Correction DM n°3

Exercice 1 : Un peu de complexes

On pose :

$$f:\begin{cases}\mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ z \mapsto \dfrac{\mathcal{Im}(z^5)}{\mathcal{Im}(z)^5}\end{cases}$$

1) Déterminer l'image de $1+i$.
2) a) Résoudre l'équation $\sin(\theta) = 0$.
b) En déduire l'ensemble $f^{-1}(\{0\})$.
c) Montrer que f n'est pas injective.
3) On va montrer dans cette question que f n'est pas surjective.
a) Rappeler la formule du binôme de Newton.
b) On pose $z = x + iy, (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $f(z) = Q\left(\frac{x}{y}\right)$.
c) Etudier la fonction suivante sur $\mathbb{R}$ $x \mapsto 5x^4 - 10x^2 + 1$.
d) En déduire la valeur de :

$$m = \min_{z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}} \frac{\mathcal{Im}(z^5)}{\mathcal{Im}(z)^5} = \min\left(\frac{\mathcal{Im}(z^5)}{\mathcal{Im}(z)^5}, z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\right)$$

e) Déterminer $f^{-1}(\{m\})$.
f) Montrer que f n'est pas surjective.

1) On sait que :

$$(1+i)^5 = \left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^5 = 4\sqrt{2}e^{\frac{i5\pi}{4}} \Longrightarrow \mathcal{Im}((1+i)^5) = \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -4\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = -4$$

De plus on sait que $\mathcal{Im}(1+i) = i \Longrightarrow \left(\mathcal{Im}(1+i)\right)^5 = \mathcal{Im}(i^5) = 1$
On en déduit donc que :

$$f(1+i) = -4$$

2) a) On sait que :

$$sin(\theta) = 0 \Longleftrightarrow \theta = n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

b) On sait que :

$$f^{-1}(\{0\}) = \{z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}, \mathcal{Im}(z^5) = 0\}$$

On pose $z = re^{i\theta}$. On a alors :

$$\mathcal{Im}(z^5) = r^5 \sin(5\theta)$$

On en déduit donc que :

$$\mathcal{Im}(z^5) = 0 \Longleftrightarrow sin(5\theta) = 0 \Longleftrightarrow \theta = \frac{n\pi}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

De plus ici $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, donc $\theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
On pose $A = \{5k, k \in \mathbb{Z}\}$ =l'ensemble des multiples de 5.
On en déduit donc que :

$$f^{-1}(\{0\}) = \left\{z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}, arg(z) = \frac{n\pi}{5}, n \in \mathbb{Z}\backslash A\right\}$$

c) On a :

$$f\left(e^{\frac{2i\pi}{5}}\right) = 0 = f\left(e^{\frac{i\pi}{5}}\right)$$

Donc f n'est pas injective.
3) a) On sait que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

b) On sait que :

$$(x+iy)^5 = x^5 + 5x^4iy - 10x^3y^2 - 10x^2iy^3 + 5xy^4 + iy^5$$

On en déduit donc que :

$$f(x+iy)=\frac{5x^4y-10x^2y^3+y^5}{y^5}=5\left(\frac{x}{y}\right)^4-10\left(\frac{x}{y}\right)^2+1=Q\left(\frac{x}{y}\right)\ avec\ Q(X)=5X^4-10X^2+1$$

c) On sait que $Q\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et :

$$\forall x\in\mathbb{R}, Q'(x)=20x^3-20x=20x(x^2-1)$$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$Q'(x)$		$-$	0		0		0	$+$	
Q	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	1	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

d) On en déduit donc que :

$$m=\min_{z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}\frac{\mathfrak{Im}(z^5)}{\mathfrak{Im}(z)^5}=\min\left(\frac{\mathfrak{Im}(z^5)}{\mathfrak{Im}(z)^5}, z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\right)=-4$$

e) On a :

$$f^{-1}(\{m\})=\{z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}, f(z)=-4\}=\{x+ix, x-ix, x\neq 0\}$$

f) On sait que :

$$f^{-1}(\{-5\})=\emptyset$$

On en déduit donc que f n'est pas surjective.

Exercice 2 : Une bijection sur un sous-ensemble de $\mathbb{C}$

Dans tout cet exercice on pose :

$$f:\begin{cases}\mathbb{C}\setminus\{-i\}\to\mathbb{C}\\ z\mapsto\dfrac{z-i}{iz-1}\end{cases}$$

1) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{C}\setminus\{-i\}$ dans un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ à déterminer, puis déterminer une expression de $f^{-1}(z)$.

2) Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R})=\{z\in\mathbb{C}\ tel\ que\ f(z)\in\mathbb{R}\}$.

3) Démontrer que l'équation $f(z)=z$ admet deux solutions distinctes.

4) Dans cette question on souhaite montrer que :

$$f^{-1}(\mathbb{U}\setminus\{-i\})=\mathbb{R}$$

a) Montrer que :

$$\forall\theta\in\mathbb{R}, 1-e^{i\theta}=-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}}$$

b) En déduire que :

$$\forall\theta\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[, f(z)=e^{i\theta}\Leftrightarrow z=\frac{-1}{tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

c) Démontrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\exists!\,\theta\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[\ tel\ que\ x=\frac{-1}{tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

d) Conclure.

5) a) Soit $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. Rappeler les solutions de $z^n=1$.

b) Résoudre l'équation $(f(z))^n=1$.

1) Soit $z'\in\mathbb{C}$. On résout :

$$f(z)=z'\Leftrightarrow\frac{z-i}{iz-1}=z'\Leftrightarrow z(1-iz')=i-z'$$

1^er cas : Si $1-iz'=0$

On sait que :

$$1-iz'=0\Leftrightarrow z'=-i$$

Or on a :

$$i-(-i)=2i\neq 0$$

On en déduit que $f(z) = -i \Leftrightarrow z \in \emptyset$

$2^{\text{ième}}$ cas : $1 - iz' \neq 0$

On a alors :

$$f(z) = z' \Leftrightarrow z = \frac{i - z'}{1 - iz'} = \frac{z' - i}{iz' - 1} = f(z')$$

On en déduit donc que f est bijective de $\mathbb{C}\backslash\{-i\}$ dans lui-même et qu'elle est involutive : $f^{-1} = f$.

2) On sait que $f^{-1}(\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C}\backslash\{-i\}, \mathcal{I}m(f(z)) = 0\}$.

On pose $z = x + iy, (x, y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0; -1)\}$. On a alors :

$$\begin{aligned} f(x+iy) &= \frac{x + i(y-1)}{(-1-y) + ix} \\ &= \frac{\big(x + i(y-1)\big)\big(-(y+1) - ix\big)}{(1+y)^2 + x^2} \\ &= \frac{-x(y+1) + x(y-1)}{(1+y)^2 + x^2} + i\frac{-x^2 + 1 - y^2}{(1+y)^2 + x^2} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}\backslash\{-i\}$$

3) On résout :

$$f(z) = z \Leftrightarrow \frac{z - i}{iz - 1} = z \Leftrightarrow iz^2 - 2z + i = 0$$

On a : $\Delta = 4 - 4i^2 = 8$

On en déduit donc que l'équation admet deux solutions distinctes car $\Delta \neq 0$. On ne cherche pas forcément les solutions (Ce n'est pas demandé !).

Les voici tout de même :

$$\frac{z - i}{iz - 1} = z \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{2 - 2\sqrt{2}}{2i} = i(\sqrt{2} - 1) \\ \text{ou} \\ z_2 = \dfrac{2 + 2\sqrt{2}}{2i} = -i(1 + \sqrt{2}) \end{cases}$$

4) a) On sait que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, 1 - e^{i\theta} = e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}\right) = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}}$$

b) On sait que :

$$\begin{aligned} \forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[, f(z) = e^{i\theta} &\Leftrightarrow \frac{z - i}{iz - 1} = e^{i\theta} \\ &\Leftrightarrow z(1 - ie^{i\theta}) = i - e^{i\theta} \\ &\Leftrightarrow z\left(1 - e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}\right) = i\left(1 + e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}\right) \\ &\Leftrightarrow -2iz\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = 2i\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{z = -\frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}} \end{aligned}$$

Remarque : On peut aussi utiliser que :

$$f(z) = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = f(e^{i\theta}) \Leftrightarrow z = \frac{e^{i\theta} - e^{\frac{i\pi}{2}}}{e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} - 1} = \frac{e^{i\theta} + e^{-\frac{i\pi}{2}}}{e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} - 1} = \frac{e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \times 2\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} 2i\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = $$

$$= -i \times \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{i \times \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

c) On pose :

$$g: \theta \mapsto -\frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \; pour \; \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; 3\frac{\pi}{2}\right[$$

On sait que $g \in \mathcal{D}^1\left(\left]-\frac{\pi}{2};3\frac{\pi}{2}\right[\right)$ *et*:

$$\forall\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};3\frac{\pi}{2}\right[, g'(\theta) = -\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} < 0$$

Donc g est strcitement décroissante. De plus on a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{\theta\to-\frac{\pi}{2}\\ \theta>-\frac{\pi}{2}}} \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4} = 0^+ \\ \lim\limits_{X\to0^+}\frac{\cos(X)}{\sin(X)} = +\infty \end{cases} \underset{Par\ composé}{\Longrightarrow} \lim\limits_{\substack{\theta\to-\frac{\pi}{2}\\ \theta>-\frac{\pi}{2}}} g(\theta) = +\infty$$

De même on a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{\theta\to3\frac{\pi}{2}\\ \theta<3\frac{\pi}{2}}} \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4} = \pi^- \\ \lim\limits_{X\to\pi^-}\frac{\cos(X)}{\sin(X)} = -\infty \end{cases} \underset{Par\ composé}{\Longrightarrow} \lim\limits_{\substack{\theta\to3\frac{\pi}{2}\\ \theta<3\frac{\pi}{2}}} g(\theta) = -\infty$$

Ainsi g est :

_ Continue sur $\left]-\frac{\pi}{2};3\frac{\pi}{2}\right[$

_ Strictement décroissante sur $\left]-\frac{\pi}{2};3\frac{\pi}{2}\right[$

D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};3\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\left]\lim\limits_{\substack{\theta\to-\frac{\pi}{2}\\ \theta>-\frac{\pi}{2}}} g(\theta); \lim\limits_{\substack{\theta\to3\frac{\pi}{2}\\ \theta<3\frac{\pi}{2}}} g(\theta)\right[= \mathbb{R}$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R}, \exists!\, \theta_x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[\ tel\ que\ x = \frac{-\cos\left(\frac{\theta_x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{sin\left(\frac{\theta_x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}$$

d) Il faut montrer que :

$$f^{-1}(\mathbb{U}\backslash\{-i\}) = \mathbb{R}$$

On peut raisonner par double-inclusion :

1^er cas : Montrons que $f^{-1}(\mathbb{U}\backslash\{-i\}) \subset \mathbb{R}$

Soit z $\in f^{-1}(\mathbb{U}\backslash\{-i\})$. On en déduit donc que :

$$\exists\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};3\frac{\pi}{2}\right[\ tel\ que\ f(z) = e^{i\theta}$$

Donc d'après la question précédente :

$$z = \frac{-\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \in \mathbb{R}$$

Ainsi on a :

$$\boldsymbol{f^{-1}(\mathbb{U}\backslash\{-i\}) \subset \mathbb{R}}$$

2^ième cas : Montrons que $f^{-1}(\mathbb{U}\backslash\{-i\}) \supset \mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait d'après la question précédente que :

$$\exists!\, \theta_x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[\ tel\ que\ x = \frac{-\cos\left(\frac{\theta_x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{sin\left(\frac{\theta_x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

On a donc :

$$x = f\left(e^{i\theta_x}\right)$$

On a donc :

$$\boldsymbol{\mathbb{R} \subset f^{-1}(\mathbb{U}\backslash\{-i\})}$$

5) a) On sait que :

$$z^n = 1 \Leftrightarrow z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![0; n-1]\!]$$

b) On sait que :

$$\left(f(z)\right)^n = 1 \Leftrightarrow f(z) = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \Leftrightarrow z = \frac{-\cos\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{4}\right)}\ avec\ k \in [\![0; n-1]\!]$$

Remarque : L'énoncé est ici est mal fait ! La question 4) nous demande de montrer que :

$$f^{-1}(\mathbb{U}\backslash\{-i\}) = \mathbb{R}$$

Dans les questions et 2 et 3, on a démontré que f était bijective, que $f^{-1} = f$ et que $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{U}\backslash\{-i\}$. On a donc :

$$f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{U}\backslash\{-i\} \Leftrightarrow f(\mathbb{R}) = \mathbb{U}\backslash\{-i\} \Leftrightarrow \mathbb{R} = f^{-1}(\mathbb{U}\backslash\{-i\})$$

Donc il n'y a aucun calcul à faire. Ce que je viens de faire précédemment, nous ne pouvons le faire que si f est bijective. Sinon on peut avoir $f(A) = B$ et $f^{-1}(B) \neq A$. Il suffit de prendre $f: x \mapsto x^2, A = [0; 1]\ et\ B = [0; 1]$. On a alors :

$$f(A) = B\ et\ f^{-1}(B) = [-1; 1] \neq A$$

Mais ici il n'y a aucun problème !

Problème : Approximation de $\sqrt{2}$

Suite à une discussion en cours, Léa nous avait dit que nous pouvions calculer la valeur approchée d'un nombre réel en utilisant la dichotomie. Ici nous allons voir une autre technique pour calculer une valeur approchée, avec des tangentes. Cette méthode est appelée la méthode de **Newton-Raphson**.

I) Présentation du procédé

a) TVI

On pose la fonction définie sur $[1; 2]$ par $f(x) = x^2 - 2$:

$$f: \begin{cases} [1; 2] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 - 2 \end{cases}$$

1) Etudier les variations de f sur $[1; 3]$ et en déduire l'existence d'un unique $\alpha \in [1; 2]$ tel que $f(\alpha) = 0$:

$$\exists!\, \alpha \in [1; 2], f(\alpha) = 0$$

On écrit alors $\alpha = \sqrt{2}$, mais si l'on utilise un symbole pour ce nombre, nous ne pouvons qu'en donner une valeur approchée, car, nous le verrons plus tard, il est irrationnel.

b) Le procédé

Début du procédé : On pose $u_0 = 2$, $A_0(u_0; f(u_0))$ le point de la courbe d'abscisse u_0 et (T_{u_0}) la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x = u_0$.

De plus on pose u_1 l'abscisse de l'intersection entre (T_{u_0})et l'axe des abscisses.

De même on pose $A_1(u_1; f(u_1))$ le point de la courbe d'abscisse u_1 et (T_{u_1}) la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x = u_1$ et u_2 l'abscisse de l'intersection entre (T_{u_1})et l'axe des abscisses. Construire u_2 sur votre figure puis déterminer sa valeur.

On construit ainsi de proche en proche une suite (u_n) intersection de la tangente au point d'abscisse $(T_{u_{n-1}})$ et de l'axe des abscisses :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ (u_{n+1}, 0) = (T_{u_n}) \cap (O_x) \end{cases}$$

2) Tracer sur votre copie $\mathcal{C}_f$ puis (T_{u_0}) et (T_{u_1}).

3) Démontrer que la suite (u_n) est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \end{cases}$$

4) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{2} < u_{n+1} < u_n$. En déduire la convergence de la suite (u_n).
5) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2$$

6) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{2^n - 1}}$$

7) Déterminer la limite de la suite (u_n).
8) Combien de termes de la suite faut-il calculer pour avoir une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-100} près.
9) Ecrire un programme Python qui permet d'obtenir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-n} où n est choisi par l'utilisateur.
10) Si nous avions fait une dichotomie, en partant au départ avec un intervalle de longueur 1 $\left(1 < \sqrt{2} < 2\right)$, déterminer le nombre d'étapes nécessaire pour avoir une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-100}.

1) On pose :

$$f : \begin{cases} [1;3] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 - 2 \end{cases}$$

f est un polynôme donc f est dérivable et :

$$\forall x \in [1;3], f'(x) = 2x > 0$$

On a donc le tableau de variation suivant :

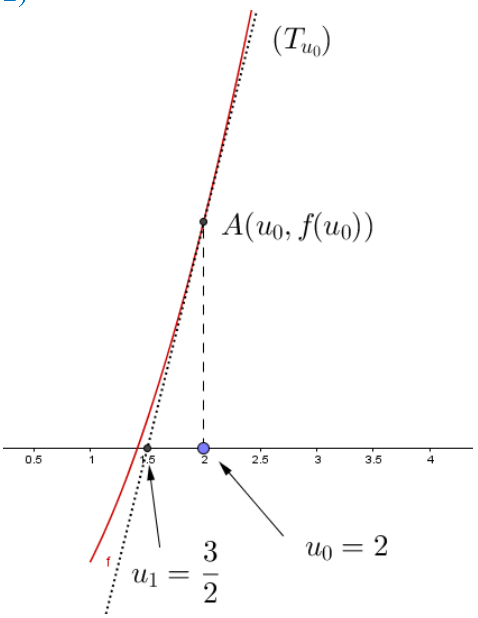
x	1	3
$f'(x)$	$+$	
f	-1 ↗	7

On a donc :

- f est continue sur $[1;3]$ car c'est un polynôme
- f est strictement monotone sur $[1;3]$
- f change de signe sur $[1;3]$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires (ou son corollaire ou le théorème de la bijection…), il existe un unique $\alpha \in [1;3]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

2)



3) On a de même :

$$(T_{u_n}) : y = f'(u_n)(x - u_n) + f(u_n) = 2u_n(x - u_n) + u_n^2 - 2 = 2u_n x - u_n^2 - 2$$

On en déduit donc que :

$$2u_n x - u_n^2 - 2 = 0 \Rightarrow 2u_n x = u_n^2 + 2 \Longrightarrow x = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n} = \frac{1}{2} \times \frac{u_n^2 + 2}{u_n} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) = u_{n+1}$$

On a donc :

$$(u_{n+1}, 0) = (T_{u_n}) \cap (O_x) \Longrightarrow u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

4) On étudie la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ sur $[1; 2]$

f est dérivable sur $[1; 2]$ par somme de fonctions dérivables et :

$$\forall x \in [1; 3], f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right)$$

Or on sait que :

$$\forall x \geq 1, x^2 - 1 \geq 0$$

On en déduit donc que f est croissante sur [1 ;3] :

x	$\sqrt{2}$		2
$g'(x)$		$+$	
g	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = "\sqrt{2} < u_{n+1} < u_n \leq 2"$$

Initialisation : On a :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = \frac{3}{2} \end{cases} \Longrightarrow \sqrt{2} < u_1 < u_0 \leq 2$$

Donc la proposition P_0 est vraie.

Hérédité : Soit n un entier fixé. On suppose vraie P_n : $\sqrt{2} < u_{n+1} < u_n \leq 2$

On a alors :

$$\sqrt{2} < u_{n+1} < u_n \leq 2 \Longrightarrow f(\sqrt{2}) < f(u_{n+1}) < f(u_n) \leq \frac{3}{2} \Longrightarrow \sqrt{2} < u_{n+2} < u_{n+1} \leq 2 \Longrightarrow P_{n+1} \text{ est vraie}$$

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire donc d'après le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier naturel n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{2} < u_{n+1} < u_n$$

5) On a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - \sqrt{2} = \frac{1}{2u_n} \times \left(u_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}u_n\right) = \frac{1}{2u_n}\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2$$

Or on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \sqrt{2} > 1 \Longrightarrow \frac{1}{u_n} \leq 1 \Longrightarrow \frac{1}{2u_n} \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2$$

6) On veut montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{2^n - 1}}$$

On peut le faire par récurrence :

On pose la proposition Q_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, Q_n = "u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{2^n-1}}"$$

Initialisation : On a

$$\begin{cases} u_0 - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2} < 1 \\ \dfrac{1}{2^{2^0-1}} = \dfrac{1}{2^0} = 1 \end{cases} \Longrightarrow u_0 - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{2^0-1}} \Longrightarrow P_0 \text{ est vraie.}$$

Hérédité : Soit n un entier fixé. On suppose vraie Q_n : $u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{2^n-1}}$

On a donc :

$$0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{2^n-1}}$$

$$\Longrightarrow \left(u_n - \sqrt{2}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2^{2^n-1}}\right)^2 \quad (\text{car } x \mapsto x^2 \text{ est croissante sur } [0; +\infty[)$$

On sait que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2$$

$$\Longrightarrow u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{2^n-1}}\right)^2$$

Or on a :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{2^n-1}}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{(2^{2^n-1})^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{2^n \times 2 - 2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{2^{n+1}-2}} = \frac{1}{2^{2^{n+1}-1}}$$

Donc Q_{n+1} est vraie.

Conclusion : Q_0 est vraie et Q_n est héréditaire donc d'après le principe de récurrence, Q_n est vraie pour tout entier naturel n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{2^n-1}}$$

7) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{2^n-1}}$$

Or on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2^{2^n-1}} = \frac{2}{2^{2^n}}$$

On sait que :

$$\lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty \ (\text{car } 2 > 1) \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} 2^{2^n} = +\infty \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{2^{2^n}} = 0$$

D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n - \sqrt{2} = 0$$

On a donc :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{2}$$

8) On a vu précédemment que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{2^n-1}}$$

On cherche :

$$0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq 10^{-100}$$

On résout :

$$\frac{1}{2^{2^n-1}} \leq 10^{-100}$$

$$\Longrightarrow 2^{2^n-1} \geq 10^{100} \left(\text{car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur }]0; +\infty[\right)$$

On peut résoudre cette équation à « tâtons » si l'on ne connait pas la fonction ln ou log.

Sinon on a :

$$2^{2^n-1} \geq 10^{100}$$

$$\Longrightarrow ln\left(2^{2^n-1}\right) \geq ln(10^{100}) \;\; (\, car\ x \mapsto ln(x)\ \ est\ croissante\ sur\ ]0;+\infty[\,) \Longrightarrow (2^n-1)\, ln(2) \geq 100\, ln(10)$$

$$\Longrightarrow 2^n \geq 1 + \frac{100\, ln(10)}{ln(2)} \;\; (\, car\ ln(2) > 0)$$

$$\Longrightarrow ln(2^n) \geq ln\left(1 + \frac{100\, ln(10)}{ln(2)}\right) \;\; (\, car\ x \mapsto ln(x)\ \ est\ croissante\ sur\ ]0;+\infty[\,)$$

$$\Longrightarrow n\, ln(2) \geq ln\left(1 + \frac{100\, ln(10)}{ln(2)}\right) \Longrightarrow n \geq \frac{ln\left(1 + \frac{100\, ln(10)}{ln(2)}\right)}{ln(2)}$$

Or à la calculatrice on obtient :

$$\frac{ln\left(1 + \frac{100\, ln(10)}{ln(2)}\right)}{ln(2)} \approx 8{,}38$$

Il faut donc 9 étapes pour avoir une valeur approchée à 10^{-100} de $\sqrt{2}$.
Ainsi u_9 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-100}.
9)

```
n=input("Quelle valeur de n pour une précision à 10^(-n)")
n=int(n)
u=2
m=0
while (1/2**(2**m-1))>10**(-n):
    u=1/2*(u+2/u)
    m=m+1
print(u)
```