

Correction TD 8 : Calcul de primitives

Partie A : Calculs classiques de primitives et intégrale

Exercice A.1 : Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant leur domaine de validité

$$f_1: x \mapsto x^3 + 5x^2 - 3x + 1; \quad f_2: x \mapsto \cos(3x); \quad f_3(x) = e^{-5x}; \quad f_4(x) = \frac{1}{x+2}; \quad f_5: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$f_6: x \mapsto \frac{1}{1+x^2}; \quad f_7: x \mapsto \frac{1}{x^4}; \quad f_8: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}; \quad f_9(x) = \sqrt{x}; \quad f_{10}(x) = x\sqrt{x};$$

$f_1: x \mapsto x^3 + 5x^2 - 3x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive définie sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\{F_1 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), F'_1 = f_1\} = \left\{x \mapsto \frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x + c, c \in \mathbb{R}\right\}$$

$f_2: x \mapsto \cos(3x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive définie sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\{F_2 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), F'_2 = f_2\} = \left\{x \mapsto \frac{1}{3}\sin(3x) + c, c \in \mathbb{R}\right\}$$

$f_3: x \mapsto e^{-5x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive définie sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\{F_3 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), F'_3 = f_3\} = \left\{x \mapsto -\frac{1}{5}e^{-5x} + c, c \in \mathbb{R}\right\}$$

$f_4: x \mapsto \frac{1}{x+2}$ est continue sur $] -\infty; -2[$ et sur $] -2; +\infty[$ donc admet une primitive définie sur chacun de ses deux intervalles. On a :

$$\{F_4 \in \mathcal{C}^0(]-\infty; -2[, \mathbb{R}), F'_4 = f_4\} = \{x \mapsto \ln(-x-2) + c, c \in \mathbb{R}\}$$

De même on a :

$$\{F_4 \in \mathcal{C}^0(]-2; +\infty[, \mathbb{R}), F'_4 = f_4\} = \{x \mapsto \ln(x+2) + c, c \in \mathbb{R}\}$$

$f_5: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur $] -1; 1[$ donc admet une primitive sur $] -1; 1[$ mais en fait sur $[-1; 1]$ car on connaît une primitive classique de f_5 :

$$\{F_5 \in \mathcal{C}^0([-1; 1], \mathbb{R}), F'_5 = f_5\} = \{x \mapsto \arcsin(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$$

$f_6: x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive définie sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\{F_6 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), F'_6 = f_6\} = \{x \mapsto \arctan(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$$

$f_7: x \mapsto \frac{1}{x^4}$ est continue sur $] -\infty; 0[$ et sur $] 0; +\infty[$ donc admet une primitive définie sur chacun de ses deux intervalles. On a :

$$\{F_7 \in \mathcal{C}^0(]-\infty; 0[, \mathbb{R}), F'_7 = f_7\} = \left\{x \mapsto -\frac{1}{3x^3} + c, c \in \mathbb{R}\right\}$$

De même on a :

$$\{F_7 \in \mathcal{C}^0(]0; +\infty[, \mathbb{R}), F'_7 = f_7\} = \left\{x \mapsto -\frac{1}{3x^3} + c, c \in \mathbb{R}\right\}$$

Remarque : On a :

$$\forall x \neq 0, f(x) = \frac{1}{x^4} = x^{-4} \Rightarrow F(x) = \frac{x^{-3}}{-3} = -\frac{1}{3x^3}$$

$f_8: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est continue sur $] 0; +\infty[$ donc admet une primitive définie sur $] 0; +\infty[$ que l'on peut prolonger sur $[0; \infty[$.
On a :

De même on a :

$$\{F_8 \in \mathcal{C}^0([0; +\infty[, \mathbb{R}), F'_8 = f_8\} = \{x \mapsto 2\sqrt{x} + c, c \in \mathbb{R}\}$$

Remarque : On a :

$$\forall x > 0, f_8(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow F_8(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$$

$f_9 : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$ donc admet une primitive définie sur $[0; +\infty[$. De plus on sait que :

$$\forall x \geq 0, f_9(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow F_9(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$$

On a alors :

$$\{F_9 \in \mathcal{C}^0([0; +\infty[, \mathbb{R}), F'_9 = f_9\} = \left\{x \mapsto \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c, c \in \mathbb{R}\right\}$$

$f_{10} : x \mapsto x\sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$ donc admet une primitive définie sur $[0; +\infty[$. De plus on sait que :

$$\forall x \geq 0, f_{10}(x) = x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow F_{10}(x) = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x}$$

On a alors :

$$\{F_{10} \in \mathcal{C}^0([0; +\infty[, \mathbb{R}), F'_{10} = f_{10}\} = \left\{x \mapsto \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + c, c \in \mathbb{R}\right\}$$

Exercice A.2 : Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant leur domaine de validité

$$f_1 : x \mapsto \frac{x}{1+x^2}; \quad f_2 : x \mapsto \frac{x}{1+x^4}; \quad f_3(x) = \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}; \quad f_4(x) = \frac{1}{x \ln(x)}; \quad f_5 : x \mapsto \cos^4(x);$$

$$f_6 : x \mapsto \cos(x) \sin^4(x) \quad f_7 : x \mapsto \cos^3(x) \sin^4(x) \quad f_8 : x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$$

$f_1 : x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive définie sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}, \text{ avec } u(x) = 1+x^2$$

On a donc :

$$\{F_1 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), F'_1 = f_1\} = \left\{x \mapsto \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c, c \in \mathbb{R}\right\}$$

$f_2 : x \mapsto \frac{x}{1+x^4}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive définie sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_2(x) = \frac{x}{1+x^4} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}, \text{ avec } u(x) = x^2$$

On a donc :

$$\{F_2 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), F'_2 = f_2\} = \left\{x \mapsto \frac{1}{2} \arctan(x^2) + c, c \in \mathbb{R}\right\}$$

$f_3 : x \mapsto \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive définie sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_3(x) = \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)} = -\frac{-\sin(x)}{1+(\cos(x))^2} = -\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}, \text{ avec } u(x) = \cos(x)$$

On en déduit donc que :

$$\{F_3 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), F'_3 = f_3\} = \{x \mapsto -\arctan(\cos(x)) + c, c \in \mathbb{R}\}$$

$f_4: x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ est définie et continue sur $]0; 1[$ et $]1; +\infty[$ donc admet une primitive définie sur chacun de ses deux intervalles. On a :

$$\forall x > 0, x \neq 1, \frac{1}{x \ln(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)} \text{ avec } u(x) = \ln(x)$$

$$\{F_4 \in \mathcal{C}^0(]0; 1[, \mathbb{R}), F'_4 = f_4\} = \{x \mapsto \ln(-\ln(x)) + c, c \in \mathbb{R}\}$$

De même on a :

$$\{F_4 \in \mathcal{C}^0(]1; +\infty[, \mathbb{R}), F'_4 = f_4\} = \{x \mapsto \ln(\ln(x)) + c, c \in \mathbb{R}\}$$

$f_5: x \mapsto \cos^4(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive définie sur $\mathbb{R}$. De plus on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_5(x) = \cos^4(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 = \frac{e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}}{16} = \frac{1}{8} \cos(4x) + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{3}{8}$$

On en déduit donc que :

$$\int \cos^4(x) dx = \frac{1}{8} \int \cos(4x) dx + \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx + \frac{3}{8} \int 1 dx = \frac{\sin(4x)}{32} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{3}{8} x$$

On a donc :

$$\{F_5 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), F'_5 = f_5\} = \left\{ x \mapsto \frac{\sin(4x)}{32} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{3}{8} x + c, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$f_6: x \mapsto \cos(x) \sin^4(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive définie sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_6(x) = \cos(x) \sin^4(x) = u'(x) u^4(x) \text{ avec } u(x) = \sin(x)$$

On en déduit donc que :

$$\{F_6 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), F'_6 = f_6\} = \left\{ x \mapsto \frac{\sin^5(x)}{5} + c, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$f_7: x \mapsto \cos^3(x) \sin^4(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive définie sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f_7(x) &= \cos^3(x) \sin^4(x) \\ &= \cos(x) \cos^2(x) \sin^4(x) \\ &= \cos(x) (1 - \sin^2(x)) \sin^4(x) \\ &= \cos(x) \sin^4(x) - \cos(x) \sin^6(x) \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\{F_7 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), F'_7 = f_7\} = \left\{ x \mapsto \frac{\sin^5(x)}{5} - \frac{\sin^7(x)}{7} + c, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Astuce à retenir :

Si vous avez à déterminer une primitive d'une fonction du type $f: x \mapsto \sin^p(x) \cos^q(x)$, il y a seulement un cas difficile, quand p et q sont pairs.

En effet imaginons que p soit impair :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) &= \sin^p(x) \cos^q(x) = \sin^{2p'+1}(x) \cos^q(x) \\ &= \sin(x) (\sin^2(x))^{p'} \cos^q(x) \\ &= \sin(x) (1 - \cos^2(x))^{p'} \cos^q(x) \\ &= \sin(x) \left(\sum_{k=0}^{p'} \binom{p'}{k} (-1)^k \cos^{2k}(x) \right) \cos^q(x) \\ &= \sum_{k=0}^{p'} \binom{p'}{k} (-1)^k \sin(x) \cos^{2k+q}(x) \end{aligned}$$

Ainsi une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \sum_{k=0}^{p'} \binom{p'}{k} (-1)^{k+1} \frac{\cos^{2k+q+1}(x)}{2k+q+1}$$

C'est exactement ce que j'ai fait pour le f_7 .

Bien sûr on a la même chose si q est impair !

Par contre si l'on a deux puissances pairs, cela devient plus compliqué et il faut linéariser.

$f_8: x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive définie sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_8(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \text{ avec } u(x) = 1 + e^x$$

On en déduit donc que :

$$\{F_8 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), F'_8 = f_8\} = \{x \mapsto 2\sqrt{1+e^x} + c, c \in \mathbb{R}\}$$

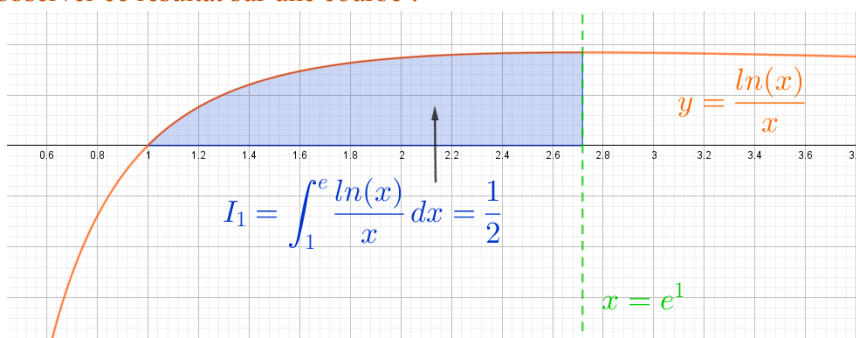
Exercice A.3 : Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^3} dx$$

On a :

$$I_1 = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \ln(x) dx = \underbrace{\int_1^e u'(x)u(x) dx}_{(\text{avec } u(x)=\ln(x))} = \left[\frac{\ln^2(x)}{2} \right]_1^e = \frac{1}{2}$$

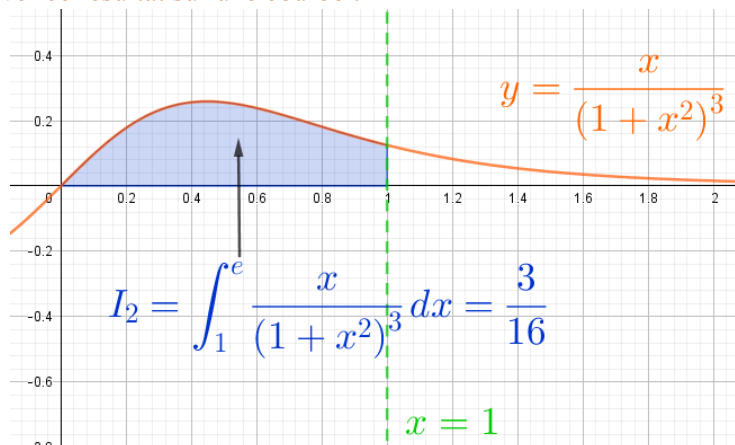
Remarque : On peut observer ce résultat sur une courbe :



De même on a :

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^3} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^3} dx = \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^1 \frac{u'(x)}{(u(x))^3} dx}_{(\text{avec } u(x)=1+x^2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{2u(x)^2} \right]_0^1 = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = \frac{3}{16}$$

Remarque : On peut observer ce résultat sur une courbe :



Exercice A.4 : On cherche à calculer de deux façons différentes l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 e^{-2x} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$$

1) a) On pose la fonction :

$$g_{a,b} : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \left(a \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + b \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right) e^{-2x} \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de a et b pour que $g_{a,b}$ soit une primitive de $x \mapsto e^{-2x} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

b) En déduire la valeur de I.

2) En utilisant les complexes, déterminer une primitive de $x \mapsto e^{-2x} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ puis retrouvez I.

1) a) On pose :

$$g_{a,b} : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \left(a \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + b \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right) e^{-2x} \end{cases}$$

On sait que $g_{a,b} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, g'_{a,b}(x) &= \left(-\frac{a\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{\pi}{2} b \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right) e^{-2x} + \left(-2a \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 2b \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right) e^{-2x} \\ &= \left(\left(-\frac{a\pi}{2} - 2b \right) \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \left(\frac{\pi}{2}b - 2a \right) \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right) e^{-2x} \\ &= e^{-2x} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \end{aligned}$$

En identifiant on a :

$$\begin{cases} \frac{a\pi}{2} + 2b = 0 \\ \frac{\pi}{2}b - 2a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4b}{\pi} \\ \frac{\pi}{2}b + \frac{8b}{\pi} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{8}{\pi^2 + 16} \\ b = \frac{2\pi}{\pi^2 + 16} \end{cases}$$

On en déduit donc que

$$g_{-\frac{8}{\pi^2+16}, \frac{2\pi}{\pi^2+16}} : x \mapsto \left(-\frac{8}{\pi^2+16} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{2\pi}{\pi^2+16} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right) e^{-2x}$$

Est une primitive de $x \mapsto e^{-2x} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

b) On a alors :

$$I = \int_0^1 e^{-2x} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \left[\left(-\frac{8}{\pi^2+16} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{2\pi}{\pi^2+16} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right) e^{-2x} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{\pi^2+16} e^{-2} + \frac{8}{\pi^2+16}$$

2) On peut écrire que :

$$e^{-2x} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \operatorname{Re}\left(e^{-2x + \frac{i\pi}{2}x}\right)$$

On en déduit donc d'après les propriétés de dérivation des fonctions d'une variable réelle à valeur complexe :

$$I = \int_0^1 e^{-2x} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \int_0^1 \operatorname{Re}\left(e^{-2x + \frac{i\pi}{2}x}\right) dx = \operatorname{Re}\left(\int_0^1 e^{-2x + \frac{i\pi}{2}x} dx\right) = \operatorname{Re}\left(\left[\frac{1}{\frac{\pi}{2}i - 2} e^{-2x + \frac{i\pi}{2}x}\right]_0^1\right)$$

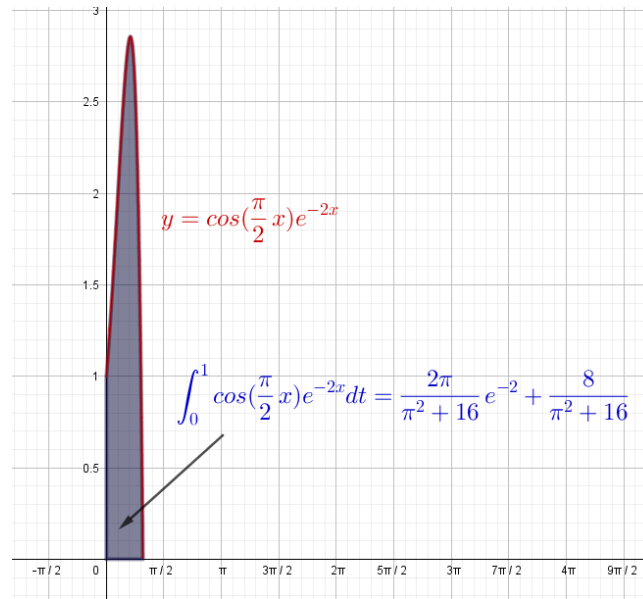
De plus on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(\left[\frac{1}{\frac{\pi}{2}i - 2} e^{-2x + \frac{i\pi}{2}x}\right]_0^1\right) &= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}i - 2} \left(e^{-2 + \frac{i\pi}{2}} - 1\right)\right) = \operatorname{Re}\left(-\frac{\left(\frac{\pi}{2}i + 2\right)}{\frac{\pi^2}{4} + 4} (e^{-2}i - 1)\right) = -4 \frac{-\frac{\pi}{2}e^{-2} - 2}{\pi^2 + 16} \\ &= \frac{2\pi}{\pi^2 + 16} e^{-2} + \frac{8}{\pi^2 + 16} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$I = \int_0^1 e^{-2x} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \frac{2\pi}{\pi^2 + 16} e^{-2} + \frac{8}{\pi^2 + 16}$$

On a alors la courbe suivante :



Partie B : Changement de variable et intégration par partie

Exercice B.1 : Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant leur domaine de validité

$$f_1: x \mapsto xe^{3x}; \quad f_2: x \mapsto (x + 3) \cos(3x) \quad ; \quad f_3(x) = \arcsin(x) \quad ; \quad f_4(x) = x \arctan(x) \quad ; \quad f_5: x \mapsto x^2 \cos(x) ;$$

$f_1: x \mapsto xe^{3x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive définie sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\int xe^{3x} dx = \int u'(x)v(x) dx \text{ avec } \begin{cases} u'(x) = e^{3x} \\ v(x) = x \end{cases}$$

On en déduit donc, à l'aide d'une intégration par partie, avec :

$$\begin{cases} u(x) = \frac{1}{3}e^{3x} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

$$\int xe^{3x} dx = \left[\frac{1}{3}e^{3x}x \right] - \int \frac{1}{3}e^{3x} dx = e^{3x} \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9} \right)$$

On en déduit donc que

$$\{F_1 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), F'_1 = f_1\} = \left\{ x \mapsto e^{3x} \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9} \right) + c, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Remarque : On peut aussi faire cet exercice par « intuition » !

On pose $g: x \mapsto (ax + b)e^{3x}$

g est une primitive de f_1 si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = f_1(x) = xe^{3x}$$

De plus on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (3ax + a + 3b)e^{3x} = xe^{3x}$$

On identifie :

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ a + 3b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{9} \end{cases}$$

On en déduit donc que les primitives de $x \mapsto xe^{3x}$ sont de la forme :

$$x \mapsto e^{3x} \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9} \right) + c, c \in \mathbb{R}$$

$f_2: x \mapsto (x + 3) \cos(3x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive définie sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\int (x + 3) \cos(3x) dx = \int u'(x)v(x)dx \text{ avec } \begin{cases} u'(x) = \cos(3x) \\ v(x) = x + 3 \end{cases}$$

On en déduit donc, à l'aide d'une intégration par partie, avec :

$$\begin{cases} u(x) = \frac{1}{3} \sin(3x) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

$$\int (x + 3) \cos(3x) dx = \left[\frac{1}{3} \sin(3x) (x + 3) \right] - \int \frac{1}{3} \sin(3x) dx = \frac{1}{3} \sin(3x) (x + 3) + \frac{1}{9} \cos(3x)$$

On en déduit donc que

$$\{F_1 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), F'_1 = f_1\} = \left\{ x \mapsto \frac{1}{3} \sin(3x) (x + 3) + \frac{1}{9} \cos(3x) + c, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Remarque : On peut aussi faire cet exercice par « intuition » !

On pose $g: x \mapsto \cos(3x) (Ax + B) + \sin(3x) (Cx + D)$

g est une primitive de f_1 si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = f_1(x) = (x + 3)\cos(3x)$$

De plus on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \cos(3x) (A + 3Cx + 3D) + \sin(3x) (-3Ax - 3B + C)$$

On identifie :

$$\begin{cases} 3C = 1 \\ 3D + A = 3 \\ -3A = 0 \\ -3B + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = \frac{1}{3} \\ D = 1 \\ A = 0 \\ B = \frac{1}{9} \end{cases}$$

On en déduit donc qu'une primitive de $x \mapsto (x + 3)\cos(3x)$ est :

$$g: x \mapsto \frac{1}{9} \cos(3x) + \sin(3x) \left(\frac{1}{3}x + 1 \right)$$

On en déduit donc que g est une primitive de $x \mapsto (x + 3)\cos(3x)$ si et seulement si :

$$x \mapsto \frac{1}{9} \cos(3x) + \sin(3x) \left(\frac{1}{3}x + 1 \right) + c, c \in \mathbb{R}$$

$f_3: x \mapsto \arcsin(x)$ est continue sur $[-1; 1]$ donc admet une primitive définie sur $[-1; 1]$. On a :

$$\int \arcsin(x) dx = \int u'(x)v(x)dx \text{ avec } \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \arcsin(x) \end{cases}$$

On en déduit donc, à l'aide d'une intégration par partie, avec :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$$

$$\int \arcsin(x) dx = [x \arcsin(x)] - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$$

On en déduit donc que

$$\{F_3 \in \mathcal{C}^0([-1; 1], \mathbb{R}), F'_3 = f_3\} = \left\{ x \mapsto x \times \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$f_4: x \mapsto x \arctan(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive définie sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\int x \arctan(x) dx = \int u'(x)v(x)dx \text{ avec } \begin{cases} u'(x) = x \\ v(x) = \arctan(x) \end{cases}$$

On en déduit donc, à l'aide d'une intégration par partie, avec :

$$\begin{cases} u(x) = \frac{x^2}{2} \\ v'(x) = \frac{1}{1+x^2} \end{cases}$$

$$\int x \arctan(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} \arctan(x) \right] - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

On sait de plus que :

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int 1 dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx = x - \arctan(x)$$

On en déduit donc que :

$$\int x \arctan(x) dx = \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctan(x)$$

$$\{F_4 \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), F'_4 = f_4\} = \left\{ x \mapsto \frac{x^2+1}{2} \arctan(x) - \frac{x}{2} + c, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$f_5: x \mapsto x^2 \cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\int x^2 \cos(x) dx = [x^2 \sin(x)] - \int 2x \sin(x) dx$$

De la même façon on effectue de nouveau une IPP :

$$\int 2x \sin(x) dx = [-2x \cos(x)] + 2 \int \cos(x) dx = -2x \cos(x) + 2 \sin(x)$$

On en déduit donc que :

$$\int x^2 \cos(x) dx = x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \sin(x)$$

On en déduit donc que :

$$\{F_5 \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), F'_5 = f_5\} = \{x \mapsto (x^2 - 2) \sin(x) + 2x \cos(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$$

Remarque : On peut aussi faire cet exercice par « intuition » !

On pose $g: x \mapsto \cos(x)(Ax^2 + Bx + C) + \sin(x)(\alpha x^2 + \beta x + \delta)$

g est une primitive de f_5 si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \cos(x)(\alpha x^2 + \beta x + \delta + 2Ax + B) + \sin(x)(-Ax^2 - Bx - C + 2\alpha x + \beta)$$

On identifie :

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta + 2A = 0 \\ B + \delta = 0 \\ -A = 0 \\ 2\alpha - B = 0 \\ \beta - C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = A = 0 \\ \delta = -2 \\ B = 2 \\ \beta = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

On en déduit donc qu'une primitive de $x \mapsto x^2 \cos(x)$ est :

$$g: x \mapsto (x^2 - 2) \sin(x) + 2x \cos(x)$$

On en déduit donc que g est une primitive de $x \mapsto (x + 3) \cos(3x)$ si et seulement si :

$$x \mapsto g: x \mapsto (x^2 - 2) \sin(x) + 2x \cos(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

Exercice B.1 BIS : Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 x e^{3x} dx; I_2 = \int_0^\pi (x + 3) \cos(3x) dx; I_3 = \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(x) dx; I_4 = \int_0^1 x \arctan(x) dx; I_5 = \int_0^\pi x^2 \cos(x) dx$$

On a :

$$I_1 = \int_0^1 x e^{3x} dx = \left[\frac{1}{3} x e^{3x} \right]_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^3 - \frac{1}{9} (e^3 - 1) = \frac{2}{9} e^3 + \frac{1}{9}$$

$$I_2 = \int_0^\pi (x + 3) \cos(3x) dx = \left[\frac{1}{3} \sin(3x) (x + 3) \right]_0^\pi - \frac{1}{3} \int_0^\pi \sin(3x) dx$$

$$= \frac{1}{9} [\cos(3x)]_0^\pi = -\frac{2}{9}$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(x) dx = [x \times \arcsin(x)]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{6} + \left[\sqrt{1-x^2} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}-2}{2}$$

$$I_4 = \int_0^1 x \arctan(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} \times \arctan(x) \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 1 - \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2}$$

$$I_5 = \int_0^{\pi} x^2 \cos(x) dx = [x^2 \sin(x)]_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} x \times \sin(x) dx = 2[x \cos(x)]_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} \cos(x) dx = -2\pi$$

Exercice B.2 : A l'aide d'un changement de variable, déterminer une primitive des fonctions suivantes et préciser le domaine de validité :

1. $f_1: x \mapsto \frac{x^7}{(x^4+1)^2}$ 2. $f_2: x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$ 3. $f_3: x \mapsto \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$ 4. $f_4: x \mapsto e^{\sqrt{x}}$

5. $f_5: x \mapsto \frac{1}{e^x(1+e^x)}$ 6. $f_6: x \mapsto \frac{3}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ 7. $f_7: x \mapsto \frac{1}{\tan(x)+1}$

On applique à chaque calcul le même procédé :

- On cherche le domaine de continuité de f_i .
- On pose le changement de variable $u = f(x)$, on vérifie que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le domaine de continuité et on calcule $\frac{du}{dx}$.
- On change les primitives sans oublier le dx . (ON NE MELANGE PAS LES DEUX VARIABLES !!!).
- On calcule une nouvelle primitive.
- On change la variable u .

1. $f_1: x \mapsto \frac{x^7}{(x^4+1)^2}$

a) Domaine de continuité.

$f_1 \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ donc admet une primitive sur $\mathbb{R}$.

b) Changement de variable.

On pose : $u = x^4$. $x: \mapsto x^4$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\frac{du}{dx} = 4x^3$$

c) Une nouvelle primitive

On a :

$$\int \frac{x^7}{(1+x^4)^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{x^4}{(1+x^4)^2} 4x^3 dx = \frac{1}{4} \int \frac{u}{(1+u)^2} du$$

d) Calcul de la nouvelle primitive

On a :

$$\frac{1}{4} \int \frac{u}{(1+u)^2} du = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1+u} du - \frac{1}{4} \int \frac{1}{(1+u)^2} du = \frac{1}{4} \ln(|1+u|) + \frac{1}{4} \times \frac{1}{1+u}$$

e) On change u en x

On sait que $u = x^4$. On en déduit donc que :

$$\int \frac{x^7}{(1+x^4)^2} dx = \frac{1}{4} \ln(|1+x^4|) + \frac{1}{4} \times \frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{4} \ln(1+x^4) + \frac{1}{4} \times \frac{1}{1+x^4}$$

Remarque :

Avec un peu d'habitude on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int \frac{x^7}{(1+x^4)^2} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{x^4}{(1+x^4)^2} 4x^3 dx \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{1+x^4} dx - \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{(1+x^4)^2} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx - \frac{1}{4} \int \frac{u'(x)}{u^2(x)} dx \\
&= \frac{1}{4} \ln(1+x^4) + \frac{1}{4} \times \frac{1}{1+x^4}
\end{aligned}$$

$$2. f_2: x \mapsto \frac{1}{ch(x)}$$

a) Domaine de continuité.

On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$$

On en déduit donc que f_2 est définie sur $\mathbb{R}$. $f_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ donc admet une primitive sur $\mathbb{R}$.

b) Changement de variable.

On pose : $u = e^x$. $x: \mapsto e^x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\frac{du}{dx} = e^x$$

c) Une nouvelle primitive

On a :

$$\int \frac{1}{ch(x)} dx = 2 \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = 2 \int \frac{1}{e^{2x} + 1} e^x dx = 2 \int \frac{1}{1+u^2} du$$

d) Calcul de la nouvelle primitive

On a :

$$2 \int \frac{1}{1+u^2} du = 2 \arctan(u)$$

e) On change u en x

On sait que $u = e^x$. On en déduit donc que :

$$\int \frac{1}{ch(x)} dx = 2 \arctan(e^x)$$

Remarque :

Avec un peu d'habitude on peut écrire :

$$\int \frac{1}{ch(x)} dx = 2 \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = 2 \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = 2 \int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)} dx = 2 \arctan(e^x)$$

$$3. f_3: x \mapsto \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$$

a) Domaine de continuité.

On sait que :

$$(1+x)\sqrt{x} \neq 0 \Leftrightarrow x > 0$$

On en déduit donc que f_3 est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. $f_3 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{+*})$ donc admet une primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Changement de variable.

On pose : $u = \sqrt{x}$. $x: \mapsto \sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et :

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

c) Une nouvelle primitive

On a :

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{1}{1+u^2} du$$

d) Calcul de la nouvelle primitive

On a :

$$2 \int \frac{1}{1+u^2} du = 2 \arctan(u)$$

e) On change u en x

On sait que $u = \sqrt{x}$. On en déduit donc que :

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx = 2 \arctan(\sqrt{x})$$

Remarque :

Avec un peu d'habitude on peut écrire :

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{1}{(1+x)} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)} dx = 2 \arctan(\sqrt{x})$$

4. $f_4: x \mapsto e^{\sqrt{x}}$

a) Domaine de continuité.

On sait que :

$x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ est définie si et seulement si $x \geq 0$

On en déduit donc que f_2 est définie sur $\mathbb{R}^+$. $f_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$ donc admet une primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Changement de variable.

On pose : $u = \sqrt{x}$. $x: \mapsto \sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et :

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

c) Une nouvelle primitive

On a :

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int \sqrt{x} \times e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2 \int u e^u du$$

d) Calcul de la nouvelle primitive

On a à l'aide d'une IPP :

$$2 \int u e^u du = 2[ue^u] - 2 \int e^u du = 2(u-1)e^u$$

e) On change u en x

On sait que $u = \sqrt{x}$. On en déduit donc que :

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}$$

Remarque :

Avec un peu d'habitude on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int e^{\sqrt{x}} dx &= 2 \int \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2 \int u(x) u'(x) e^{u(x)} dx = 2[u(x) e^{u(x)}] - 2 \int u'(x) e^{u(x)} dx \\ &= 2(u(x)-1)e^{u(x)} = 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

5. $f_5: x \mapsto \frac{1}{e^x(1+e^x)}$

a) Domaine de continuité.

On sait que :

$x \mapsto e^x(1+e^x)$ est définie et strictement positive sur $\mathbb{R}$.

On en déduit donc que f_5 est définie sur $\mathbb{R}$. $f_5 \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ donc admet une primitive sur $\mathbb{R}$.

b) Changement de variable.

On pose : $u = e^x$. $x: \mapsto e^x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\frac{du}{dx} = e^x$$

c) Une nouvelle primitive

On a :

$$\int \frac{1}{e^x(1+e^x)} dx = \int \frac{e^x}{e^{2x}(1+e^x)} dx = \int \frac{1}{u^2(1+u)} du$$

d) Calcul de la nouvelle primitive

On a :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{u^2(1+u)} du &= \int \frac{1+u-u}{u^2(1+u)} du = \int \frac{1}{u^2} du - \int \frac{1}{u(1+u)} du = -\frac{1}{u} - \int \frac{1+u-u}{u(1+u)} du \\ &= -\frac{1}{u} - \ln(|u|) + \ln(|1+u|) \end{aligned}$$

e) On change u en x

On sait que $u = e^x$. On en déduit donc que :

$$\int \frac{1}{e^x(1+e^x)} dx = -e^{-x} - x + \ln(1+e^x)$$

Remarque :

Avec un peu d'habitude on peut écrire :

$$\int \frac{1}{e^x(1+e^x)} dx = \int \frac{1}{e^{2x}(1+e^x)} \times e^x dx = \int \frac{1}{u^2(x)(1+u(x))} u'(x) dx$$

De plus on sait que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{u^2(x)(1+u(x))} &= \frac{1+u(x)-u(x)}{u^2(x)(1+u(x))} \\ &= \frac{1}{u^2(x)} - \frac{1}{u(x)(1+u(x))} \\ &= \frac{1}{u^2(x)} - \frac{1}{u(x)} + \frac{1}{1+u(x)} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\int \frac{1}{e^x(1+e^x)} dx = \int \frac{u'(x)}{u^2(x)} dx - \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx + \int \frac{u'(x)}{1+u(x)} dx = -e^{-x} - x + \ln(1+e^x)$$

$$6. f_6: x \mapsto \frac{3}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

a) Domaine de continuité.

On sait que :

$$\mathcal{D}_{f_6} = \left\{ x \in \mathbb{R}, \frac{x-1}{x+1} \geq 0 \right\} = \mathbb{R} \setminus [-1; 1[$$

On en déduit donc que f_6 est définie sur $\mathbb{R} \setminus [-1; 1[$. $f_5 \in \mathcal{C}] -\infty; -1[$ et $f_5 \in \mathcal{C}[1; +\infty[$ donc admet une primitive sur chacun de ces intervalles.

b) Changement de variable.

On pose : $u = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. $x: \mapsto \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty; -1[$ et sur $]1; +\infty[$ et :

$$\frac{du}{dx} = \frac{2}{(x+1)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} = \frac{1}{(x+1)^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$$

c) Une nouvelle primitive

On a :

$$\begin{aligned} \int \frac{3}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx &= \int \frac{3}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \times (x+1)^2 \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} \\ &= \int \frac{3}{x} \times \frac{x-1}{x+1} \times (x+1)^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} \\ &= \int \frac{3}{x} (x^2-1) \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} \end{aligned}$$

Ici on doit exprimer x en fonction de u .

On a :

$$u = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \Leftrightarrow u^2 = \frac{x-1}{x+1} \Leftrightarrow x = \frac{u^2+1}{1-u^2}$$

On en déduit donc que :

$$x^2 - 1 = \frac{4u^2}{(1-u^2)^2}$$

On en déduit donc que :

$$\int \frac{3}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx = 3 \int \frac{1-u^2}{1+u^2} \times \frac{4u^2}{(1-u^2)^2} du = 12 \int \frac{u^2}{(1-u^2)(1+u^2)} du$$

d) Calcul de la nouvelle primitive

On a :

$$\begin{aligned} 12 \int \frac{u^2}{(1-u^2)(1+u^2)} du &= 6 \int \frac{1}{1-u^2} du - 6 \int \frac{1}{1+u^2} du \\ &= 6 \int \frac{1}{(1-u)(1+u)} du - 6 \arctan(u) \\ &= 3 \int \frac{1}{1+u} du + 3 \int \frac{1}{1-u} du - 6 \arctan(u) \\ &= 3 \ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right) - 6 \arctan(u) \end{aligned}$$

e) On change u en x

On sait que $u = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. On en déduit donc que :

$$\int \frac{3}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx = 3 \ln\left(\frac{1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1 - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\right) - 6 \arctan\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$$

1^{er} cas : Si $x \geq 1$:

$$\frac{1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1 - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \geq 1, \int \frac{3}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx = 3 \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) - 6 \arctan\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$$

2^{ème} cas : Si $x < -1$

$$\frac{1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1 - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} = \frac{1 + \sqrt{\frac{1-x}{-1-x}}}{1 - \sqrt{\frac{1-x}{-1-x}}} = \frac{\sqrt{-x-1} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{-x-1} - \sqrt{1-x}} = -x + 2\sqrt{x^2 - 1}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x < -1, \int \frac{3}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx = 3 \ln\left(-x + \sqrt{x^2 - 1}\right) - 6 \arctan\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$$

$$7. f_7: x \mapsto \frac{1}{\tan(x) + 1}$$

a) Domaine de continuité.

On sait que :

$$\mathcal{D}_{\tan} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$$

De plus on peut voir que :

$$\mathcal{D}_{f_7} = \left\{ x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[, \tan(x) \neq -1 \right\}$$

On sait que :

$$\tan(x) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

On en déduit donc que :

$$\mathcal{D}_{f_7} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; -\frac{\pi}{4} + k\pi \right[\cup \left] -\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[\right)$$

Pour plus de facilité nous allons restreindre la recherche d'une primitive de f_7 sur les intervalles $\left] -\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4} \right[\cup \left] -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[$.

b) Changement de variable.

On pose : $u = \tan(x)$. $x \mapsto \tan(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left] -\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4} \right[$ et sur $\left] -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[$. De plus on a :

$$\frac{du}{dx} = \tan^2(x) + 1 = u^2 + 1$$

On en déduit donc que :

$$\frac{du}{u^2 + 1} = dx$$

c) Une nouvelle primitive

On a :

$$\int \frac{1}{\tan(x) + 1} dx = \int \frac{1}{(1+u)(1+u^2)} du$$

d) Calcul de la nouvelle primitive

On cherche à calculer :

$$\int \frac{1}{(1+u)(1+u^2)} du$$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{(1+u)(1+u^2)} = \frac{au+b}{1+u^2} + \frac{c}{1+u} = \frac{(au+b)(1+u) + c(1+u^2)}{(1+u)(1+u^2)} = \frac{u^2(a+c) + u(a+b) + c+b}{(1+u)(1+u^2)}$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} a+c=0 \\ a+b=0 \\ c+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1+u)(1+u^2)} du &= \frac{1}{2} \int \frac{1-u}{1+u^2} du + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+u} du \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+u^2} du - \frac{1}{2} \int \frac{u}{1+u^2} du + \frac{1}{2} \ln(|1+u|) \\ &= \frac{1}{2} \arctan(u) - \frac{1}{4} \ln(1+u^2) + \frac{1}{2} \ln(|1+u|) \end{aligned}$$

e) On change u en x

On sait que $u = \tan(x)$. On en déduit donc que :

$$\int \frac{1}{\tan(x) + 1} dx = \frac{1}{2} \arctan(\tan(x)) - \frac{1}{4} \ln(1 + \tan^2(x)) + \frac{1}{2} \ln(|1 + \tan(x)|)$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[, \int \frac{1}{\tan(x) + 1} dx = \frac{1}{2} x + \ln(\sqrt{\cos(x)}) + \frac{1}{2} \ln(1 + \tan(x))$$

Exercice B.2 BIS Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variable (ils sont donnés à la fin du TD pour vous aider) :

$$I_1 = \int_{-1}^1 \frac{x^7}{(1+x^4)^2} dx; I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{\ln(x)}; I_3 = \int_1^2 \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx; I_4 = \int_0^2 e^{\sqrt{x}} dx; I_5 = \int_{-1}^2 \frac{dx}{e^x(1+e^x)}$$

$$I_6 = \int_2^3 \frac{3}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx ; I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\tan(x) + 1}$$

1) On a :

$$I_1 = \int_{-1}^1 \frac{x^7}{(1+x^4)^2} dx$$

On pose :

$$t = x^4$$

1) Calcul des bornes

On a :

$$\begin{cases} x = -1 \Rightarrow t = 1 \\ x = 1 \Rightarrow t = 1 \end{cases}$$

2) Calcul du dt

On a :

$$t = x^4 \Rightarrow \frac{dt}{dx} = 4x^3 \Rightarrow dt = 4x^3 dx$$

3) On remplace et on calcule :

$$I_1 = \int_{-1}^1 \frac{x^7}{(1+x^4)^2} dx = I_1 = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \frac{x^4}{(1+x^4)^2} (4x^3) dx = \frac{1}{4} \int_1^1 \frac{t}{(1+t^2)^2} dt = 0$$

2) On a :

$$I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{ch}(x)} = \int_0^1 \frac{2}{e^x + e^{-x}} dx$$

On effectue le CDV $t = e^x$.

1) Calcul des bornes

On a :

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = 1 \Rightarrow t = e \end{cases}$$

2) Calcul du dt

$$t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$$

3) On remplace et on calcule

$$\int_0^1 \frac{2}{e^x + e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{2}{e^{2x} + 1} e^x dx = 2 \int_1^e \frac{1}{1+t^2} dt = 2 \arctan(e) - 2 \arctan(1) = 2 \arctan(e) - \frac{\pi}{2}$$

3) On a :

$$I_3 = \int_1^2 \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx$$

On effectue le CDV $t = \sqrt{x}$.

1) Calcul des bornes

$$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 1 \\ x = 2 \Rightarrow t = \sqrt{2} \end{cases}$$

2) Calcul du dt

On a :

$$t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

3) On remplace et on calcule

$$I_3 = \int_1^2 \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{1+t^2} dt = 2 \left(\arctan(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{4} \right)$$

On a :

$$I_4 = \int_0^2 e^{\sqrt{x}} dx$$

On effectue le CDV $t = \sqrt{x}$.

1) Calcul des bornes

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 2 \Rightarrow t = \sqrt{2} \end{cases}$$

2) Calcul du dt

On a :

$$t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt$$

3) On remplace et on calcule

$$I_4 = \int_0^2 e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^{\sqrt{2}} e^t t dt = 2 \left([te^t]_0^{\sqrt{2}} - \int_0^{\sqrt{2}} e^t dt \right) = 2 \left(\sqrt{2} e^{\sqrt{2}} - e^{\sqrt{2}} + 1 \right) = (2\sqrt{2} - 1)e^{\sqrt{2}} + 2$$

On a :

$$I_5 = \int_{-1}^2 \frac{dx}{e^x(1+e^x)}$$

On effectue le CDV $t = e^x$.

1) Calcul des bornes

$$\begin{cases} x = -1 \Rightarrow t = e^{-1} \\ x = 2 \Rightarrow t = e^2 \end{cases}$$

2) Calcul du dt

On a :

$$t = e^x \Rightarrow x = \ln(t) \Rightarrow dx = \frac{1}{t} dt$$

3) On remplace et on calcule

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_{-1}^2 \frac{dx}{e^x(1+e^x)} = \int_{e^{-1}}^{e^2} \frac{1}{t(1+t)} \times \frac{1}{t} dt = \int_{e^{-1}}^{e^2} \frac{1+t-t}{t^2(1+t)} dt \\ &= \int_{e^{-1}}^{e^2} \frac{1}{t^2} dt - \int_{e^{-1}}^{e^2} \frac{1+t-t}{t(1+t)} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_{e^{-1}}^{e^2} - [\ln(t)]_{e^{-1}}^{e^2} + [\ln(1+t)]_{e^{-1}}^{e^2} \\ &= e - e^{-2} - 3 + \ln\left(\frac{1+e^2}{1+e^{-1}}\right) \end{aligned}$$

On a :

$$I_6 = \int_2^3 \frac{3}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$$

On effectue le CDV :

$$u = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

1) Calcul des bornes

$$\begin{cases} x = 2 \Rightarrow u = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x = 3 \Rightarrow u = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

2) Calcul du dt

On a :

$$u = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \Rightarrow u^2 = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow x = \frac{1+u^2}{1-u^2} \Rightarrow dx = \frac{2u(1-u^2) + 2u(1+u^2)}{(1-u^2)^2} du$$

$$\Rightarrow dx = \frac{4u}{(1-u^2)^2} du$$

3) On remplace et on calcule :

$$I_6 = \int_2^3 \frac{3}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} 3 \times \frac{1-u^2}{1+u^2} \times u \times \frac{4u}{(1-u^2)^2} du = 12 \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{u^2}{(1-u^2)(1+u^2)} du$$

$$= 6 \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{(1+u^2) - (1-u^2)}{(1-u^2)(1+u^2)} du = 6 \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{1-u^2} du - 6 \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{1+u^2} du$$

$$= 3 \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{(1+u) + (1-u)}{(1-u)(1+u)} du - 6 \left(\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right)$$

$$= 3 \left(-\ln\left(\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) + \ln\left(\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) \right) - 6 \left(\frac{\pi}{6} - \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right)$$

Or on a :

$$-\ln\left(\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) + \ln\left(\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = -\ln\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3} \times \frac{2}{2-\sqrt{2}}\right) + \ln\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3} \times \frac{2}{2+\sqrt{2}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)$$

On en déduit donc que :

$$I_6 = \int_2^3 \frac{3}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx = 3 \ln\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right) + 6 \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \pi$$

7) On a :

$$I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\tan(x) + 1}$$

On effectue le changement de variable $u = \tan(x)$

1) Calcul des bornes

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow u = 0 \\ x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = 1 \end{cases}$$

2) Calcul du du

On a :

$$u = \tan(x) \Rightarrow du = (1 + \tan^2(x)) dx \Rightarrow \frac{1}{1+u^2} du = dx$$

3) On remplace et on calcule :

$$I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\tan(x) + 1} = \int_0^1 \frac{1}{(1+u)(1+u^2)} du = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1+u^2 + 1+u - u(1+u)}{(1+u)(1+u^2)} du$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+u} du + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} du - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{u}{1+u^2} du = \frac{1}{2} \ln(2) + \frac{1}{2} \arctan(1) - \frac{1}{4} \ln(2) = \frac{1}{4} \ln(2) + \frac{\pi}{8}$$

On a donc :

$$I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\tan(x) + 1} = \frac{1}{4} \ln(2) + \frac{\pi}{8}$$

Exercice B.3 : Déterminer les valeurs des primitives suivantes :

1) $\int_0^x t \ln(t^2 + 1) dt$; 2) $\int_0^x (t^2 - t + 3)e^{2t} dt$, 3) $\int_0^x \ln(1 + t^2) dt$

4) $\int_0^x t \sin^3(t) dt$, 5) $\int_0^x \sqrt{16t^2 + 9} dt$ 6) $\int_0^x \operatorname{sh}(t) \sin(t) dt$

1. On a $t \mapsto t \ln(1 + t^2) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ donc elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$. De plus on a :

$$\int_0^x t \ln(t^2 + 1) dt = \frac{1}{2} \int_0^x u'(t) \ln(u(t)) dt \text{ avec } u(t) = 1 + t^2$$

Or on sait, à l'aide d'une IPP, que :

$$\int \ln(t) dt = x \ln(x) - x + c, c \in \mathbb{R}$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^x u'(t) \ln(u(t)) dt = u(x) \ln(1 + u(x)) - u(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

(Remarque : On peut vérifier ce résultat très rapidement en dérivant $x \mapsto u(x) \ln(1 + u(x)) - u(x)$).

On en déduit donc que :

$$\int_0^x t \ln(t^2 + 1) dt = \frac{1}{2} (1 + t^2) (\ln(1 + t^2) - 1) + c, c \in \mathbb{R}$$

On a $f_2: t \mapsto (t^2 - t + 3)e^{2t} \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ donc elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$.

Pour déterminer une primitive de f_2 , on peut le faire de deux façons.

Méthode 1 : La méthode intuitive

On pose $g: t \mapsto (at^2 + bt + c)e^{2t}$. On sait que g est une primitive de f_2 sur $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = (2at^2 + 2bt + 2c + 2at + b)e^{2t} = (t^2 - t + 3)e^{2t}$$

On identifie :

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2(b + a) = -1 \\ b + 2c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^x (t^2 - t + 3)e^{2t} dt = \left(\frac{1}{2} x^2 - x + 2 \right) e^{2x} + c, c \in \mathbb{R}$$

Méthode 2 : Double IPP

$$\int_0^x (t^2 - t + 3)e^{2t} dt = \left[(x^2 - x + 3) \frac{1}{2} e^{2x} \right] - \frac{1}{2} \int_0^x (2t - 1)e^{2t} dt$$

$$\begin{aligned}
&= (x^2 - x + 3) \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \left(\left[(2x - 1) \frac{1}{2} e^{2x} \right] - \int e^{2t} dt \right) \\
&= \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \right) e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + c, c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\int (t^2 - t + 3) e^{2t} dt = \left(\frac{1}{2} x^2 - x + 2 \right) e^{2x} + c, c \in \mathbb{R}$$

On a $f_3: t \mapsto \ln(1 + t^2) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ donc elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$.

On effectue une IPP :

$$\int_x^x \ln(1 + t^2) dt = \int 1 \times \ln(1 + t^2) dt = [x \ln(1 + x^2)] - 2 \int \frac{t^2}{1 + t^2} dt$$

De plus on sait que :

$$\int \frac{t^2}{1 + t^2} dt = \int 1 dt - \int \frac{1}{1 + t^2} dt = x - \arctan(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

On en déduit donc que :

$$\int \ln(1 + t^2) dt = x \ln(1 + x^2) - 2x + 2 \arctan(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

4) On sait que $f_4: t \mapsto t \sin^3(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive sur $\mathbb{R}$.

De plus on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin^3(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 = -\frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}}{8i} = -\frac{1}{4} \sin(3x) + \frac{3}{4} \sin(x)$$

On en déduit donc que :

$$\int t \sin^3(t) dt = -\frac{1}{4} \int t \sin(3t) dt + \frac{3}{4} \int t \sin(t) dt$$

On effectue deux IPP :

$$\int_x^x t \sin(3t) dt = \left[-\frac{x \cos(3x)}{3} \right] + \frac{1}{3} \int \cos(3t) dt = -\frac{1}{3} x \cos(3x) + \frac{1}{9} \sin(3x)$$

$$\int t \sin(t) dt = [-x \cos(x)] + \int \cos(t) dt = -x \cos(x) + \sin(x)$$

On en déduit donc que :

$$\int t \sin^3(t) dt = -\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} x \cos(3x) + \frac{1}{9} \sin(3x) \right) + \frac{3}{4} (-x \cos(x) + \sin(x)) + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \int t \sin^3(t) dt = \frac{1}{12} \times \cos(3x) - \frac{1}{36} \times \sin(3x) - \frac{3}{4} x \cos(x) + \frac{3}{4} \sin(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

5) On a $f_5: t \mapsto \sqrt{16t^2 + 9}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive sur $\mathbb{R}$. De plus on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sqrt{16t^2 + 9} = 3 \sqrt{\left(\frac{4}{3}t\right)^2 + 1}$$

On effectue un changement de variable. On pose : $sh(y) = \frac{4}{3}t$. Cela est possible car on sait que sh définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \exists ! x \in \mathbb{R}, \frac{4}{3}t = sh(y)$$

De plus on a :

$$dt = \frac{3}{4} ch(y) dy$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^x \sqrt{16t^2 + 9} dt = 3 \int_0^x \sqrt{sh^2(y) + 1} \frac{3}{4} ch(y) dy = \frac{9}{4} \int_0^x \sqrt{sh^2(y) + 1} ch(y) dy = \frac{9}{4} \int_0^x ch^2(y) dy$$

De plus on sait que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, ch^2(y) = \frac{ch(2y) + 1}{2}$$

On en déduit donc que :

$$\frac{9}{4} \int_0^x ch^2(y) dy = \frac{9}{4} \int_0^x \frac{ch(2y) + 1}{2} dy = \frac{9}{8} \left[\frac{sh(2x)}{2} + x \right] = \frac{9}{16} sh(2x) + \frac{9}{8} x + c, c \in \mathbb{R}$$

Il reste à déterminer la valeur de y.

On sait que :

$$sh(y) = x \Leftrightarrow y = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

De plus on sait que :

$$sh(2y) = 2ch(y)sh(y)$$

On en déduit donc que :

$$sh(2y) = 2\sqrt{1 + sh^2(y)}sh(y) = 2\sqrt{1 + \frac{16}{9}t^2} \times \frac{4}{3}t$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^x \sqrt{16t^2 + 9} dt = \frac{3}{2}x \sqrt{1 + \frac{16}{9}x^2} + \frac{9}{8} \ln \left(\sqrt{\frac{16}{9}x^2 + 1} - \frac{16}{9}x \right) + c, c \in \mathbb{R}$$

6) La fonction $f_6: x \mapsto sh(x) \sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive sur $\mathbb{R}$.

On pose :

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto ch(x) \sin(x) - sh(x) \cos(x) \end{cases}$$

On a alors $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = sh(x) \sin(x) + ch(x) \cos(x) - ch(x) \cos(x) + sh(x) \sin(x) = 2sh(x) \sin(x)$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^x sh(t) \sin(t) dt = \frac{1}{2} (ch(x) \sin(x) - sh(x) \cos(x))$$

Remarque : On peut déterminer une primitive de f_6 en utilisant les complexes.

On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, sh(x) \sin(x) &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \times \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= -\frac{i}{4} (e^{ix} - e^{-ix})(e^x - e^{-x}) \\ &= -\frac{i}{4} (e^{x(1+i)} - e^{x(-1+i)} - e^{x(1-i)} + e^{-x(1+i)}) \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \int_0^x sh(t) \sin(t) dt &= -\frac{i}{4} \times \left(\frac{e^{x(1+i)}}{1+i} - \frac{e^{x(-1+i)}}{-1+i} - \frac{e^{x(1-i)}}{1-i} - \frac{e^{-x(1+i)}}{1+i} \right) \\ &= -\frac{i}{8} \times \left((1-i)e^{x(1+i)} + (1+i)e^{x(-1+i)} + (1+i)e^{x(1-i)} - (1-i)e^{-x(1+i)} \right) \\ &= -\frac{i}{8} e^{ix} (e^x + e^{-x}) + \frac{1}{8} e^{ix} (e^x - e^{-x}) - \frac{i}{8} e^{-ix} (e^x - e^{-x}) + \frac{1}{8} e^{-ix} (e^x + e^{-x}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

Exercice B.4 :

$$1) \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\arcsin(t)}{1-t^2}} dt \quad 2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t) \sin^4(t) dt \quad 3) \int_{-1}^1 (t^2 + t + 1)e^{-t} dt$$

$$4) \int_{-1}^1 (t^3 - 1)\operatorname{ch}(t) dt \quad 5) \int_0^1 \frac{dt}{2t^2 + 2t + 1} \quad 6) \int_0^1 \frac{dt}{e^t + 1}$$

1) On sait que :

$$t \mapsto \sqrt{\frac{\arcsin(t)}{1-t^2}} \in \mathcal{C}^0\left(\left[0; \frac{1}{2}\right], \mathbb{R}\right)$$

Donc l'intégrale à du sens.

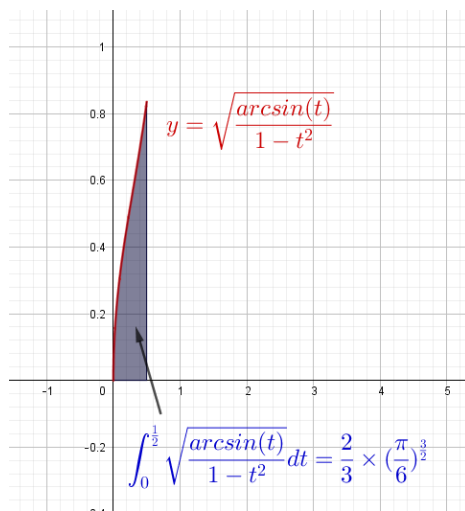
De plus on a :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\arcsin(t)}{1-t^2}} dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \sqrt{\arcsin(t)} dt = \int_0^{\frac{1}{2}} u'(t) \sqrt{u(t)} dt \text{ avec } u(t) = \arcsin(t)$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u'(t) \sqrt{u(t)} dt = \frac{2}{3} \left[u^{\frac{3}{2}}(t) \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \left(\arcsin^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) - \arcsin^{\frac{3}{2}}(0) \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{3}{2}}$$

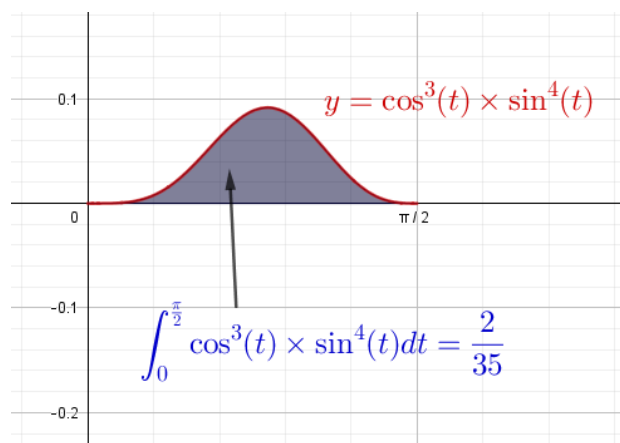
On a la courbe :



2) On a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t) \sin^4(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin^4(t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin^6(t) dt = \left[\frac{\sin^5(t)}{5} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{\sin^7(t)}{7} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{35}$$

On a la courbe suivant :



3) On sait que $t \mapsto (t^2 + t + 1)e^{-t} \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ donc l'intégrale à du sens.

On effectue une double IPP :

$$\int_{-1}^1 (t^2 + t + 1)e^{-t} dt = \underbrace{[-(t^2 + t + 1)e^{-t}]_{-1}^1}_{e - 3e^{-1}} + \int_{-1}^1 (2t + 1)e^{-t} dt$$

De plus on a :

$$\int_{-1}^1 (2t + 1)e^{-t} dt = [-(2t + 1)e^{-t}]_{-1}^1 + 2 \int_{-1}^1 e^{-t} dt = -e - 3e^{-1} - 2[e^{-t}]_{-1}^1 = -5e^{-1} + e$$

On en déduit donc que :

$$\int_{-1}^1 (t^2 + t + 1)e^{-t} dt = 2e - 8e^{-1}$$

Remarque :

On peut chercher directement une primitive de $t \mapsto (t^2 + t + 1)e^{-t}$ sans passer par une IPP.

On pose $g_{a,b,c}: x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{-x}$. On sait que $g_{a,b,c}$ est une primitive de $t \mapsto (t^2 + t + 1)e^{-t}$ si et seulement si :

$$\forall x \in [-1; 1], g'_{a,b,c}(x) = (2ax + b - ax^2 - bx - c)e^{-x} = (-ax^2 + x(2a - b) + b - c)e^{-x} = (x^2 + x + 1)e^{-x}$$

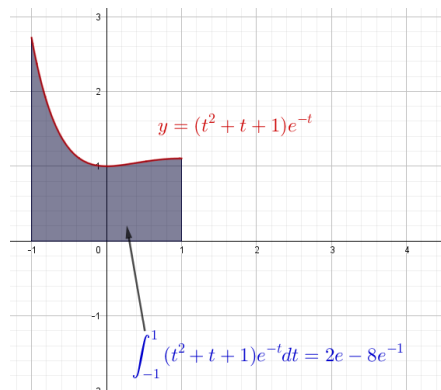
On identifie :

$$\begin{cases} a = -1 \\ 2a - b = 1 \\ b - c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \\ c = -4 \end{cases}$$

On a donc :

$$\int_{-1}^1 (t^2 + t + 1)e^{-t} dt = [(-x^2 - 3x - 4)e^{-x}]_{-1}^1 = 2e - 8e^{-1}$$

On a la courbe :



4) On sait que $t \mapsto (t^3 - 1)\text{ch}(t) \in \mathcal{C}([-1; 1], \mathbb{R})$ donc l'intégrale existe. De plus on a :

$$\int_{-1}^1 (t^3 - 1)\text{ch}(t) dt = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 (t^3 - 1)e^t dt + \int_{-1}^1 (t^3 - 1)e^{-t} dt \right)$$

Méthode 1 : On effectue une IPP

On a :

$$\int_{-1}^1 (t^3 - 1)e^t dt = \underbrace{[(t^3 - 1)e^t]_{-1}^1}_{=2e^{-1}} - 3 \int_{-1}^1 t^2 e^t dt$$

De plus on a :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 t^2 e^t dt &= [t^2 e^t]_{-1}^1 - 2 \int_{-1}^1 t e^t dt \\ &= e - e^{-1} - 2 \left([te^t]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^t dt \right) = e - e^{-1} - 2(e + e^{-1} - e + e^{-1}) = e - 5e^{-1} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\int_{-1}^1 (t^3 - 1)e^t dt = 17e^{-1} - 3e$$

De même on a :

$$\int_{-1}^1 (t^3 - 1)e^{-t} dt = \underbrace{[-(t^3 - 1)e^{-t}]_{-1}^1}_{=-2e} + 3 \int_{-1}^1 t^2 e^{-t} dt$$

De plus on a :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 t^2 e^{-t} dt &= [-t^2 e^{-t}]_{-1}^1 + 2 \int_{-1}^1 t e^{-t} dt \\ &= -e^{-1} + e^1 + 2 \left([-te^{-t}]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 e^{-t} dt \right) \\ &= -e^{-1} + e^1 + 2(-e^{-1} - e - [e^{-t}]_{-1}^1) \\ &= -e^{-1} + e^1 + 2(-e^{-1} - e - (e^{-1} - e)) \\ &= -5e^{-1} + e \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\int_{-1}^1 (t^3 - 1)e^{-t} dt = e - 15e^{-1}$$

On en déduit donc que :

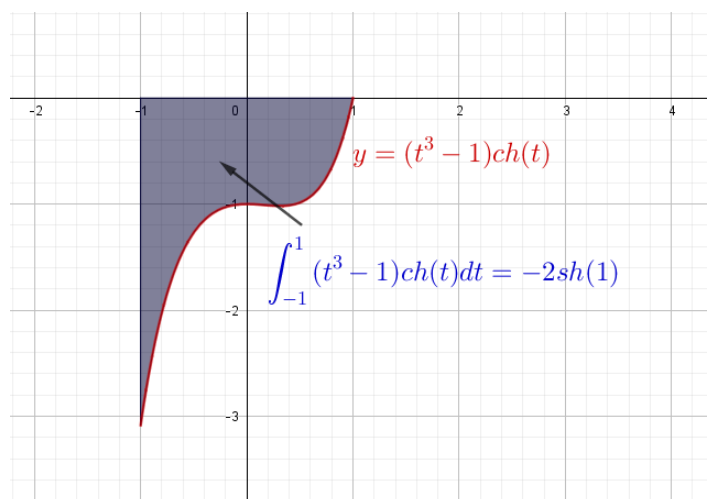
$$\int_{-1}^1 (t^3 - 1)\text{ch}(t) dt = \frac{1}{2}(17e^{-1} - 3e) + \frac{1}{2}(e - 15e^{-1}) = e^{-1} - e = -2\text{sh}(1)$$

Méthode 2 : Avec une fonction impaire

On a :

$$\int_{-1}^1 (t^3 - 1)\text{ch}(t) dt = \underbrace{\int_{-1}^1 t^3 \text{ch}(t) dt}_{=0 \text{ car } t \mapsto t^3 \text{ch}(t) \text{ est impaire}} - \int_{-1}^1 \text{ch}(t) dt = - \int_{-1}^1 \text{ch}(t) dt = -[\text{sh}(t)]_{-1}^1 = -2\text{sh}(1)$$

Avec la courbe :



Remarque : On a le théoème suivant. Soit $a \in \mathbb{R}^+$ et $f: [-a; a] \rightarrow \mathbb{R}$ impaire. On a alors :

$$\int_{-a}^a f(t)dt = 0$$

En effet il suffit d'écrire :

$$\int_{-a}^a f(t)dt = \int_{-a}^0 f(t)dt + \int_0^a f(t)dt$$

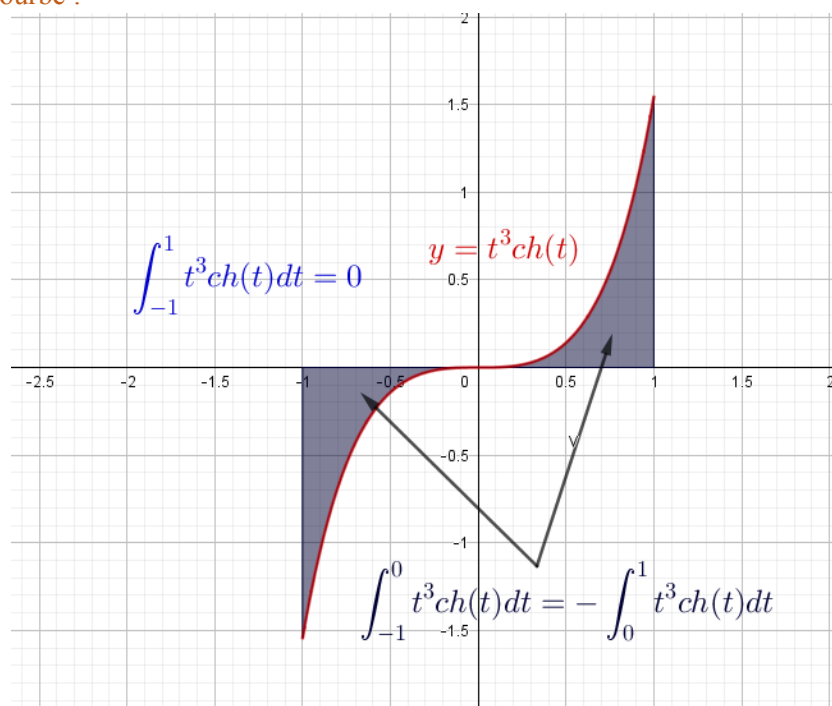
De plus avec le changement de variable $x = -t$ on a :

$$\int_a^0 f(-x)(-dx) = - \int_0^a f(x)dx \text{ car } f \text{ est impaire}$$

On a donc :

$$\int_{-a}^a f(t)dt = \int_{-a}^0 f(t)dt + \int_0^a f(t)dt = - \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(t)dt = 0$$

On peut le voir sur la courbe :



5) On sait que $\forall t \in \mathbb{R}, 2t^2 + 2t + 1 = 2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0$. On en déduit donc que :

$$t \mapsto \frac{1}{2t^2 + 2t + 1} \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$$

Donc l'intégrale a du sens !

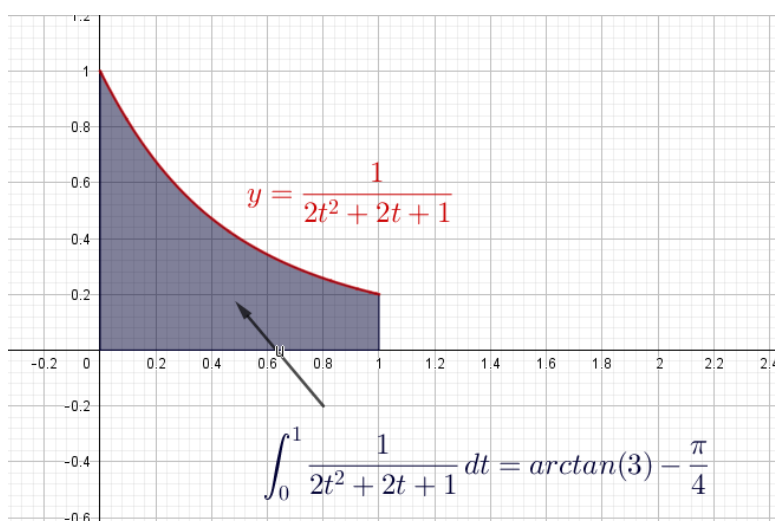
De plus on a :

$$\int_0^1 \frac{dt}{2t^2 + 2t + 1} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{(2t + 1)^2 + 1} = \int_0^1 \frac{u'(t)dt}{1 + u^2(t)} \text{ avec } u(t) = 2t + 1$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^1 \frac{dt}{2t^2 + 2t + 1} = [\arctan(2t + 1)]_0^1 = \arctan(3) - \arctan(1) = \arctan(3) - \frac{\pi}{4}$$

Avec la courbe :



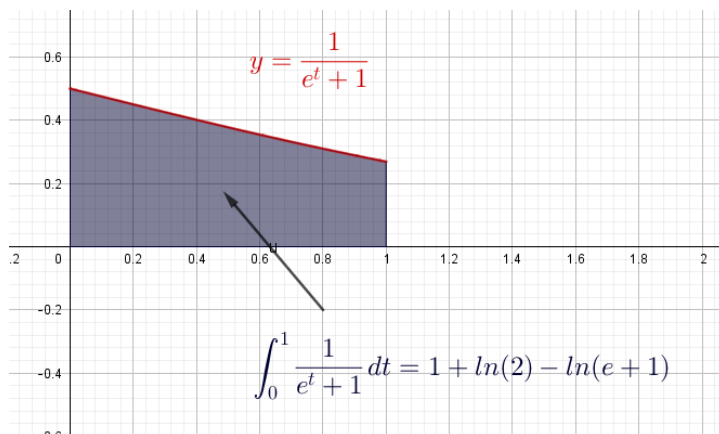
6) On sait que $\forall t \in \mathbb{R}, e^t + 1 > 0$. On en déduit donc que :

$$t \mapsto \frac{1}{e^t + 1} \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$$

Donc l'intégrale à du sens. De plus on a :

$$\int_0^1 \frac{dt}{e^t + 1} = \int_0^1 \frac{e^t + 1}{e^t + 1} dt - \int_0^1 \frac{e^t}{e^t + 1} dt = 1 - \ln(e^t + 1)_0^1 = 1 - \ln(1 + e) + \ln(2)$$

Avec la courbe :



Exercice B.5 : En posant $x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, calculer les intégrales suivantes :

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2 + \cos(t)} \quad 2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2 - \sin(t)} \quad 3) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\sin(t) - \cos(t) + \sqrt{2}}$$

1) On sait que $\forall t \in \mathbb{R}, 2 + \cos(t) > 0$ donc l'intégrale I_1 est bien définie.

De plus on sait que :

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \frac{t}{2} \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \text{ donc } \tan\left(\frac{t}{2}\right) \text{ est bien définie.}$$

On pose le changement de variable $x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$

a) Calcul des nouvelles bornes

$$\begin{cases} t = 0 \Rightarrow x = 0 \\ t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

b) Calcul du dt

On sait que :

$$x = \tan\left(\frac{t}{2}\right) \Rightarrow t = 2 \arctan(x) \text{ car } \frac{t}{2} \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$$

De plus on sait que :

$$t: x \mapsto 2 \arctan(x) \in \mathcal{D}([0; 1]) \text{ et } \frac{dt}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$

On en déduit donc que :

$$dt = \frac{2}{1+x^2} dx$$

c) On remplace tout pour obtenir une nouvelle intégrale

De plus on sait que :

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], \cos(2t) = \frac{\cos^2(t) - \sin^2(t)}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} = \frac{1 - \tan^2(t)}{1 + \tan^2(t)}$$

On en déduit donc que :

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \cos(t) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2 + \cos(t)} = \int_0^1 \frac{1}{2 + \frac{1-x^2}{1+x^2}} \times \frac{2}{1+x^2} dx = 2 \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 3} dx$$

d) Calcul de la nouvelle intégrale

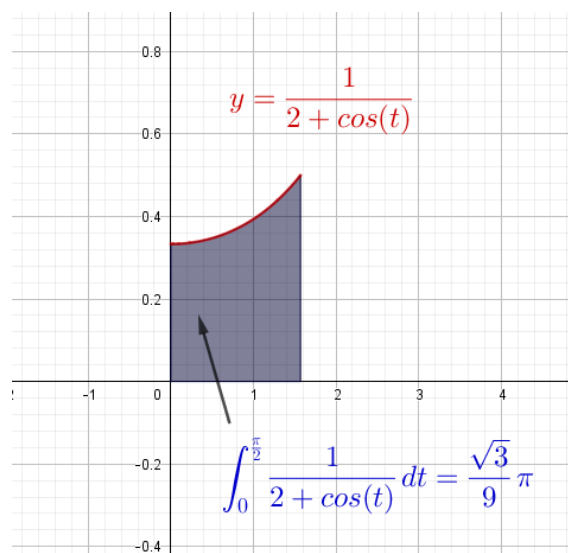
On sait que :

$$2 \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 3} dx = \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left[\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) \right]_0^1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2 + \cos(t)} = \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$$

On a la courbe suivante :



2) On sait que $t \mapsto 2 - \sin(t)$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc I_2 existe.

De plus on sait que :

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \frac{t}{2} \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \text{ donc } \tan\left(\frac{t}{2}\right) \text{ est bien définie.}$$

On pose le changement de variable $x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$

a) Calcul des nouvelles bornes

$$\begin{cases} t = 0 \Rightarrow x = 0 \\ t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

b) Calcul du dt

On sait que :

$$x = \tan\left(\frac{t}{2}\right) \Rightarrow t = 2 \arctan(x) \text{ car } \frac{t}{2} \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$$

De plus on sait que :

$$t: x \mapsto 2 \arctan(x) \in \mathcal{D}([0; 1]) \text{ et } \frac{dt}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$

On en déduit donc que :

$$dt = \frac{2}{1+x^2} dx$$

c) On remplace tout pour obtenir une nouvelle intégrale

De plus on sait que :

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], \sin(2t) = \frac{2 \cos(t) \sin(t)}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} = \frac{2 \tan(t)}{1 + \tan^2(t)}$$

On en déduit donc que :

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \sin(t) = \frac{2x}{1+x^2}$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2 - \sin(t)} = \int_0^1 \frac{1}{2 - \frac{2x}{1+x^2}} \times \frac{2}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - x + 1} dx$$

d) Calcul de la nouvelle intégrale

On sait que :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 - x + 1} dx = \int_0^1 \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx$$

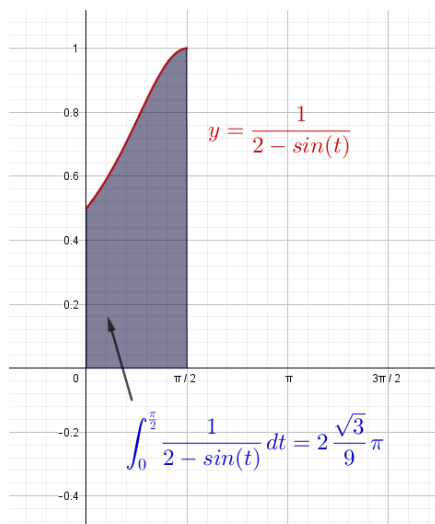
On en déduit donc que :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 - x + 1} dx = \frac{4}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^1 = \frac{4\sqrt{3}}{3} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2 + \cos(t)} = \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$$

On a la courbe suivante :



3) On sait que :

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], \sin(t) - \cos(t) + \sqrt{2} = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(t) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(t) + 1 \right) = \sqrt{2} \left(-\cos \left(t + \frac{\pi}{4} \right) + 1 \right)$$

Or on sait que :

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], t + \frac{\pi}{4} \in t \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos \left(t + \frac{\pi}{4} \right) \in \left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

On en déduit donc que :

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], \sin(t) - \cos(t) + \sqrt{2} > 0$$

Donc I_3 a du sens. De plus :

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], \frac{t}{2} \in \left[0; \frac{\pi}{8}\right] \text{ donc } \tan \left(\frac{t}{2} \right) \text{ est bien définie.}$$

De plus on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\sin(t) - \cos(t) + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{1 - \cos \left(t + \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1 - \cos(u)} \quad (\text{on a posé } u = t + \frac{\pi}{4})$$

On pose le changement de variable $x = \tan \left(\frac{u}{2} \right)$

a) Calcul des nouvelles bornes

$$\begin{cases} u = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 1 \\ u = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \tan \left(\frac{\pi}{8} \right) \end{cases}$$

b) Calcul du dt

On sait que :

$$x = \tan \left(\frac{u}{2} \right) \Rightarrow u = 2 \arctan(x) \text{ car } \frac{u}{2} \in \left[\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}\right]$$

De plus on sait que :

$$u: x \mapsto 2 \arctan(x) \in \mathcal{D}([0; 1]) \text{ et } \frac{du}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$

On en déduit donc que :

$$du = \frac{2}{1+x^2} dx$$

c) On remplace tout pour obtenir une nouvelle intégrale

De plus on sait que :

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], \cos(u) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin(t) - \cos(t) + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1 - \cos(u)} = \sqrt{2} \int_{\tan(\frac{\pi}{8})}^1 \frac{1}{1+x^2 - (1-x^2)} dx$$

d) Calcul de la nouvelle intégrale

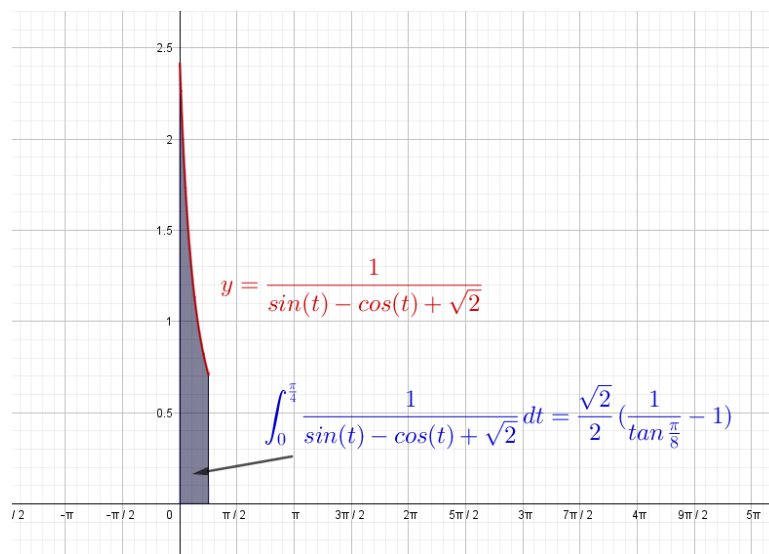
On sait que :

$$\sqrt{2} \int_{\tan(\frac{\pi}{8})}^1 \frac{1}{1+x^2 - (1-x^2)} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\tan(\frac{\pi}{8})}^1 \frac{1}{x^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[-\frac{1}{x} \right]_{\tan(\frac{\pi}{8})}^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{8})} - 1 \right)$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\sin(t) - \cos(t) + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{8})} - 1 \right)$$

On a la courbe suivante :



Remarque : On peut trouver facilement une valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$. En effet on sait que :

$$\forall a \in \left[0; \frac{\pi}{8}\right], \tan(2a) = \frac{2 \tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$$

On en déduit donc que :

$$\frac{2 \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)} = 1 \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) \text{ est solution de } X^2 + 2X - 1 = 0$$

Or on sait que :

$$X^2 + 2X - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{-2 - \sqrt{8}}{2} = -1 - \sqrt{2} \\ \text{ou} \\ X = \sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

Or on sait que $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ car $\frac{\pi}{8} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. On en déduit donc que :

$$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\sin(t) - \cos(t) + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2} - 1} - 1 \right) = 1$$

Ainsi on peut écrire que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\sin(t) - \cos(t) + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)} - 1 \right) = 1$$

Partie C : Primitives et intégrales des fonctions rationnelles

Exercice C.1 : Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant leur domaine de validité

$$f_1: x \mapsto \frac{1}{x^2 + x - 6}; \quad f_2: x \mapsto \frac{x+3}{x^2 + x - 6}; \quad ; f_3(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 3}; \quad f_4(x) = \frac{2x^2 + x - 9}{x^2 + 2x + 3}; \quad f_5: x \mapsto \frac{7x+1}{x^2 - 6x + 9};$$

1) On sait que :

$$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -3$$

On en déduit donc que f_1 admet une primitive sur $] -\infty; -3[$ ou sur $] -3; 2[$ ou sur $] 2; +\infty[$.

De plus on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}, \frac{1}{x^2 + x - 6} = \frac{1}{(x+3)(x-2)} = \frac{1}{5} \frac{1}{x-2} - \frac{1}{5} \frac{1}{x+3}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}, \int \frac{1}{x^2 + x - 6} dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{5} \int \frac{1}{x+3} dx = \frac{1}{5} \ln(|x-2|) - \frac{1}{5} \ln(|x+3|) + c, c \in \mathbb{R}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-3; 2], \int \frac{1}{x^2 + x - 6} dx &= \frac{1}{5} \ln\left(\frac{x-2}{x+3}\right) + c, c \in \mathbb{R} \\ \forall x \in]-3; 2[, \int \frac{1}{x^2 + x - 6} dx &= \frac{1}{5} \ln\left(\frac{2-x}{x+3}\right) + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2) On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}, f(x) = \frac{x+3}{x^2 + x - 6} = \frac{1}{x-2}$$

On peut donc prolonger f par continuité sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ en posant $f(-3) = -\frac{1}{5}$

On en déduit que f admet une primitive sur $] -\infty; 2[$ et sur $] 2; +\infty[$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, \int \frac{x+3}{x^2 + x - 6} dx = \ln(|x-2|) + c, c \in \mathbb{R}$$

3) On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 > 0$$

On en déduit donc que $f_3 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et :

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + c, c \in \mathbb{R}$$

On en déduit donc que :

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + c, c \in \mathbb{R}$$

4) On sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 > 0$$

On en déduit donc que $f_4 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{2x^2 + x - 9}{x^2 + 2x + 3} = \frac{2(x^2 + 2x + 3) - 3x - 15}{x^2 + 2x + 3} = 2 - \frac{3x + 15}{x^2 + 2x + 3}$$

On en déduit donc que :

$$\int \frac{2x^2 + x - 9}{x^2 + 2x + 3} dx = 2x - \int \frac{3x + 15}{x^2 + 2x + 3} dx$$

On calcule :

$$\begin{aligned} & \int \frac{3x + 15}{x^2 + 2x + 3} dx \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 3} dx + 12 \int \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx = \frac{3}{2} \ln(x^2 + 2x + 3) + 6\sqrt{2} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\int \frac{3x - 3}{x^2 + 2x + 3} dx = \frac{3}{2} \ln(x^2 + 2x + 3) + 6\sqrt{2} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + c, c \in \mathbb{R}$$

On en déduit donc que :

$$\int \frac{2x^2 + x - 9}{x^2 + 2x + 3} dx = 2x - \frac{3}{2} \ln(x^2 + 2x + 3) - 6\sqrt{2} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + c, c \in \mathbb{R}$$

5) On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}, \int \frac{7x + 1}{x^2 - 6x + 9} dx &= \frac{7}{2} \int \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 9} dx + 22 \int \frac{1}{(x - 3)^2} dx \\ &= \frac{7}{2} \ln(x^2 - 6x + 9) - \frac{22}{x - 3} + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}, \int \frac{7x + 1}{x^2 - 6x + 9} dx = 7 \ln(|x - 3|) - \frac{22}{x - 3} + c, c \in \mathbb{R}$$

Exercice C.2 : Calculer :

$$I_1 = \int_0^2 \frac{1}{x^3 + 1} dx$$

On sait que $x \mapsto x^3 + 1 \in \mathcal{C}([0; 2], \mathbb{R})$ donc I_1 a du sens. De plus on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^3 + 1 = x^3 - (-1)^3 = (x - (-1))(x^2 - x + 1) = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

De plus on sait que $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ donc la factorisation sur $\mathbb{R}$ est maximale !

On décompose à présent $\frac{1}{x^3 + 1}$ en éléments simples :

$$\forall x \in [0; 2], \frac{1}{x^3 + 1} = \frac{1}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{a}{x + 1} + \frac{bx + c}{x^2 - x + 1}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0; 2], \frac{a}{x + 1} + \frac{bx + c}{x^2 - x + 1} &= \frac{a(x^2 - x + 1) + (bx + c)(x + 1)}{x^3 + 1} \\ &= \frac{x^2(a + b) + x(b + c - a) + a + c}{x^3 + 1} \end{aligned}$$

Par identification on en déduit donc que :

$$\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{a}{x + 1} + \frac{bx + c}{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ b + c - a = 0 \\ a + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \\ c = \frac{2}{3} \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in [0; 2], \frac{1}{x^3 + 1} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2 - x + 1} \right)$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^2 \frac{1}{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \left(\int_0^2 \frac{1}{x+1} dx - \int_0^2 \frac{x-2}{x^2 - x + 1} dx \right)$$

On calcule les intégrales séparément :

$$\int_0^2 \frac{1}{x+1} dx = [\ln(x+1)]_0^2 = \ln(3)$$

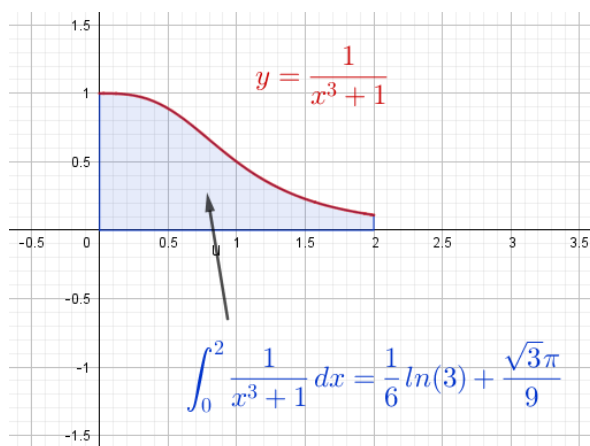
De plus on a :

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{x-2}{x^2 - x + 1} dx &= \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{2x-1}{x^2 - x + 1} dx - \frac{3}{2} \int_0^2 \frac{1}{x^2 - x + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} [\ln(x^2 - x + 1)]_0^2 - \frac{3}{2} \int_0^2 \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(3) - \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \int_0^2 \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(3) - 2 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2} \ln(3) - \sqrt{3} \left(2 \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln(3) - \sqrt{3} \times \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$I_1 = \int_0^2 \frac{1}{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \ln(3) + \sqrt{3} \times \frac{\pi}{3} \right)$$

On a la courbe suivante :



Exercice C.3 : On cherche à calculer :

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin(t) + \tan(t)} dt$$

1) En effectuant le changement de variable $u = \cos(t)$, montrer que l'on peut écrire :

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} R(u) du \text{ avec } R \text{ une fraction rationnelle.}$$

2) En déduire la valeur de l'intégrale I.

1) On sait que :

$$\forall t \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right], \sin(t) + \tan(t) > 0$$

Donc I_1 existe. De plus effectuons le changement de variable $u = \cos(t)$.

a) Calcul des nouvelles bornes

$$\begin{cases} t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow u = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ t = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = \frac{1}{2} \end{cases}$$

b) Calcul du dt

On sait que :

$$u = \cos(t) \Rightarrow t = \arccos(u) \text{ car } t \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right] \subset [0; \pi]$$

De plus on sait que :

$$t: u \mapsto \arccos(u) \in \mathcal{D} \left(\left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \right) \text{ et } \frac{dt}{du} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

On en déduit donc que :

$$dt = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

c) On remplace tout pour obtenir une nouvelle intégrale

De plus on sait que :

$$\forall t \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right], \sin(t) = \sqrt{1 - \cos^2(t)} = \sqrt{1 - u^2} \text{ et } \tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = \frac{\sqrt{1-u^2}}{u}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin(t) + \tan(t)} dt &= \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{-1}{\sqrt{1-u^2} + \frac{\sqrt{1-u^2}}{u}} \times \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{1-u^2 + \frac{1-u^2}{u}} du \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{u}{-u^3 - u^2 + u + 1} du \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin(t) + \tan(t)} dt = - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{u}{u^3 + u^2 - u - 1} du$$

On a donc ici :

$$\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } R(u) = -\frac{u}{u^3 + u^2 - u - 1}$$

2) On doit factoriser le polynôme $u^3 + u^2 - u - 1 = P(u)$

On voit que $P(1) = 0$, on peut donc factoriser P par $u - 1$. On a :

$$\forall u \in \mathbb{R}, P(u) = u^3 + u^2 - u - 1 = (u - 1)(u^2 + 2u + 1) = (u - 1)(u + 1)^2$$

On décompose à présent en éléments simples.

ATTENTION à la décomposition en éléments simples de :

$$\frac{1}{(u-1)(u+1)^2}$$

On peut le faire de deux façons.

On cherche a, b et c réels tels que :

$$\frac{1}{(u-1)(u+1)^2} = \frac{a}{u-1} + \frac{b}{u+1} + \frac{c}{(u+1)^2}$$

Méthode 1 : Astuce

On sait que :

$$1 = \frac{1}{4}[(u+1)^2 - (u^2 - 1) - 2(u-1)]$$

On a alors :

$$\frac{1}{(u-1)(u+1)^2} = \frac{1}{4} \frac{(u+1)^2 - (u^2 - 1) - 2(u-1)}{(u-1)(u+1)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} - \frac{2}{(u+1)^2} \right)$$

Méthode 2 : Comme en SI

On écrit :

$$\frac{1}{(u-1)(u+1)^2} = \frac{a}{u-1} + \frac{b}{1+u} + \frac{c}{(1+u)^2}$$

On met au même dénominateur :

$$\begin{aligned} \frac{a}{u-1} + \frac{b}{1+u} + \frac{c}{(1+u)^2} &= \frac{a(1+u)^2 + b(u^2 - 1) + c(u-1)}{(u-1)(u+1)^2} \\ &= \frac{u^2(a+b) + u(2a+c) + a-b-c}{(u-1)(u+1)^2} \end{aligned}$$

On identifie :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+c=0 \\ a-b-c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{1}{4} \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\frac{1}{(u-1)(u+1)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} - \frac{2}{(u+1)^2} \right)$$

A présent on peut calculer l'intégrale de cette fonction rationnelle !

On a :

$$-\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{u}{u^3 + u^2 - u - 1} du = \frac{1}{4} \left(\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{2u}{(u+1)^2} du + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{u}{u+1} du - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{u}{u-1} du \right)$$

On calcule séparément les intégrales :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{2u}{(u+1)^2} du = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{2u+2}{(u+1)^2} du - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{2}{(u+1)^2} du$$

$$= [2 \ln(1+u)]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \left[\frac{2}{u+1} \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= 2 \ln \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - 2 \ln \left(\frac{3}{2} \right) + 4(2 - \sqrt{3}) - \frac{4}{3}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{u}{u+1} du = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{u+1}{u+1} du - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{u+1} du = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - [\ln(1+u)]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \ln \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \ln \left(\frac{3}{2} \right)$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{u}{u-1} du = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{u-1}{u-1} du + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{u-1} du = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + [\ln(1-u)]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \ln \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \ln \left(\frac{1}{2} \right)$$

On en déduit donc que :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{2u}{(u+1)^2} du + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{u}{u+1} du - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{u}{u-1} du$$

$$= 2 \ln \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - 2 \ln \left(\frac{3}{2} \right) + 4(2 - \sqrt{3}) - \frac{4}{3} + \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \ln \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \ln \left(\frac{3}{2} \right)$$

$$- \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \ln \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \ln \left(\frac{1}{2} \right) \right)$$

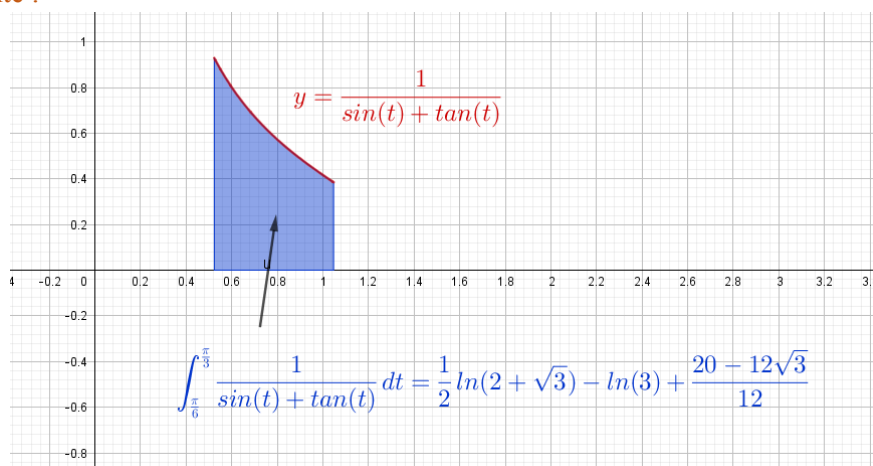
$$= \ln \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \ln \left(\frac{3}{2} \right) + \ln \left(\frac{1}{2} \right) - \ln \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{4}{5}(\sqrt{3}-2) - \frac{4}{3}$$

$$= 2 \ln(2 + \sqrt{3}) - \ln(3) + \frac{20 - 12\sqrt{3}}{3}$$

On en déduit donc que :

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin(t) + \tan(t)} dt = \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{1}{4} \ln(3) + \frac{20 - 12\sqrt{3}}{12}$$

On a la courbe suivante :



Partie D : Suites d'intégrale

Exercice D.1 : On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx$$

1) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 t^n e^t dt$$

2) Donner une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n

3) Montrer que la suite $(I_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

1) Il faut faire un changement de variable. On pose $x = e^t$.

a) Calcul des nouvelles bornes

$$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ x = e \Rightarrow t = 1 \end{cases}$$

b) Calcul du dt

De plus on sait que :

$$x: t \mapsto e^t \in \mathcal{D}([0; 1]) \text{ et } \frac{dx}{dt} = e^t$$

On en déduit donc que :

$$dx = e^t dt$$

c) On remplace tout pour obtenir une nouvelle intégrale

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx = \int_0^1 \ln^n(e^t) e^t dt = \int_0^1 t^n e^t dt$$

2) On pose :

$$f_n = t \mapsto t^n e^t$$

On sait que $f_n \in \mathcal{D}([0; 1])$ et :

$$\forall t \in [0; 1], f'_{n+1}(t) = ((n+1)t^n + t^{n+1})e^t$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^1 f'_{n+1}(t) dt = \int_0^1 ((n+1)t^n + t^{n+1})e^t dt = (n+1)I_n + I_{n+1}$$

De plus on sait que :

$$\int_0^1 f'_{n+1}(t) dt = f_{n+1}(1) - f_{n+1}(0) = e$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = e - (n+1)I_n$$

3) On sait que :

$$\begin{aligned} & \forall t \in [0; 1], 0 \leq e^t \leq e \\ & \Rightarrow \forall t \in [0; 1], 0 \leq t^n e^t \leq t^n e \\ & \Rightarrow \int_0^1 0 dt \leq \int_0^1 t^n e^t dt \leq \int_0^1 t^n e dt \\ & \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1} \end{aligned}$$

De plus on sait que :

$$\lim_n \frac{e}{n+1} = 0$$

On en déduit d'après le théorème de gendarmes que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

Exercice D.2 : On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin(x) dx$$

- 1) Etablir une formule de récurrence entre I_{n+2} et I_n .
 2) En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, I_{2p} et I_{2p+1} sous forme de somme.

1) On sait que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n+2} \sin(x) dx = [-x^{n+2} \cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n+1} \cos(x) dx \\ &= (n+2) \left([x^{n+1} \sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin(x) dx \right) \\ &= (n+2) \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} - (n+1) I_n \right) \end{aligned}$$

2) On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} I_{2p} &= (2p) \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-1} - (2p)(2p-1) I_{2p-2} \\ &= (2p) \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-1} - (2p)(2p-1) \left((2p-2) \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-3} - (2p-2)(2p-3) I_{2p-4} \right) \\ &= (2p) \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-1} - \frac{(2p)!}{(2p-3)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-3} + \frac{(2p)!}{(2p-4)!} I_{2p-4} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p} = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \frac{(2p)!}{(2p-1-2k)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-1-2k} + (-1)^p (2p)! I_0$$

Or on sait que :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx = 1$$

On en déduit donc que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p} = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \frac{(2p)!}{(2p-1-2k)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-1-2k} + (-1)^p (2p)!$$

De même on a :

$$\begin{aligned} I_{2p+1} &= (2p+1) \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p} - (2p+1)(2p) I_{2p-1} \\ &= (2p+1) \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p} - (2p+1)(2p) \left((2p-1) \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-2} - (2p-1)(2p-2) I_{2p-3} \right) \\ &= \frac{(2p+1)!}{(2p)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p} - \frac{(2p+1)!}{(2p-2)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-2} + \frac{(2p+1)!}{(2p-3)!} I_{2p-3} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p+1} = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \frac{(2p+1)!}{(2p-2k)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-2k} + (-1)^p (2p+1)! I_1$$

Or on sait que :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) dx = [-x \cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = 1$$

On en déduit donc que :

$$p \in \mathbb{N}, I_{2p+1} = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \frac{(2p+1)!}{(2p-2k)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-2k} + (-1)^p (2p+1)!$$

On en déduit donc que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{2p+1} \sin(x) \, dx = \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{(2p+1)!}{(2p-2k)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-2k}$$