}}} \right)^n = 1 \Leftrightarrow z = e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{\frac{i\theta}{n}} = e^{\frac{i}{n}(2k\pi + \theta)}, k \in \llbracket 1; n \rrbracket$$

On pose alors :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, z_k = e^{\frac{i}{n}(2k\pi + \theta)}$$

On sait que les points $M_1((1 + z_1)^n), M_2((1 + z_2)^n), \dots, M_n((1 + z_n)^n)$ sont alignés si et seulement si $\forall k \in \llbracket 3; n \rrbracket, (\overrightarrow{M_1 M_k}, \overrightarrow{M_1 M_2}) = \ell\pi, \ell \in \mathbb{Z}$

On en déduit donc que :

Les points $M_1((1 + z_1)^n), M_2((1 + z_2)^n), \dots, M_n((1 + z_n)^n)$ sont alignés si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 3; n \rrbracket, \arg\left(\frac{(1 + z_k)^n - (1 + z_1)^n}{(1 + z_2)^n - (1 + z_1)^n}\right) &= \ell\pi, \ell \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow \frac{(1 + z_k)^n - (1 + z_1)^n}{(1 + z_2)^n - (1 + z_1)^n} &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Or on a :

$$\forall k \in \llbracket 3; n \rrbracket, \frac{(1+z_k)^n - (1+z_1)^n}{(1+z_2)^n - (1+z_1)^n} = \frac{\left(1 + e^{\frac{i}{n}(2k\pi+\theta)}\right)^n - \left(1 + e^{\frac{i}{n}(2\pi+\theta)}\right)^n}{\left(1 + e^{\frac{i}{n}(4\pi+\theta)}\right)^n - \left(1 + e^{\frac{i}{n}(2\pi+\theta)}\right)^n}$$

De plus on sait que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, 1 + e^{i\theta} = e^{\frac{i\theta}{2}} 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 3; n \rrbracket, \frac{(1+z_k)^n - (1+z_1)^n}{(1+z_2)^n - (1+z_1)^n} &= \frac{\left(1 + e^{\frac{i}{n}(2k\pi+\theta)}\right)^n - \left(1 + e^{\frac{i}{n}(2\pi+\theta)}\right)^n}{\left(1 + e^{\frac{i}{n}(4\pi+\theta)}\right)^n - \left(1 + e^{\frac{i}{n}(2\pi+\theta)}\right)^n} \\ &= \frac{\left(e^{\frac{i}{2n}(2k\pi+\theta)} 2 \cos\left(\frac{2k\pi+\theta}{2n}\right)\right)^n - \left(e^{\frac{i}{2n}(2\pi+\theta)} 2 \cos\left(\frac{2\pi+\theta}{2n}\right)\right)^n}{\left(e^{\frac{i}{2n}(4\pi+\theta)} 2 \cos\left(\frac{4\pi+\theta}{2n}\right)\right)^n - \left(e^{\frac{i}{2n}(2\pi+\theta)} 2 \cos\left(\frac{2\pi+\theta}{2n}\right)\right)^n} \\ &= \frac{e^{\frac{i}{2}(2k\pi+\theta)} 2^n \cos^n\left(\frac{2k\pi+\theta}{2n}\right) - e^{\frac{i}{2}(2\pi+\theta)} 2^n \cos^n\left(\frac{2\pi+\theta}{2n}\right)}{e^{\frac{i}{2}(4\pi+\theta)} 2^n \cos^n\left(\frac{4\pi+\theta}{2n}\right) - e^{\frac{i}{2}(2\pi+\theta)} 2^n \cos^n\left(\frac{2\pi+\theta}{2n}\right)} \\ &= \frac{e^{ik\pi} 2^n \cos^n\left(\frac{2k\pi+\theta}{2n}\right) - e^{i\pi} 2^n \cos^n\left(\frac{2\pi+\theta}{2n}\right)}{e^{2i\pi} 2^n \cos^n\left(\frac{4\pi+\theta}{2n}\right) - e^{i\pi} 2^n \cos^n\left(\frac{2\pi+\theta}{2n}\right)} \\ &= \frac{(-1)^k 2^n \cos^n\left(\frac{2k\pi+\theta}{2n}\right) + 2^n \cos^n\left(\frac{2\pi+\theta}{2n}\right)}{2^n \cos^n\left(\frac{4\pi+\theta}{2n}\right) + 2^n \cos^n\left(\frac{2\pi+\theta}{2n}\right)} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On en déduit donc que Les points $M_1((1+z_1)^n), M_2((1+z_2)^n), \dots, M_n((1+z_n)^n)$ sont alignés.

Exercice G.14 : Résoudre l'équation sur $\mathbb{C}$:

$$(x+1)^5 - (x-1)^5 = 0$$

On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{C}, (x+1)^5 - (x-1)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} x^k - \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (-1)^{5-k} x^k = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (1 - (-1)^{5-k}) x^k$$

Or on sait que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, (-1)^{5-k} = \frac{(-1)^5}{(-1)^k} = -\frac{1}{(-1)^k} = -(-1)^k$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{C}, (x+1)^5 - (x-1)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (1 + (-1)^k) x^k = 2 + 2 \binom{5}{2} x^2 + \binom{5}{4} x^4 = 2 + 20x^2 + 10x^4$$

On en déduit donc que :

$$(x+1)^5 - (x-1)^5 = 0 \Leftrightarrow 5x^4 + 10x^2 + 1 = 0$$

On résout :

$$\begin{aligned} 5X^4 + 10X^2 + 1 &= 0 \\ \Delta &= 100 - 4 \times 5 \times 1 = 80 \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$5X^4 + 10X^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{-10 - \sqrt{80}}{10} = -1 - 0,4\sqrt{5} \\ \text{ou} \\ X = -1 + 0,4\sqrt{5} \end{cases}$$

On a donc :

$$(x+1)^5 - (x-1)^5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -1 + 0,4\sqrt{5} < 0 \\ \text{ou} \\ x^2 = -1 - 0,4\sqrt{5} < 0 \end{cases}$$

Comme on nous demande les solutions complexes, on va trouver quatre solutions distinctes.

On résout sur $\mathbb{C}$, $x^2 = -1 + 0,4\sqrt{5}$

On a :

$$x^2 = -1 + 0,4\sqrt{5} \Leftrightarrow x = i\sqrt{1 - 0,4\sqrt{5}} \text{ ou } x = -i\sqrt{1 - 0,4\sqrt{5}}$$

De même on a :

$$x^2 = -1 - 0,4\sqrt{5} \Leftrightarrow x = i\sqrt{1 + 0,4\sqrt{5}} \text{ ou } x = -i\sqrt{1 + 0,4\sqrt{5}}$$

On en déduit donc que :

$$(x+1)^5 - (x-1)^5 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ i\sqrt{1 - 0,4\sqrt{5}}, -i\sqrt{1 - 0,4\sqrt{5}}, i\sqrt{1 + 0,4\sqrt{5}}, -i\sqrt{1 + 0,4\sqrt{5}} \right\}$$