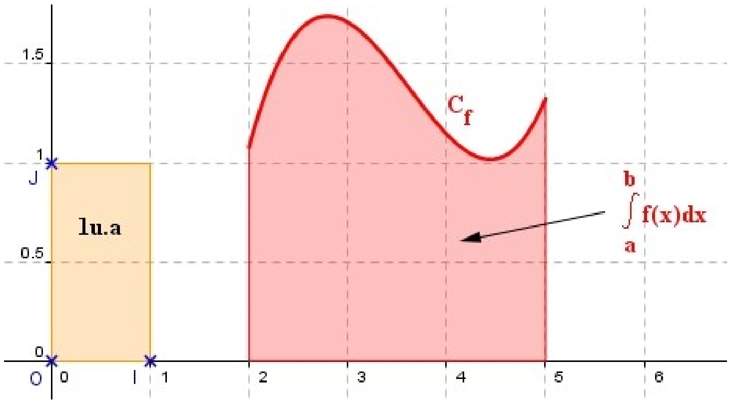
**Chapitre 8**
**Calcul de primitives**

Dans tout ce cours $\mathbb{K}$, désigne $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

# I) Intégrale d'une fonction sur un intervalle [a,b]

## a) Intégrale d'une fonction positive

**Définition** : Soit $f$ une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ et $C_f$ sa courbe représentative dans un repère (O ;A ;B). L´unité d´aire est l´aire du rectangle OACB où C(1 ;1) dans le repère (O ;A ;B), noté u.a.
L´aire du domaine D, délimité par $C_f$, l´axe des abscisses et les droites d´équation $x = a$ *et* $x = b$ est appelé aire sous la courbe $C_f$ pour $x \in [a; b]$. On note : $\int_a^b f(x)dx$
Et se lit : « *intégrale de a à b de f(x) dx* ».




**Exemple I.a.1** : On pose $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$
Déterminer :

$$\int_1^4 f(x)dx$$

**Remarque** : Le choix de la variable dans la notation de l´intégrale est libre, du moment que cela est cohérent :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

**Définition** : Par convention on a :

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

## b) Calcul de l'intégrale

**Propriété I.b.1** : Si $f$ est continue et positive sur un intervalle $[a; b]$, la fonction F définie sur $[a; b]$ par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est dérivable sur $[a; b]$ et a pour dérivée : $\forall\, x \in [a; b], F\,'(x) = f(x)$

**Exemple I.b.2** : Déterminer la dérivée de :

$$\forall\, x \in [1; 4], F(x) = \int_a^x (0.5t + 2)dt$$

# II) Définition des primitives d'une fonction continue

## a) Généralités

**Définition (fonction de classe $\mathcal{C}^k$)** : On dit que $f : I \to \mathbb{K}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si et seulement si :

- $f$ est k fois dérivable sur I $\left(f \in \mathcal{D}^k(I)\right)$
- $f^{(k)}$ est continue sur I

De plus on dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si et seulement si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I pour tout k entier naturel.
Si f est continue sur I mais pas dérivable sur I on dit que f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur I

**Remarque** : Les fonctions exponentielles, logarithmes, polynômes sont $\mathcal{C}^{\infty}$ sur leur ensemble de définition.

**Exemple II.a.1** : Déterminer une fonction de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ mais pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

**Définition (Primitive)** : Soit *f : I* → $\mathbb{K}$ est de classe $\mathcal{C}^0$ sur I (ie que *f* est continue sur I). On appelle primitive de *f*, noté F, toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I dont la dérivée est f :

$$F \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$$
$$F' = f$$

**Exemple II.a.2** : Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 \end{cases} \quad g: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto cos(x) \end{cases} \quad h: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^4} \end{cases}:$$

**ATTENTION** : Une primitive n'est jamais unique. Seulement à une constante près. On a la propriété suivante :

**Propriété II.a.3** : Deux primitives d'une même fonction sur I diffèrent d'une constante.

**Exemple II.a.4** : Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{2x}{1+x^2} \end{cases} \quad g: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto cos^5(x)\, sin(x) \end{cases} \quad h: \begin{cases} ]-1;1[ \to ]-1;1[ \\ x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$$

***Application II.a.5*** : On pose :

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto x\,ln(x) - x \end{cases}$$

1) Montrer que F est une primitive de :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto ln(x) \end{cases}$$

2) En déduire l'unique primitive de f telle que *f(1) = 7*.

## b) Existence des primitives.

**Propriété II.b.1** : Soit *f : I* → $\mathbb{K}$ continue et a ∈ I. On a alors :

- *f* admet des primitives sur I
- *f* admet une unique primitive qui s'annule en a :

$$F : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt \end{cases}$$

- Pour toute primitive G de f, on a :

$$\forall\, x \in I, G(x) = G(a) + \int_a^x f(t)dt$$

***Application II.b.2*** : On pose :

$$f : \begin{cases} ]1;+\infty[ \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{1}{x\,ln(x)} \end{cases}$$

Déterminer l'unique primitive de *f* qui s'annule en $e^2$

**Notation de Leibniz** : Soit *f : I* → $\mathbb{K}$ continue. Alors une primitive générique de *f* se note :

$$\int^x f(t)dt$$

Elle est donc définie à une constante près. Ce n'est donc pas une fonction !

**Exemple II.b.3** : Déterminer :

$$\int^{x} e^{u} du$$

## c) Utilisation des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

**Définition** : Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue. On a alors :

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^x Re(f(t))dt + i\int_a^x Im(f(t))dt$$

**Exemple II.c.1** : Soit $\lambda$ un réel non nul. Déterminer :

$$\int^{x} e^{\lambda i t} dt$$

***Application II.c.2*** : Déterminer une primitive de :

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto cos(3x)\, e^{5x} \end{cases}$$

**Remarque** : Pour déterminer une primitive de fonctions de la forme : $x \mapsto \cos^{p}(x) \sin^{q}(x)$ où p et q sont des entiers naturels il convient mieux de linéariser.

**Exemple II.c.3** : Déterminer :

$$\int^{t} \cos^2(x)\, dx$$

## d) Primitives usuelles

(Voir formulaire)

**ATTENTION** : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in I, f(x) \neq 0$.
On a alors :

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ln(|f(x)|) + C$$

**Exemple II.d.1** : Calculer :

$$I = \int_{-3}^{-1} \frac{1}{x} dx$$

## e) Lien entre primitive et intégrale

**Propriété II.e.1** : Soit $f$ une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. Soit F une primitive de $f$ sur $[a; b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

***Application II.e.2*** : On pose :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto cos^2(x) \end{cases}$$

Déterminer l'aire délimitée par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 4\pi$

**Définition (extension de la définition)** : Soit $f$ est continue sur un intervalle $[a; b]$, de signe quelconque. Soit F une primitive de $f$ sur $[a; b]$. On définit alors :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

**Exemple II.e.3** : Déterminer :

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} sin(x)\,dx$$

**Propriété II.e.4** : Soit *f* est continue sur un intervalle $[a; b]$. On a :

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = -\int_{b}^{a} f(x)dx$$

## III) Nouvelles techniques pour déterminer une primitive ou une intégrale

### a) Intégration par partie

**Propriété III.a.1** : Soit $(f, g) \in \left(\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{K})\right)^2$. On a alors :

$$\int_{a}^{b} f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_{a}^{b} f(t)g'(t)dt$$

***Application III.a.2*** : Déterminer :

$$\int_{0}^{\pi} x\,sin(5x)\,dx$$

**Remarque** : On peut utiliser l'intégration par partie pour calculer des primitives :

***Application III.a.3*** : Déterminer :

$$\int^{t} arctan(x)\,dx \;\; et \int^{u} ln(t)\,dt$$

### b) Changement de variable

**Propriété III.b.1 (changement de variable)** : Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. Soient $\varphi \in \mathcal{C}^1([a; b], I)$. Alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_{a}^{b} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt$$

On dit que l'on a effectué le changement de variable $x = \varphi(t)$.

**Remarque** : En pratique on n'utilise pas la formule sous cette forme, mais on décompose le changement de variable en 3 étapes !

**A retenir** : On cherche à calculer :

$$\int_{a}^{b} f(x)dx$$

On pose $x = \varphi(t)$.

1) On trouve de nouvelles bornes en cherchant une solution aux équations :

$$\begin{cases} a = \varphi(t) \\ b = \varphi(t) \end{cases}$$

2) On vérifie que $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I à valeur dans [a ;b] et on calcule la valeur du dx

$$dx = \varphi'(t)dt$$

3) On change les valeurs de x par $\varphi(t)$ dans l'intégrale, ainsi que le dx et les bornes.

*Application III.b.2* : Déterminer :

$$I = \int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\, dt$$

*Application III.b.3* **:** Déterminer :

$$I = \int_0^1 \frac{e^{2t}}{1 + e^t} dt$$

**Remarque** : On peut utiliser le changement de variable pour déterminer une primitive d'une fonction :
Soient $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, I)\ et\ f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. On a alors :

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C\ avec\ C \in \mathbb{K}$$

*Application III.b.4* : Déterminer :

$$\int^x \frac{dt}{ch(t)}$$

*Application III.b.5* : Déterminer :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2 - x^2}}$$

## IV) Primitives de fractions rationnelles

### a) Décomposition en éléments simples

**Définition** : On appelle fraction rationnelle le quotient de deux fonctions polynômes

**Exemple** : Les fonctions suivantes sont des fractions rationnelles :

$$x \longmapsto \frac{2x + 1}{x + 3}\ ; x \longmapsto \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^4 + 5x^2 + 3}$$

**Propriété IV.a.1 (Décomposition en éléments simples)** : Soient $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]^2$ tel que :

$$\exists(\mathrm{m}_1, \dots \mathrm{m}_\mathrm{n}) \in (\mathbb{N}^*)^\mathrm{n}, \exists(\mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_\mathrm{n}) \in \mathbb{N}^\mathrm{n} \text{ (deux à deux distincts)},$$

$$\mathrm{Q}(\mathrm{x}) = \prod_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} (\mathrm{x} - \mathrm{a}_\mathrm{i})^{\mathrm{m}_\mathrm{i}}$$

Alors il existe $\lambda_{1,1}, \lambda_{1,2}, \dots, \lambda_{1,m_1}, \lambda_{2,1}, \dots \lambda_{2,m_2}, \lambda_{3,1}, \dots, \lambda_{n,m_n}$ scalaires de $\mathbb{K}$ tels que :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lambda_{1,1}}{x - a_1} + \frac{\lambda_{1,2}}{(x - a_1)^2} + \cdots + \frac{\lambda_{1,m_1}}{(x - a_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{\lambda_{n,1}}{x - a_n} + \cdots + \frac{\lambda_{n,m_n}}{(x - a_n)^{m_n}}$$

**Exemple IV.a.2** : Décomposer en élément simple les fractions rationnelles suivantes :

$$f : x \longmapsto \frac{1}{1 - x^2}\ ; g\ :\ x \longmapsto \frac{2x + 1}{x(1 + x)^2}$$

**Remarque** : Si le degré de P est supérieur au degré de Q, il faut transformer la fraction rationnelle, nous verrons cela dans le cours sur les polynômes

*Application IV.a.3* : Calculer :

$$\int_1^3 \frac{dt}{t(t + 1)(t + 2)}$$

*Application IV.a.4* **:** Déterminer une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction $g$ suivante :

$$g\ :\ x \longmapsto \frac{2x + 1}{x(1 + x)^2}$$

**Remarque** : On peut utiliser des complexes pour factoriser un polynôme sur $\mathbb{R}$.

**Exemple IV.a.5** : Factoriser : $P(t) = 1 + t^4$

## b) Cas des fonctions de degré 2

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a \neq 0$. On pose dans cette partie :

$$f : x \longmapsto \frac{dx + e}{ax^2 + bx + c}$$

**Propriété IV.b.1** : En fonction de la valeur du discriminant, un polynôme de degré 2 peut se factoriser ou non sur les réels. On a donc 3 cas.

- $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. On a deux racines distinctes $x_1$ et $x_2$ réelles :

$$f : x \longmapsto \frac{dx + e}{a(x - x_1)(x - x_2)}$$

On décompose alors en éléments simples.

- $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. On a alors une racine double :

$$\int \frac{dx + e}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{dx + e}{(x - x_1)^2} dx = \frac{d'}{x - x_1} + C$$

- $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Il n'y a pas de racine réelle. On se ramène à une forme canonique

$$\int \frac{\mathrm{dx} + \mathrm{e}}{\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c}} \mathrm{dx} = \int \frac{\mathrm{dx} + \mathrm{e}}{\mathrm{a}\left(\mathrm{x} - \frac{\mathrm{b}}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}} \mathrm{dx}$$

***Application IV.b.2*** : Déterminer :

$$F_1(x) = \int \frac{x + 1}{x^2 - 5x + 6} dx \quad F_2(x) = \int \frac{x + 3}{x^2 + 4x + 4} dx \ ; F_3(x) = \int \frac{x - 3}{x^2 + x + 1} dx$$

***Application IV.b.3*** : Déterminer une primitive de :

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x^3 - 1}$$

***Application IV.b.4*** : Déterminer :

$$I = \int_{-3}^{3} \frac{1}{1 + \mathrm{t}^4} \mathrm{dt}$$