

Fiche TD 8 : Calcul de primitives

Partie A : Calculs classiques de primitives et intégrale

Exercice A.1 : Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant leur domaine de validité

$$f_1: x \mapsto x^3 + 5x^2 - 3x + 1; \quad f_2: x \mapsto \cos(3x) \quad ; f_3(x) = e^{-5x} \quad ; f_4(x) = \frac{1}{x+2}; \quad f_5: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$f_6: x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \quad f_7: x \mapsto \frac{1}{x^4}; \quad f_8: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} \quad ; f_9(x) = \sqrt{x} \quad ; f_{10}(x) = x\sqrt{x};$$

Exercice A.2 : Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant leur domaine de validité

$$f_1: x \mapsto \frac{x}{1+x^2}; \quad f_2: x \mapsto \frac{x}{1+x^4} \quad ; f_3(x) = \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)} \quad ; f_4(x) = \frac{1}{x \ln(x)}; \quad f_5: x \mapsto \cos^4(x);$$

$$f_6: x \mapsto \cos(x) \sin^4(x) \quad f_7: x \mapsto \cos^3(x) \sin^4(x) \quad f_8: x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$$

Exercice A.3 : Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^3} dx$$

Exercice A.4 : On cherche à calculer de deux façons différentes l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 e^{-2x} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$$

1) a) On pose la fonction :

$$g_{a,b} : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \left(a \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + b \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right) e^{-2x} \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de a et b pour que $g_{a,b}$ soit une primitive de $x \mapsto e^{-2x} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

b) En déduire la valeur de I.

2) En utilisant les complexes, déterminer une primitive de $x \mapsto e^{-2x} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ puis retrouvez I.

Partie B : Changement de variable et intégration par partie

Exercice B.1 : Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant leur domaine de validité

$$f_1: x \mapsto xe^{3x}; \quad f_2: x \mapsto (x+3) \cos(3x) \quad ; f_3(x) = \arcsin(x) \quad ; f_4(x) = x \arctan(x); \quad f_5: x \mapsto x^2 \cos(x);$$

Exercice B.1 BIS : Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 xe^{3x} dx; \quad I_2 = \int_0^\pi (x+3) \cos(3x) dx; \quad I_3 = \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(x) dx; \quad I_4 = \int_0^1 x \arctan(x) dx; \quad I_5 = \int_0^\pi x^2 \cos(x) dx$$

Exercice B.2 : A l'aide d'un changement de variable (ils sont donnés à la fin du TD pour vous aider), déterminer une primitive des fonctions suivantes et préciser le domaine de validité :

$$1. f_1: x \mapsto \frac{x^7}{(x^4+1)^2} \quad 2. f_2: x \mapsto \frac{1}{\cosh(x)} \quad 3. f_3: x \mapsto \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} \quad 4. f_4: x \mapsto e^{\sqrt{x}}$$

$$5. f_5: x \mapsto \frac{1}{e^x(1+e^x)} \quad 6. f_6: x \mapsto \frac{3}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \quad 7. f_7: x \mapsto \frac{1}{\tan(x)+1}$$

Exercice B.2 BIS Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variable (ils sont donnés à la fin du TD pour vous aider) :

$$I_1 = \int_{-1}^1 \frac{x^7}{(1+x^4)^2} dx; I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{ch(x)}; I_3 = \int_1^2 \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx; I_4 = \int_0^2 e^{\sqrt{x}} dx; I_5 = \int_{-1}^2 \frac{dx}{e^x(1+e^x)}$$

$$I_6 = \int_2^3 \frac{3}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx; I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\tan(x)+1}$$

Exercice B.3 : Déterminer les valeurs des primitives suivantes :

$$1) \int_0^x t \ln(t^2 + 1) dt; 2) \int_0^x (t^2 - t + 3)e^{2t} dt, 3) \int_0^x \ln(1 + t^2) dt$$

$$4) \int_0^x t \sin^3(t) dt, 5) \int_0^x \sqrt{16t^2 + 9} dt \quad 6) \int_0^x \operatorname{sh}(t) \sin(t) dt$$

Exercice B.4 : Calculer :

$$1) \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\arcsin(t)}{1-t^2}} dt \quad 2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t) \sin^4(t) dt \quad 3) \int_0^1 (t^2 + t + 1)e^{-t} dt$$

$$4) \int_{-1}^1 (t^3 - 1)ch(t) dt \quad 5) \int_0^1 \frac{dt}{2t^2 + 2t + 1} \quad 6) \int_0^1 \frac{dt}{e^t + 1}$$

Exercice B.5 : En posant $x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, calculer les intégrales suivantes :

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2 + \cos(t)} \quad 2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2 - \sin(t)} \quad 3) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\sin(t) - \cos(t) + \sqrt{2}}$$

Partie C : Primitives et intégrales des fonctions rationnelles

Exercice C.1 : Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant leur domaine de validité

$$f_1: x \mapsto \frac{1}{x^2 + x - 6}; \quad f_2: x \mapsto \frac{x+3}{x^2 + x - 6}; \quad ; f_3(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 3}; \quad f_4(x) = \frac{2x^2 + x - 9}{x^2 + 2x + 3}; \quad f_5: x \mapsto \frac{7x+1}{x^2 - 6x + 9};$$

Exercice C.2 : Calculer :

$$I_1 = \int_0^2 \frac{1}{x^3 + 1} dx$$

Exercice C.3 : On cherche à calculer :

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin(t) + \tan(t)} dt$$

1) En effectuant le changement de variable $u = \cos(t)$, montrer que l'on peut écrire :

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} R(u) du \quad \text{avec } R \text{ une fraction rationnelle.}$$

2) En déduire la valeur de l'intégrale I .

Partie D : Suites d'intégrale

Exercice D.1 : On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx$$

1) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 t^n e^t dt$$

2) Donner une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n

3) En déduire que la suite $(I_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

Exercice D.2 : On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin(x) dx$$

1) Etablir une formule de récurrence entre I_{n+1} et I_n .

2) En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, I_{2p} et I_{2p+1} sous forme de somme.