Programme de Colle n°9
Du 24 au 28 novembre 2025

Chapitre 8 – Primitives

Contenus	Capacités & commentaires
a) Calcul de primitives	
Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives.	Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue f, $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ a pour dérivée f. On pourra noter $\int^{x} f(t)\mathrm{d}t$ une primitive générique de f.
Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales.	Primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$.
Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées.
Intégration par parties, changement de variable.	Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

Chapitre 9 : Suites numériques

Nombres réels et suites numériques

L'objectif de cette section est de donner une base solide à l'étude des suites réelles, notamment les suites définies par une relation de récurrence.

Dans l'étude des suites, on distingue nettement les aspects qualitatifs (monotonie, convergence, divergence) des aspects quantitatifs (majoration, encadrement, vitesse de convergence ou de divergence).

Contenus	Capacités & commentaires
a) Propriété de la borne supérieure	
Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$. Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure). Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous $a, b \in X$ tels que $a \leqslant b$, $[a, b] \subset X$.	Notations $\sup X$, $\inf X$. On convient que $\sup X = +\infty$ si X est non majorée.
b) Généralités sur les suites réelles	
Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone. Mode de définition d'une suite réelle : explicite, implicite, par récurrence.	Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $\left(\lvert u_n\rvert\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Limite d'une suite réelle	
Limite finie ou infinie d'une suite. Unicité de la limite.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Notations $u_n \longrightarrow \ell$, $\lim u_n$.
Suite convergente, divergente. Toute suite convergente est bornée.	
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.	Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.
Passage à la limite d'une inégalité large. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.	
Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$).	Utilisation d'une majoration de la forme $\lvert u_n - \ell \rvert \leqslant v_n$, où (v_n) converge vers 0.
d) Suites monotones	
Théorème de la limite monotone. Théorème des suites adjacentes.	
Approximations décimales d'un réel.	Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès. Tout réel est limite d'une suite de rationnels.
e) Suites extraites	
Suite extraite.	Tout développement théorique sur les suites extraites est hors programme.
Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite.	Utilisation pour montrer la divergence d'une suite. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ, alors (u_n) tend vers ℓ. Le théorème de Bolzano-Weierstrass est hors programme.

Remarque : Nous n'avons pas fait beaucoup d'exercices sur les suites numériques. L'accent sera mis sur des calculs pratiques de primitives et d'intégrales, notamment en vu du DS de samedi prochain.

Questions de cours

Propriété III.b.4 : Si la suite u converge, alors sa limite est unique.

Propriété III.b.5 : On a l'implication suivante :

$$\lim u_n = \ell \Longrightarrow \lim |u_n| = |\ell|$$

Propriété III.b.7 : Toute suite convergence est bornée.

Propriété III.a.1 : Soit $(f,g) \in \left(\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{K})\right)^2$. On a alors :

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

Savoir calculer des primitives du type :

$$f : x \mapsto \frac{ax+b}{p_0x^2 + p_1x + p_2}$$

Application IV.d.7 : Démontrer la convergence de la suite (S_n) définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$$

Exercices du type

TD 8 :

Application III.a.3 : Déterminer :

$$\int \mathrm{arctan}(x)\,dx \text{ et } \int \ln(x)\,dx$$

Application IV.a.4 **:** Déterminer une primitive de :

$$g : x \longmapsto \frac{2x+1}{x(1+x)^2}$$

Calcul de :

$$I_5 = \int_{-1}^{2} \frac{dx}{e^x(1+e^x)} \quad I_6 = \int_{2}^{3} \frac{3}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx \;; I_7 = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{tan(x)+1}$$

Exercice B.5 : En posant $x = tan\left(\frac{t}{2}\right)$, calculer les intégrales suivantes :

$$1) \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2+\cos(t)} \quad 2) \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2-\sin(t)} \quad 3) \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\sin(t)-\cos(t)+\sqrt{2}}$$

TD 9 :

Exercice A6 : Montrer que :

$$\forall\, x \in [0;+\infty[, \lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$$

Exercice C1 : Déterminer les limites des suites suivantes, avec $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ et $n \neq 1$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$1)\ u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad 2)\ u_n = \frac{n^3+5n}{5n^3+cos(n)+\frac{1}{n^2}} \quad 3)\ u_n = \frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}, (a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$$

$$4)\ u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx \rfloor \quad 5)\ u_n = \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \quad 6)\ u_n = \sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$$

Exercice C3 (moyenne de Cesaro) : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On pose pour tout

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$$

1) Montrer que si (u_n) est monotone, alors la suite (v_n) est monotone et de même sens que (u_n).

2) a) Montrer que si (u_n) converge vers 0, (v_n) aussi. Que pensez-vous de la réciproque ?

b) Montrer que si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, (v_n) aussi.

c) Montrer que si $\lim_n (w_{n+1} - w_n) = 0$, alors $\lim_n \frac{w_n}{n} = 0$. Donner un exemple d'une telle suie qui ne soit pas convergente.