DM n°3
PCSI 2025-2026

Exercice 1 : Un peu de complexes

On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ z \mapsto \dfrac{\mathcal{I}m(z^5)}{\mathcal{I}m(z)^5} \end{cases}$$

1) Déterminer l'image de $1 + \mathrm{i}$.
2) a) Résoudre l'équation $sin(\theta) = 0$.
b) En déduire l'ensemble $f^{-1}(\{0\})$.
c) Montrer que f n'est pas injective.
3) On va montrer dans cette question que f n'est pas surjective.
   a) Rappeler la formule du binôme de Newton.
   b) On pose $z = x + iy, (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $f(z) = Q\left(\frac{x}{y}\right)$.
   c) Etudier la fonction suivante sur $\mathbb{R}$ $x \mapsto 5x^4 - 10x^2 + 1$.
   d) En déduire la valeur de :

$$m = \min_{z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}} \frac{\mathcal{I}m(z^5)}{\mathcal{I}m(z)^5} = min\left(\frac{\mathcal{I}m(z^5)}{\mathcal{I}m(z)^5}, z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\right)$$

   e) Déterminer $f^{-1}(\{m\})$.
   f) Montrer que f n'est pas surjective.

Exercice 2 : Une bijection sur un sous-ensemble de $\mathbb{C}$

Dans tout cet exercice on pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{C}\backslash\{-i\} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \dfrac{z - i}{iz - 1} \end{cases}$$

1) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{C}\backslash\{\mathrm{i}\}$ dans un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ à déterminer, puis déterminer une expression de $f^{-1}(z)$.
2) Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C} \; tel \; que \; f(z) \in \mathbb{R}\}$.
3) Démontrer que l'équation $f(z) = z$ admet deux solutions distinctes.
4) Dans cette question on souhaite montrer que :

$$f^{-1}(\mathbb{U}\backslash\{-i\}) = \mathbb{R}$$

   a) Montrer que :

$$\forall\theta \in \mathbb{R}, 1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = -2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{2}}$$

   b) En déduire que :

$$\forall\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[, f(z) = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = \frac{-\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = -cotan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

   c) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists!\, \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[\; tel \; que \; x = \frac{-\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

   d) Conclure.
5) a) Soit $\mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{n} \geq 2$. Rappeler les solutions de $\mathrm{z}^{\mathrm{n}} = 1$.
   b) Résoudre l'équation $\left(f(z)\right)^n = 1$.

Problème : Approximation de $\sqrt{2}$

Suite à une discussion en cours, Léa nous avait dit que nous pouvions calculer la valeur approchée d'un nombre réel en utilisant la dichotomie. Ici nous allons voir une autre technique pour calculer une valeur approchée, avec des tangentes. Cette méthode est appelée la méthode de **Newton-Raphson**.

I) Présentation du procédé

a) TVI

On pose la fonction définie sur $[1;2]$ par $f(x) = x^2 - 2$:

$$f : \begin{cases} [1;2] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 - 2 \end{cases}$$

1) Etudier les variations de f sur $[1;3]$ et en déduire l'existence d'un unique $\alpha \in [1;2]$ tel que $f(\alpha) = 0$:

$$\exists!\, \alpha \in [1;2], f(\alpha) = 0$$

On écrit alors $\alpha = \sqrt{2}$, mais si l'on utilise un symbole pour ce nombre, nous ne pouvons qu'en donner une valeur approchée, car, nous le verrons plus tard, il est irrationnel.

b) Le procédé

Début du procédé : On pose $\mathrm{u}_0 = 2$, $A_0(u_0; f(u_0))$ le point de la courbe d'abscisse u_0 et $(\mathrm{T}_{\mathrm{u}_0})$ la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x = u_0$.

De plus on pose u_1 l'abscisse de l'intersection entre $(\mathrm{T}_{\mathrm{u}_0})$et l'axe des abscisses.

De même on pose $A_1(u_1; f(u_1))$ le point de la courbe d'abscisse u_1 et $(\mathrm{T}_{\mathrm{u}_1})$ la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $\mathrm{x} = \mathrm{u}_1$ et u_2 l'abscisse de l'intersection entre $(\mathrm{T}_{\mathrm{u}_1})$et l'axe des abscisses. Construire u_2 sur votre figure puis déterminer sa valeur.

On construit ainsi de proche en proche une suite (u_n) intersection de la tangente au point d'abscisse $(\mathrm{T}_{\mathrm{u}_{n-1}})$ et de l'axe des abscisses :

$$\begin{cases} \mathrm{u}_0 = 1 \\ (\mathrm{u}_{n+1}, 0) = (\mathrm{T}_{\mathrm{u}_n}) \cap (0_x) \end{cases}$$

2) Tracer sur votre copie $\mathcal{C}_f$ puis (T_{u_0}) et (T_{u_1}).

3) Démontrer que la suite (u_n) est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right) \end{cases}$$

4) Montrer par récurrence que : $\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \sqrt{2} < u_{n+1} < u_n$. En déduire la convergence de la suite (u_n).

5) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2$$

6) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{2^n - 1}}$$

7) Déterminer la limite de la suite (u_n).

8) Combien de termes de la suite faut-il calculer pour avoir une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-100} près.

9) Ecrire un programme Python qui permet d'obtenir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-n} où n est choisi par l'utilisateur.

10) Si nous avions fait une dichotomie, en partant au départ avec un intervalle de longueur 1 $(1 < \sqrt{2} < 2)$, déterminer le nombre d'étapes nécessaire pour avoir une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-100}.