Programme de Colle n°8
PCSI 2025-2026
(17 novembre au 21 novembre)

Chapitre 7 : Ensemble et application

b) Ensembles

Ensemble, appartenance. Ensemble vide. Inclusion. Partie (ou sous-ensemble).	
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, complémentaire.	Notation $A \setminus B$ pour la différence et $E \setminus A$, $\overline{A}$ et A^c pour le complémentaire.
Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.	
Ensemble des parties d'un ensemble.	Notation $\mathscr{P}(E)$.
Recouvrement disjoint, partition.	

d) Applications

Application d'un ensemble dans un ensemble. Graphe d'une application.	Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. Notations $\mathscr{F}(E,F)$ et F^E.
Famille d'éléments d'un ensemble.	
Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble.	Notation $\mathbb{1}_A$.
Restriction et prolongement.	Notation $f\|_A$.
Image directe.	Notation $f(A)$.
Image réciproque.	Notation $f^{-1}(B)$. Cette notation pouvant prêter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre.
Composition.	
Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.	
Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.	Notation f^{-1}. Compatibilité de cette notation avec celle de l'image réciproque.

Chapitre 8 – Primitives

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Calcul de primitives	
Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives.	Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue f, $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ a pour dérivée f. On pourra noter $\int^x f(t)\mathrm{d}t$ une primitive générique de f.
Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales.	Primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$.
Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées.
Intégration par parties, changement de variable.	Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

Remarque : Il est demandé aux élèves de bien comprendre :

- Les primitives usuelles
- L'intégration par partie
- Le changement de variable
- La décomposition en éléments simples

Questions de cours :

Application II.a.4 : Démontrer l'équivalence suivante :

$$f \text{ est injective sur } E \iff \forall (A,B) \in \mathcal{P}(E), f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

Propriété III.b.2 : Soient E, F deux ensembles tels que $f \in \mathcal{F}(E;F)$ et $g \in \mathcal{F}(F;G)$. On a :

- f et g injectives ⇒ g o f injective
  g o f injective ⇒ f injective
- f et g surjectives ⇒ g o f surjective
  g o f surjective ⇒ g surjective
- f et g bijectives ⇒ g o f bijective
  g o f bijective ⇒ f injective et g surjective

Propriété III.a.1 : Soit $(f,g) \in \left(\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{K})\right)^2$. On a alors :

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

Savoir calculer des primitives du type :

$$f: x \mapsto \frac{ax+b}{p_0x^2 + p_1x + p_2}$$

Exercices types

Exercice A.2 : Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant leur domaine de validité

$$f_1: x \longmapsto \frac{x}{1+x^2};\ f_2: x \longmapsto \frac{x}{1+x^4}\ ;f_3(x) = \frac{sin(x)}{1+cos^2(x)}\ ;f_4(x) = \frac{1}{x\,ln(x)};\ f_5: x \longmapsto cos^4(x);$$

$$f_6: x \longmapsto cos(x)\,sin^4(x) \quad f_7: x \longmapsto cos^3(x)\,sin^4(x) \quad f_8: x \longmapsto \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$$

Exercice A.3 : Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx,\ \ I_2 = \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^3}dx$$

Exercice B.1 : Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant leur domaine de validité

$$f_1: x \longmapsto xe^{3x};\ f_2: x \longmapsto (x+3)\,cos(3x)\ \ ;f_3(x) = arcsin(x)\ \ ;f_4(x) = x\,arctan(x);\ f_5: x \longmapsto x^2\,cos(x);$$

Exercice B.1 BIS : Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 xe^{3x}dx\,;I_2 = \int_0^\pi (x+3)\cos(3x)\,dx;I_3 = \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(x)\,dx\,;I_4 = \int_0^1 xarctan(x)dx\,;I_5 = \int_0^\pi x^2\cos(x)\,dx$$

Exercice B.2 : A l'aide d'un changement de variable, déterminer une primitive des fonctions suivantes et préciser le domaine de validité :

$$1.\,f_1: x \mapsto \frac{x^7}{(x^4+1)^2} \quad 2.\,f_2: x \mapsto \frac{1}{ch(x)} \quad 3.\,f_3: x \mapsto \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} \quad 4.\,f_4: x \mapsto e^{\sqrt{x}}$$

Calcul de :

$$I_5 = \int_{-1}^2 \frac{dx}{e^x(1+e^x)}$$

$$I_6 = \int_2^3 \frac{3}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx \ ; I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{tan(x)+1}$$

Exercice B.5 : En posant $x = tan\left(\frac{t}{2}\right)$, calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{dt}}{2+\cos(\mathrm{t})}$ 2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{dt}}{2-\sin(\mathrm{t})}$ 3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{dt}}{\sin(\mathrm{t})-\cos(\mathrm{t})+\sqrt{2}}$