Correction DS n°3, 2024-2025

Exercice 1 : Une nouvelle valeur de tangente

Dans tout cet exercice on pose :

$$P:\begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \dfrac{1}{2i}\left((z+i)^5 - (z-i)^5\right) \end{cases}$$

1) Rappeler la formule du binôme de Newton.

2) a) Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{R}, P(z) \in \mathbb{R}$$

b) Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(-z) = P(z)$$

3) Montrer que :

$$\exists (p_0, p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^5 \; tel\; que\; \forall z \in \mathbb{C}, P(z) = p_4 z^4 + p_3 z^3 + p_2 z^2 + p_1 z + p_0$$

On donnera les valeurs des p_i pour $i \in [\![0;4]\!]$.

4) Résoudre $P(z) = 0$.

(On pourra remarquer que : $\sqrt{80} = 4\sqrt{5}$).

5) a) Donner les 5 solutions de : $z^5 = 1$.

b) En déduire que :

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{5}\right)}, k \in [\![1;4]\!]$$

6) En déduire que :

$$\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$$

1) On a :

$$\boldsymbol{\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}}$$

2) a) **Méthode 1 (Par le calcul) :**

On a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \overline{P(z)} = \overline{\left(\frac{1}{2i}\left((z+i)^5 - (X-i)^5\right)\right)} = \overline{\left(\frac{1}{2i}\right)}\,\overline{\left((z+i)^5 - (z-i)^5\right)}$$

$$= -\frac{1}{2i}\left(\overline{(z+i)^5} - \overline{(z-i)^5}\right) = -\frac{1}{2i}\left((\bar{z}-i)^5 - (\bar{z}+i)^5\right)$$

On a donc :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \bar{z} = z \Longrightarrow \overline{P(z)} = -\frac{1}{2i}\left((z-i)^5 - (z+i)^5\right) = \frac{1}{2i}\left((z+i)^5 - (z-i)^5\right) = P(z)$$

On a donc bien :

$$\boldsymbol{\forall z \in \mathbb{R}, P(z) \in \mathbb{R}}$$

Méthode 2 (Par astuce) :

On a :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \bar{z} = z \Longrightarrow \forall z \in \mathbb{R}, (z-i) = \overline{(z+i)}$$

$$\Longrightarrow (z-i)^5 = \left[\overline{(z+i)}\right]^5 = \overline{(z+i)^5}$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\forall z \in \mathbb{R}, P(z) = \frac{1}{2i}\left((z+i)^5 - \overline{(z+i)^5}\right) = Im\left((z+i)^5\right) \in \mathbb{R}}$$

b) On a :

$$\boldsymbol{\forall z \in \mathbb{C}, P(-z) = \frac{1}{2i}\left((-z+i)^5 - (-z-i)^5\right) = \frac{(-1)^5}{2i}\left((z-i)^5 - (z+i)^5\right) = \frac{1}{2i}\left((z+i)^5 - (z-i)^5\right) = P(z)}$$

3) On a :

$$(z+i)^5 = z^5 + 5iz^4 - 10z^3 - 10z^2 i + 5z + i$$

$$\Longrightarrow (z-i)^5 = z^5 - 5iz^4 - 10z^3 + 10z^2 i + 5z - i$$

On en déduit donc que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, (z+i)^5 - (z-i)^5 = 10iz^4 - 20iz^2 + 2i$$
$$\Longrightarrow \forall z \in \mathbb{C}, P(z) = 5z^4 - 10z^2 + 1$$

On a donc :

$$\begin{cases} \boldsymbol{p_4 = 5} \\ \boldsymbol{p_3 = 0} \\ \boldsymbol{p_2 = -10} \\ \boldsymbol{p_1 = 0} \\ \boldsymbol{p_0 = 1} \end{cases}$$

---

4) On a :

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow 5z^4 - 10z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 5(z^2)^2 - 10(z^2) + 1 = 0$$

On calcule :

$$\Delta = 100 - 20 = 80$$

On en déduit donc que :

$$5z^4 - 10z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = \dfrac{10-\sqrt{80}}{10} = 1 - \dfrac{2}{5}\sqrt{5} = \dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}} > 0 \\ ou \\ z^2 = \dfrac{10+\sqrt{80}}{10} = 1 + \dfrac{2}{5}\sqrt{5} = \dfrac{\sqrt{5}+2}{2} \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{P(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \left\{-\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}; \sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}; -\sqrt{1+\frac{2}{5}\sqrt{5}}; \sqrt{1+\frac{2}{5}\sqrt{5}}\right\}}$$

---

5) a) On a :

$$z^5 = 1 \Leftrightarrow z = e^{\frac{2ik\pi}{5}}, k \in [\![0;4]\!]$$

b) On a :

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2i}\left((z+i)^5 - (z-i)^5\right) = 0 \Leftrightarrow (z+i)^5 = (z-i)^5$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^5 = 1 \\ z \neq i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{z+i}{z-i} = e^{\frac{2ik\pi}{5}}, k \in [\![0;4]\!] \\ z \neq i \end{cases}$$

On a pour $k = 0$:

$$\frac{z+i}{z-i} = 1 \Leftrightarrow z \in \emptyset$$

De plus on a :

$$\boldsymbol{\forall k \in [\![1;4]\!], \frac{z+i}{z-i} = e^{\frac{2ik\pi}{5}} \Leftrightarrow z = i\frac{1+e^{\frac{2ik\pi}{5}}}{1-e^{\frac{2ik\pi}{5}}} = \frac{ie^{\frac{ik\pi}{5}} 2\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)}{e^{\frac{ik\pi}{5}}\left(-2i\sin(\frac{k\pi}{5}\right)} = -\frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{5}\right)}, 1 \leq k \leq 4}$$

---

6) D'après les questions 4) et 5) b), on en déduit donc que :

$$\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \begin{cases} -\sqrt{1-\dfrac{2}{5}\sqrt{5}} \\ ou \\ \sqrt{1-\dfrac{2}{5}\sqrt{5}} \\ ou \\ -\sqrt{1+\dfrac{2}{5}\sqrt{5}} \\ ou \\ \sqrt{1+\dfrac{2}{5}\sqrt{5}} \end{cases}$$

De plus on sait que :

$$\frac{\pi}{5} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$$

On en déduit donc que :

$$\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0$$

On a donc :

$$\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{2}{5}\sqrt{5}} \\ ou \\ \sqrt{1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}} \end{cases}$$

De plus tan est croissante sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ on a donc :

$$0 < \frac{\pi}{5} < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow 0 < \tan\left(\frac{\pi}{5}\right) < \tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

On en déduit donc que :

$$\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}$$

Or on a :

$$\frac{1}{5 + 2\sqrt{5}} = \frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}$$

Exercice 2 : Résolution d'une équation de degré 3

On considère l'équation :

$$(E): z^3 + (2 + 3i)z^2 + 8iz - 8 + 4i = 0$$

1) Montrer que l'équation (E) possède une solution imaginaire pure, notée z_0.
2) Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, z^3 + (2 + 3i)z^2 + 8iz - 8 + 4i = (z + 2i)(ax^2 + bz + c)$$

3) Déterminer les racines carrées de $\delta = -5 - 12i$
4) En déduire les solutions de (E).

1) On pose :

$$z = ia, a \in \mathbb{R}$$

On a :

$$z^3 + (2 + 3i)z^2 + 8iz - 8 + 4i = (ia)^3 + (2 + 3i)(ia)^2 + 8i(ia) - 8 + 4i$$
$$= -ia^3 - (2 + 3i)a^2 - 8a - 8 + 4i = (-2a^2 - 8a - 8) + i(-a^3 - 3a^2 + 4)$$

Ainsi (E) admet une solution imaginaire pure si et seulement si :

$$\begin{cases} -2a^2 - 8a - 8 = 0 \\ -a^3 - 3a^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

On a :

$$-2a^2 - 8a - 8 = 0 \Leftrightarrow a^2 + 4a + 4 = 0 \Leftrightarrow a = -2$$

On vérifie dans la deuxième équation :

$$-(-2)^3 - 3(-2)^2 + 4 = 8 - 12 + 4 = 0$$

Ainsi $\boldsymbol{z_0 = -2i}$ est une solution (imaginaire pure) de (E).

2) On a :

$$\boldsymbol{z^3 + (2 + 3i)z^2 + 8iz - 8 + 4i = (z + 2i)\left(z^2 + (2 + i)z + 2 + 4i\right)}$$

3) et 4) On résout :

$$z^2 + (2+i)z + 2 + 4i = 0$$

On a :

$$\Delta = (2+i)^2 - 4(2+4i) = -5 - 12i$$

On cherche $\delta \in \mathbb{C}, tel\ que\ \delta^2 = -5 - 12i$

On peut le faire classiquement en posant $\delta = x + iy$ ou bien en remarquant que :

$$-5 - 12i = -5 - 2 \times 2 \times 3i = 4 - 9 - 2 \times 2 \times 3i = (2-3i)^2$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\delta^2 = -5 - 12i \Leftrightarrow \delta = 2 - 3i\ ou\ \delta - 2 + 3i}$$

On en déduit donc que :

$$z^2 + (2+i)z + 2 + 4i = 0 \Leftrightarrow z \in \{-2+i\,; -2i\}$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{z^3 + (2+3i)z^2 + 8iz - 8 + 4i = 0 \Leftrightarrow z \in \{-2i\,;\ -2+i\}}$$

Remarque : On en déduit une factorisation sur $\mathbb{C}$:

$$\forall z \in \mathbb{C}, z^3 + (2+3i)z^2 + 8iz - 8 + 4i = (z+2i)^2(z+2-i)$$

Exercice 3 : Complexes et ensemble

Dans tout cet exercice on pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{C}\backslash\{1\} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \dfrac{\bar{z}+1}{z-1} \end{cases}$$

On pose ici :

$$i\mathbb{R} = \{iy, y \in \mathbb{R}\} = \{imaginaires\ purs\}$$

1) Déterminer $f^{-1}(\{1\})$.
2) Déterminer $f(i\mathbb{R})$.
3) Déterminer si f est injective, surjective sur $\mathbb{C}$.
4) Montrer que :

$$f^{-1}(\mathbb{U}) = f^{-1}(\{-1\}) = i\mathbb{R}$$

1) On cherche les antécédents de 1 par f.
On résout :

$$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{\bar{z}+1}{z-1} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{z}+1 = z-1 \\ z \neq 1 \end{cases}$$

Or on a :

$$\bar{z} + 1 = z - 1 \Leftrightarrow \bar{z} - z = -2 \Leftrightarrow 2i\mathfrak{Im}(z) = -2 \Leftrightarrow z \in \emptyset$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{f^{-1}(\{1\}) = \emptyset}$$

---

2) On pose $z = iy, y \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$f(iy) = \frac{-iy+1}{iy-1} = -1$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{f(i\mathbb{R}) = \{-1\}}$$

---

3) On a :

$$\boldsymbol{f(i) = f(0) = -1 \Rightarrow f\ n'est\ pas\ injective}$$

On a :

$$f(z) = 1 \Leftrightarrow z \in \emptyset$$

Ainsi 1 n'a pas d'antécédent par f, donc f n'est pas surjective.

---

4) On peut le faire de deux façons.

Méthode 1 : Avec la forme algébrique

On cherche : $\{z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}\ tel\ que\ |f(z)| = 1\}$. On a :

$$|f(z)| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{\bar{z}+1}{z-1}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z+1|}{|z-1|} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |\bar{z}+1| = |z-1| \\ z \neq 1 \end{cases}$$

On pose $z = x + iy, (x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$|\bar{z}+1| = |z-1| \Leftrightarrow |\bar{z}+1|^2 = |z-1|^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = (x-1)^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

On en déduit donc que :

$$|f(z)| = 1 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$$

On en déduit donc que :

$$f^{-1}(\mathbb{U}) = i\mathbb{R}$$

De plus on sait que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, f(iy) = -1$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{f^{-1}(\mathbb{U}) = f^{-1}(\{-1\}) = i\mathbb{R}}$$

Méthode 2 : Avec la forme exponentielle

On sait que :

$$f(z) \in \mathbb{U} \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}\ tel\ que\ f(z) = e^{i\theta}$$

1er cas : $z = 0$

On a :

$$f(0) = -1 \in \mathbb{U}$$

Ainsi $0 \in f^{-1}(\mathbb{U})$

2ième cas : $z \neq 0$

On pose :

$$z = re^{i\theta'}, r > 0\ et\ \theta' \in \mathbb{R}, (r;\theta') \neq (1; 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

On a :

$$f(z) = f\left(re^{i\theta'}\right) = \frac{re^{-i\theta'}+1}{re^{i\theta'}-1} = e^{i\theta} \Leftrightarrow re^{-i\theta'} + 1 = re^{i(\theta+\theta')} - e^{i\theta}$$
$$\Leftrightarrow r\left(e^{i(\theta+\theta')} - e^{-i\theta'}\right) = \left(1 + e^{i\theta}\right)$$

On sait que :

$$1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}}$$

De même on a :

$$\begin{cases} \theta + \theta' = \dfrac{\theta}{2} + \dfrac{2\theta' + \theta}{2} \\ -\theta' = \dfrac{\theta}{2} - \dfrac{2\theta' + \theta}{2} \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$e^{i(\theta+\theta')} - e^{-i\theta'} = e^{\frac{\theta}{2}i}\left(2i\sin\left(\frac{2\theta'+\theta}{2}\right)\right)$$

On en déduit donc que :

$$f(z) = e^{i\theta} \Leftrightarrow r \times i \times \sin\left(\frac{2\theta'+\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

1er cas : $\sin\left(\frac{2\theta'+\theta}{2}\right) \neq 0$

On a alors :

$$f(z) = e^{i\theta} \Leftrightarrow r = -i\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{2\theta'+\theta}{2}\right)} \Leftrightarrow r \in \emptyset$$

Ainsi on n'a aucune solution.

2ième cas : $\sin\left(\frac{2\theta'+\theta}{2}\right) = 0$

On en déduit donc que :

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \theta = \pi + 2k\pi$$

Ainsi seul -1 est le seul nombre complexe de $\mathbb{U}$ qui peut être potentiellement atteint !

On a :

$$f(i) = -1$$

Ainsi $f^{-1}(\mathbb{U}\backslash\{1\}) = f^{-1}(\{-1\}) = i\mathbb{R}$ (démontré précédemment pour la dernière égalité !).

Exercice 4 : Calcul d'une intégrale

Le but de cet exercice est de calculer :

$$I = \int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+1)^2}\, dx$$

1) Démontrer que :

$$I = \frac{1}{4} + \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2}\, dx$$

2) En posant le changement de variable $x = \tan(\theta)$, démontrer que :

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(\theta)\, d\theta$$

3) En déduire la valeur de I.

1) On a :

$$\frac{x+1}{(x^2+1)^2} = \mathbf{\frac{1}{2}} \times \frac{\mathbf{2}x}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

Ainsi on peut séparer l'intégrale en deux car c'est linéaire (tout comme la dérivation !) :

$$I = \int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+1)^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^2}\, dx + \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2}\, dx$$

De plus on sait que :

$$\int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x^2+1}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{I = \frac{1}{4} + \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2}\, dx}$$

---

2) On pose :

$$x = \tan(\theta)$$

a) Les bornes

$$\begin{cases} x = 0 \Leftarrow \theta = 0 \\ x = 1 \Leftarrow \theta = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

b) Le dx

On sait que :

$$x = \tan(\theta) \Longrightarrow dx = (1 + \tan^2(\theta))d\theta$$

c) On remplace :

$$\boldsymbol{\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(\tan(\theta)^2+1)^2} \times \left(1+\tan^2(\theta)\right)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2(\theta)}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(\theta)\, d\theta}$$

---

3) On a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(\theta)\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2\theta)+1}{2}\, d\theta = \left[\frac{\frac{1}{2}\sin(2\theta) + \theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{I = \int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+1)^2}\, dx = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}}$$

Problème 1 : Calcul d'une somme à l'aide d'une intégrale

Dans cet exercice on cherche à calculer :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\binom{2k}{k}(4k+2)}$$

Partie A : Calcul intermédiaire

1) A l'aide d'un changement de variable, démontrer que :

$$\forall(p,q)\in\mathbb{N}^2, I(p,q)=I(q,p)$$

2) A l'aide d'une intégration par partie démontrer que :

$$\forall(p,q)\in\mathbb{N}^2, p\geq 1, \mathrm{I}(p,q)=\frac{p}{q+1}\mathrm{I}(p-1,q+1)$$

3) En réitérant le procédé, en déduire que :

$$\forall(p,q)\in\mathbb{N}^2, \mathrm{I}(p,q)=\frac{1}{\binom{p+q}{p}(p+q+1)}$$

4) A l'aide du changement de variable $x=\sin^2(t)$, démontrer que :

$$\forall(p,q)\in\mathbb{N}^2, \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p+1}(t)\cos^{2q+1}(t)\,dt=\frac{1}{2\binom{p+q}{p}(p+q+1)}$$

Partie B : La limite

On pose :

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}(t)\cos^{2n+1}(t)\,dt$$

1) a) Démontrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n}u_k=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(t)\cos(t)}{1-(\sin(t)\cos(t))^2}dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{g_n(t)}{1-(\sin(t)\cos(t))^2}dt$$

Où g_n est une fonction à déterminer.

b) Démontrer que :

$$\forall t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right], \sin(t)\cos(t)\leq\frac{1}{2}$$

c) Démontrer que :

$$0\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{g_n(t)}{1-(\sin(t)\cos(t))^2}dt\leq\frac{1}{2^n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1-(\sin(t)\cos(t))^2}dt$$

3) On cherche à calculer :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(t)\cos(t)}{1-(\sin(t)\cos(t))^2}dt$$

a) A l'aide du changement de variable $u=\cos(2t)$, démontrer que :

$$\mathrm{I}=\int_{-1}^{1}\frac{du}{3+u^2}$$

b) En déduire la valeur de :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\binom{2n}{n}(4n+2)}$$

Partie A : Une intégrale à paramètres

Il suffit de poser $t=1-x$.

2) On sait que :

$$\forall (p,q)\in\mathbb{N}^2, p\geq 1, I(p,q)=\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx=\underbrace{\left[-x^p\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1}\right]_0^1}_{=0}+\frac{p}{q+1}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q+1}dx$$

$$=\boldsymbol{\frac{p}{q+1}I(p-1,q+1)}$$

3) On peut faire cette question de deux façons.

Méthode 1 : On réitère le procédé de calcul

On sait que :

$$\forall (p,q)\in\mathbb{N}^2, p\geq 1, I(p,q)=\frac{p}{q+1}I(p-1,q+1)=\frac{p}{q+1}\times\frac{p-1}{q+2}I(p-2,q+2)$$

$$=\frac{p!}{(q+p)\times\ldots\times(q+1)}I(0;p+q)=\frac{p!\,q!}{(q+p)!}\int_0^1(1-x)^{q+p}dx$$

$$=\frac{p!\,q!}{(q+p)!}\left[-\frac{(1-x)^{p+q+1}}{p+q+1}\right]_0^1=\frac{1}{\frac{(q+p)!}{p!\,(p+q-p)!}}\times\frac{1}{p+q+1}=\boldsymbol{\frac{1}{\binom{p+q}{p}}\times\frac{1}{p+q+1}}$$

Méthode 2 : Par récurrence

On pose :

$$\forall p\in\mathbb{N}, \mathcal{P}_p=\text{" }\forall q\in\mathbb{N}, I(p,q)=\frac{1}{\binom{p+q}{p}}\times\frac{1}{p+q+1}\text{"}$$

Initialisation :

$$I(0,q)=\int_0^1(1-x)^q dx=\left[-\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1}\right]_0^1=\frac{1}{q+1}$$

De même on a :

$$\frac{1}{\binom{0+q}{0}}\times\frac{1}{0+q+1}=\frac{1}{q+1}$$

Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit p un entier naturel fixé. On suppose vrai $\mathcal{P}_p$. On a alors d'après la question 2) :

$$I(p+1,q)=\frac{p+1}{q+1}I(p,q+1)=\frac{p+1}{q+1}\times\frac{1}{\binom{p+q+1}{p}}\times\frac{1}{p+q+2}$$

$$=\frac{(p+1)\times p!\times(q+1)!}{(q+1)\times(p+q+1)!}\times\frac{1}{p+q+2}==\frac{(p+1)!\,q!}{(p+1+q)!}\times\frac{1}{p+q+2}=\frac{1}{\binom{p+q+1}{p+1}}\times\frac{1}{p+q+2}$$

Donc $\mathcal{P}_p$ est héréditaire.

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.

4) On pose le changement de variable $x=\sin^2(t)$

a) On change les bornes

$$t=0\Longrightarrow x=0$$
$$t=\frac{\pi}{2}\Longrightarrow x=1$$

b) On calcule le dx

On sait que $x: t\mapsto \sin^2(t)\in\mathcal{C}^1\left(\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right)$ et :

$$\frac{dx}{dt}=2\sin(t)\cos(t)\Longrightarrow dx=2\cos(t)\sin(t)\,dt$$

c) On remplace :

$$\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2(t))^p(1-\sin^2(t))^q\,2\cos(t)\sin(t)\,dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}(t)\cos^{2q+1}(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\binom{p+q}{p}} \times \frac{1}{p+q+1}$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}(t)\cos^{2q+1}(t)\,dt = \frac{1}{2\binom{p+q}{p}} \times \frac{1}{p+q+1}$$

Partie B : La limite

1) On sait que :

$$\forall t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], \sin(t)\cos(t) = \frac{1}{2}\sin(2t) \leq \frac{1}{2}$$

2) a) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1}(t)\cos^{2k+1}(t)\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\sin(t)\sum_{k=0}^{n}(\sin^2(t)\cos^2(t))^k\,dt$$

Or on sait que :

$$\forall t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], \sin(t)\cos(t) \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow \forall t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], \sin^2(t)\cos^2(t) \neq 1$$

On en déduit donc que :

$$\forall t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], \sum_{k=0}^{n}(\sin^2(t)\cos^2(t))^k = \frac{1-(\sin^2(t)\cos^2(t))^{n+1}}{1-\sin^2(t)\cos^2(t)}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\sin(t)\left(\frac{1-(\sin^2(t)\cos^2(t))^{n+1}}{1-\sin^2(t)\cos^2(t)}\right)dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)\cos(t)}{1-(\sin(t)\cos(t))^2}\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)\sin(t)\,(\sin^2(t)\cos^2(t))^{n+1}}{1-(\sin(t)\cos(t))^2}\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)\cos(t)}{1-(\sin(t)\cos(t))^2}\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{g_n(t)}{1-(\sin(t)\cos(t))^2}\,dt$$

Avec g_n définie par :

$$g_n : \begin{cases} \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \cos(t)\sin(t)\left(\sin^2(t)\cos^2(t)\right)^{n+1} \end{cases}$$

b) On sait que :

$$\forall t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], 0 \leq \frac{g_n(t)}{1-(\sin(t)\cos(t))^2} \leq \frac{g_n(t)}{1-\frac{1}{4}} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{2n+1} \times \frac{1}{3}$$

On en déduit donc que :

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{g_n(t)}{1-(\sin(t)\cos(t))^2}\,dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n+1} \times \frac{1}{3}\,dt$$

De plus on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n+1} \times \frac{1}{3}\mathrm{dt} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n+1} \times \frac{\pi}{6}$$

Or on sait que :

$$\lim_n \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \text{ car } \frac{1}{4} \in]-1;1[$$

On en déduit donc d'après le théorème des gendarmes que :

$$\lim_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{g_n(t)}{1-(\sin(t)\cos(t))^2}\mathrm{dt} = 0$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\lim_n \sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)\cos(t)}{1-(\sin(t)\cos(t))^2}\mathrm{dt}}$$

3) a) On pose $u = cos(2t)$

a) Calcul des bornes

$$t = 0 \Longrightarrow u = 1$$
$$t = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow u = -1$$

b) On sait que $u: t \mapsto \cos(2t)$ est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et :

$$\frac{du}{dt} = -2\sin(2t) \Longrightarrow du = -2\sin(2t)\,dt = -4\sin(t)\cos(t)\,dt$$
$$\Longrightarrow \sin(t)\cos(t)\,dt = -\frac{1}{4} \times -4\sin(t)\cos(t)\,dt = -\frac{1}{4}du$$

c) On remplace :

On sait que :

$$\forall t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos(2t)$$
$$\Longrightarrow 1 - 2\sin^2(t) = \cos(2t)$$
$$\Longrightarrow \sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$$

De même on a :

$$2\cos^2(t) - 1 = \cos(2t) \Longrightarrow \cos^2(t) = \frac{\cos(2t)+1}{2}$$

On en déduit donc que :

$$\forall t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], 1-(\sin(t)\cos(t))^2 = 1 - \left(\frac{1-\cos(2t)}{2}\right)\left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}(4 - 1 + \cos^2(2t))$$
$$= \frac{1}{4}(3+u^2)$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)\cos(t)}{1-(\sin(t)\cos(t))^2}\mathrm{dt} = 4\int_1^{-1} \frac{-\frac{1}{4}du}{3+u^2} = \int_{-1}^{1} \frac{du}{3+u^2}}$$

b) On sait par parité que :

$$\int_{-1}^{1} \frac{du}{3+u^2} = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{du}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

De plus on sait que :

$$\int_0^1 \frac{du}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{3}\int_0^1 \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}du}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{3}\left[\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)\cos(t)}{1-(\sin(t)\cos(t))^2}dt = \int_{-1}^{1} \frac{du}{3+u^2} = \frac{\sqrt{3}\pi}{9} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

De plus on sait d'après la question 3 de la partie A que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}(t)\cos^{2q+1}(t)\,dt = \frac{1}{2\binom{p+q}{p}(p+q+1)}$$

On en déduit donc que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1}(t)\cos^{2k+1}(t)\,dt = \frac{1}{2\binom{2k}{k}(2k+1)}$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{2k}{k}(4k+2)} = \lim_n \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$