

Programme de Colle n°6
PCSI 2025-2026
(3 novembre au 7 novembre)

Nombres complexes

L'objectif de cette section, que l'on illustrera par de nombreuses figures, est de donner une solide pratique des nombres complexes, à travers les aspects suivants :

- l'étude algébrique de l'ensemble $\mathbb{C}$ et la notion d'équation algébrique;
- l'interprétation géométrique des nombres complexes et l'utilisation des nombres complexes en géométrie plane;
- l'exponentielle complexe et ses applications à la trigonométrie.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Nombres complexes

Parties réelle et imaginaire.

La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme.

Opérations sur les nombres complexes.

Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^n x^k$, de la factorisation

de $a^n - b^n$, de la formule du binôme.

Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.

On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère ortho-normé direct (« plan complexe »).

b) Conjugaison et module

Conjugaison, compatibilité avec les opérations.

Image du conjugué dans le plan complexe.

Module.

Interprétation géométrique de $|z - z'|$, cercles et disques.

Relation $|z|^2 = z\bar{z}$, module d'un produit, d'un quotient.

Inégalité triangulaire, cas d'égalité.

c) Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Définition de e^{it} pour $t \in \mathbb{R}$.

Notation $\mathbb{U}$.

Exponentielle d'une somme.

Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm e^{it}$, de $e^{ip} \pm e^{iq}$.

Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q)$, $\sin(p) \pm \sin(q)$.

Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^n \sin(kt)$.

Formule de Moivre.

Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.

d) Forme trigonométrique

Forme trigonométrique $re^{i\theta}$ ($r > 0$) d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient.

Transformation de $a \cos t + b \sin t$ en $A \cos(t - \varphi)$.

e) Équations algébriques

Pour P fonction polynomiale à coefficients complexes admettant a pour racine, factorisation de $P(z)$ par $z - a$.

Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$.

Somme et produit des racines.

Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.

f) Racines n -ièmes

Description des racines n -ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique.

Notation $\mathbb{U}_n$.

Représentation géométrique.

g) Exponentielle complexe

Définition de e^z pour z complexe : $e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i \operatorname{Im}(z)}$.

Notations $\exp(z)$, e^z . Module et arguments de e^z .

Exponentielle d'une somme.

Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

h) Interprétation géométrique des nombres complexes

Interprétation géométrique des module et arguments de $\frac{c-a}{b-a}$.

Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité.

Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az$ et $z \mapsto z + b$ pour $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

Il s'agit d'introduire certaines transformations du plan : translations, homothéties, rotations.

Interprétation géométrique de la conjugaison.

L'étude générale des similitudes est hors programme.

Questions de cours :

Propriété I.d.2 (Inégalité triangulaire avec cas d'égalité à la fin de la démonstration) :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Application II.d.4 : Simplifier : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(\theta) = 1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \dots + \cos(n\theta) = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$$

$$W_n(\theta) = \sin(\theta) + \sin(2\theta) + \dots + \sin(n\theta) = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$$

Application II.e.3 : Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \sin^n(x)$ ou $\cos^n(x)$ en linéarisant.

Propriété I.b.1 : On a :

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow z \in \left\{ \frac{-b - \delta}{2a}; \frac{-b + \delta}{2a}, \text{ avec } \delta^2 = b^2 - 4ac \right\}$$

Propriété I.b.3 (Relation coefficient racine) : Soit $(a; b; c) \in \mathbb{C}^3, a \neq 0$. On a alors :

$$z_1, z_2 \text{ sont les solutions de } az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 z_2 = \frac{c}{a} \\ z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

Exercices du type :

Forme algébrique de :

$$z = \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right)^{2025}$$

Application II.c.9 : Déterminer l'ensemble des nombres complexes tel que :

$$\frac{z-1}{z+2i} \in \mathbb{R}, i\mathbb{R}$$

Application II.e.6 : Application Linéarisation de $\cos^n(x)$ et $\sin^n(x)$ avec la formule d'Euler ou de Moivre.

Exercice G.5 (chap 6) : On pose l'équation (E) :

$$(E): 2z^3 - (3 + 4i)z^2 - (4 - 7i)z + 4 + 2i = 0$$

1) Montrer que (E) admet une solution réel.

2) En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice E.6 : Soient $A(2; -3)$, $B(5; -1)$ et $C(1 + 2\sqrt{3}; 2 - 3\sqrt{3})$. Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

Exercice E.3 : Pour quelles valeurs de n , le nombre complexe :

$$\left(\frac{(1 - i\sqrt{3})^5}{(1 - i)^3} \right)^n$$

Est-il un réel positif ?