Correction TD 9

Partie A : Ensemble usuel de nombres

Exercice A1 : Déterminer les bornes supérieures et inférieures des ensembles suivants :

$$A = \left\{\frac{n+5}{n+1}; n \in \mathbb{N}\right\}; B = \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n; n \in \mathbb{N}^*\right\} \quad C = \{\sqrt{x} - \lfloor x \rfloor;\ x \in \mathbb{N}\}$$

1) On a :

$$A = \left\{\frac{n+5}{n+1}; n \in \mathbb{N}\right\}$$

On pose la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n+5}{n+1} = 1 + \frac{4}{n+1}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 4\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right) = -\frac{4}{(n+1)(n+2)} < 0$$

Donc la suite (u_n) est décroissante.
On en déduit donc que :

$$\sup\left(\left\{\frac{n+5}{n+1}; n \in \mathbb{N}\right\}\right) = \max\left(\left\{\frac{n+5}{n+1}; n \in \mathbb{N}\right\}\right) = u_0 = 5$$

De plus on a :

$$\lim_n \frac{n+5}{n+1} = \lim_n \frac{1+\frac{5}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

On en déduit donc que :

$$\inf\left(\left\{\frac{n+5}{n+1}; n \in \mathbb{N}\right\}\right) = 1$$

De plus la borne inférieure n'est pas un minimum car :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + \frac{4}{n+1} > 1$$

---

2) On a :

$$B = \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n; n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

On pose la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, -1 < \frac{1}{n} - 1 \leq \frac{1}{n} + (-1)^n \leq \frac{1}{n} + 1 < 2$$

On en déduit donc que la suite (u_n) est bornée par -1 et 2.
On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{2n} = \frac{1}{2n} + 1 \leq 1 + \frac{1}{2}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_{2n} \leq \frac{3}{2}$$

De même on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} - 1 \geq -1$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, -1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$$

On en déduit donc que :

$$\sup\left(\left\{\frac{1}{n} + (-1)^n ; n \in \mathbb{N}^*\right\}\right) = \max\left(\left\{\frac{1}{n} + (-1)^n ; n \in \mathbb{N}^*\right\}\right) = u_2 = \frac{3}{2}$$

De plus on a :

$$\lim_n u_{2n+1} = \lim_n \left(\frac{1}{2n+1} - 1\right) = -1$$

On en déduit donc que :

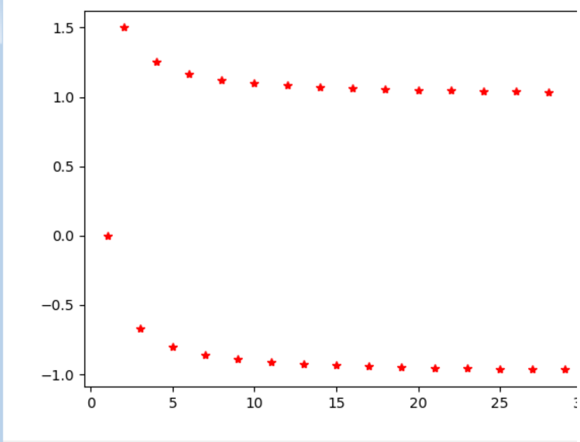
$$\inf\left(\left\{\frac{1}{n} + (-1)^n ; n \in \mathbb{N}^*\right\}\right) = -1$$

De plus la borne inférieure n'est pas un minimum car :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} - 1 > -1$$

Remarque : On peut faire un programme Python pour observer l'allure de la courbe de la suite (u_n) :

```
def courbe(n):
    u=[]
    a=[]
    for i in range(1,n):
        u.append(1/i+(-1)**i)
        a.append(i)
    import matplotlib.pyplot as plt
    plt.plot(a,u,'*r')
    plt.show()
```



---

3) On a :

$$C = \left\{\sqrt{x} - \lfloor x \rfloor ;\ x \in \mathbb{R}^+\right\}$$

On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x} - \lfloor x \rfloor \leq \sqrt{x} - x + 1$$

Or on sait que :

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x} - x + 1) = \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 + \frac{1}{x}\right) = -\infty$$

On en déduit donc que :

$$\inf\left(\left\{\sqrt{x} - \lfloor x \rfloor ;\ x \in \mathbb{R}^+\right\}\right) = -\infty$$

De plus on a :

$$\forall x \in [0; 1[, \sqrt{x} - \lfloor x \rfloor = \sqrt{x} \leq 1$$
$$\sqrt{x} - \lfloor x \rfloor \leq \sqrt{x} - x + 1$$

On pose $f : x \mapsto \sqrt{x} - x + 1$

On va étudier f sur $[1; +\infty[$. On sait que $\mathcal{D}([1; +\infty[)$ et :

$$\forall x \geq 1, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 = \frac{1 - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

Or on sait que :

$$1 - 2\sqrt{x} > 0 \Longrightarrow \sqrt{x} < \frac{1}{2} \Longrightarrow x < \frac{1}{4}$$

On en déduit donc que f est décroissante sur $[1; +\infty[$. De plus on sait que $f(1) = 1$.

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x} - \lfloor x \rfloor$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{u_n} - \lfloor u_n \rfloor = \sqrt{1 - \frac{1}{n+1}} \Longrightarrow \lim_n u_n = 1$$

Ainsi on peut en déduire que :

$$\sup\left(\left\{\sqrt{x} - \lfloor x \rfloor;\ x \in \mathbb{R}^+\right\}\right) = 1$$

Par contre on ne sait pas s'il est atteint !
On sait que :

$$\forall x \in [0;1[, \sqrt{x} - \lfloor x \rfloor < 1$$

De plus on sait que :

$$f(1) = \sqrt{1} - \lfloor 1 \rfloor = 0$$

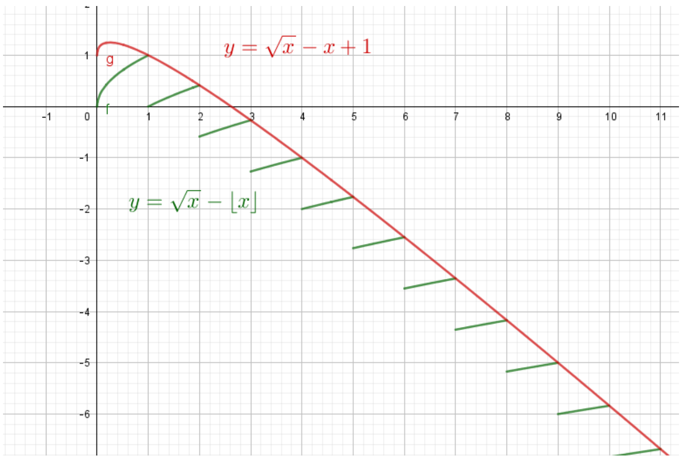
On en déduit donc que 1 n'est pas atteint sur $[0;1]$. De plus on sait que :

$$\forall x > 1, \sqrt{x} - \lfloor x \rfloor < 1$$

On en déduit donc que la borne supérieure n'est pas atteinte et :

$$\sup\left(\left\{\sqrt{x} - \lfloor x \rfloor;\ x \in \mathbb{R}^+\right\}\right) = 1$$

On a les courbes suivantes :



Exercice A2 : Montrer les égalités suivantes :

$$]-1;1[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1 + \frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{n}\right] \text{ et } [-1;1] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]-1 - \frac{1}{n}; 1 + \frac{1}{n}\right[$$

1) On veut montrer que :

$$]-1;1[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1 + \frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{n}\right]$$

On raisonne par double inclusion.

1er cas : $]-1;1[\subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1 + \frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{n}\right]$

Soit $x \in]-1;1[$. On a donc :

$$-1 < x < 1$$

On pose :

$$n = \left\lfloor \frac{1}{1 + |x|} \right\rfloor + 1$$

On sait que :

$$n = \left\lfloor \frac{1}{1 - |x|} \right\rfloor + 1 > \frac{1}{1 - |x|}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{n} < 1 - |x| \Longrightarrow |x| < 1 - \frac{1}{n} < 1$$

$$\Longrightarrow -1+\frac{1}{n}<x<1-\frac{1}{n}$$

$$\Longrightarrow \exists n\in\mathbb{N}^*\left(n=\left\lfloor\frac{1}{1+|x|}\right\rfloor+1\right), x\in\left[-1+\frac{1}{n};1-\frac{1}{n}\right]$$

$$\Longrightarrow]-1;1[\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[-1+\frac{1}{n};1-\frac{1}{n}\right]$$

2ième cas : $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[-1+\frac{1}{n};1-\frac{1}{n}\right]\subset]-1;1[$

On sait que :

$$x\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[-1+\frac{1}{n};1-\frac{1}{n}\right]$$

$$\Longrightarrow \exists n\in\mathbb{N}^*, x\in\left[-1+\frac{1}{n};1-\frac{1}{n}\right]$$

$$\Longrightarrow \exists n\in\mathbb{N}^*-1<-1+\frac{1}{n}\leq x\leq 1-\frac{1}{n}<1$$

$$\Longrightarrow x\in]-1;1[$$

$$\Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[-1+\frac{1}{n};1-\frac{1}{n}\right]\subset]-1;1[$$

On en déduit donc que :

$$]-1;1[=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[-1+\frac{1}{n};1-\frac{1}{n}\right]$$

2) On veut montrer que :

$$[-1;1]=\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left]-1-\frac{1}{n};1+\frac{1}{n}\right[$$

On raisonne par double inclusion.

1er cas : $[-1;1]\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left]-1+\frac{1}{n};1-\frac{1}{n}\right[$

Soit $x\in[-1;1]$. On a donc :

$$-1\leq x\leq 1$$

On en déduit donc que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, -1-\frac{1}{n}<-1\leq x\leq 1<1+\frac{1}{n}$$

On en déduit donc que :

$$x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left]-1-\frac{1}{n};1+\frac{1}{n}\right[$$

Ainsi :

$$[-1;1]\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left]-1+\frac{1}{n};1-\frac{1}{n}\right[$$

2ième cas : $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left]-1+\frac{1}{n};1-\frac{1}{n}\right[\subset[-1;1]$

On sait que :

$$x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left]-1-\frac{1}{n};1+\frac{1}{n}\right[$$

$$\Longrightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*, -1-\frac{1}{n}<x<1+\frac{1}{n}$$

$$\Longrightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*, |x|<1+\frac{1}{n}$$

On raisonne par l'absurde. On suppose que $x\notin[-1;1]$.

On a :

$$x \notin [-1;1] \Longrightarrow |x| > 1 \Longrightarrow |x| > 1 + \frac{|x|-1}{2} \Longrightarrow |x| > 1 + \frac{1}{\frac{2}{|x|-1}}$$

On pose :

$$n = \left\lfloor \frac{2}{|x|-1} \right\rfloor + 1$$

On a alors :

$$n \geq \frac{2}{|x|-1} \Longrightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{|x|-1}{2} \Longrightarrow 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{|x|-1}{2} < |x|$$

On obtient une contradiction avec le fait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |x| < 1 + \frac{1}{n}$$

On en déduit donc que :

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-1 - \frac{1}{n}; 1 + \frac{1}{n}\right[\Longrightarrow x \in [-1;1]$$

Ainsi :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-1 + \frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{n}\right[\subset [-1;1]$$

On en déduit donc que :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-1 + \frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{n}\right[= [-1;1]$$

Exercice A3 : Déterminer les ensembles :

$$I = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[-1; \frac{1}{n}\right] ; J = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right[; K = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1[$$

1) On veut montrer que :

$$I = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[-1; \frac{1}{n}\right] = [-1;0]$$

On va raisonner cela par double inclusion.

1er cas : $[-1;0] \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[-1; \frac{1}{n}\right]$

Soit $x \in [-1;0]$. On a alors :

$$x \in [-1;0] \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, -1 \leq x \leq \frac{1}{n} \Longrightarrow x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[-1; \frac{1}{n}\right]$$

On a donc :

$$[-1;0] \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[-1; \frac{1}{n}\right]$$

2ième cas : $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[-1; \frac{1}{n}\right] \subset [-1;0]$

On a :

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[-1; \frac{1}{n}\right] \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, -1 \leq x \leq \frac{1}{n}$$

On raisonne par l'absurde.
On suppose que $x \notin [-1;0]$. On a alors :

$$x > 0$$

On a alors :

$$x > \frac{x}{2} > 0 \Longrightarrow x > \frac{1}{\frac{2}{x}} \geq \frac{1}{\left\lfloor \frac{2}{x} \right\rfloor + 1} > 0$$

Contradiction car :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x \leq \frac{1}{n}$$

On en déduit donc que :

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[-1; \frac{1}{n}\right] \Longrightarrow x \in [-1; 0]$$

On en déduit donc que :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[-1; \frac{1}{n}\right] \subset x \in [-1; 0]$$

On en déduit donc que :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[-1; \frac{1}{n}\right] = [-1; 0]$$

---

2) On veut montrer que :

$$J = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right[= \{0\}$$

On va raisonner cela par double inclusion.

1er cas : $\{0\} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right[$

Soit $x \in \{0\}$. On a alors :

$$x \in \{0\} \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \Longrightarrow x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right[$$

On a donc :

$$\{0\} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right[$$

$2^{\text{ième}}$ cas : $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right[\subset \{0\}$

On a :

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right[\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, |x| < \frac{1}{n}$$

On raisonne par l'absurde.
On suppose que $x \neq 0$. On a alors :

$$|x| > 0$$

On a alors :

$$|x| > \frac{|x|}{2} > 0 \Longrightarrow x > \frac{1}{\frac{2}{|x|}} \geq \frac{1}{\left\lfloor \frac{2}{|x|} \right\rfloor + 1} > 0$$

Contradiction car :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |x| < \frac{1}{n}$$

On en déduit donc que :

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right[\Longrightarrow x \in \{0\}$$

On en déduit donc que :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right[\subset \{0\}$$

On en déduit donc que :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right[= \{0\}$$

---

3) On veut montrer que :

$$K = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1[\ = \mathbb{R}$$

On raisonne par double inclusion

1er cas : $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1[\ \subset \mathbb{R}$

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, [n; n+1[\subset \mathbb{R} \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1[\ \subset \mathbb{R}$$

2ième cas : $\mathbb{R} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1[$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$
$$\Longrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}(n = \lfloor x \rfloor), n \leq x < n+1$$
$$\Longrightarrow x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1[$$
$$\Longrightarrow \mathbb{R} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1[$$

On en déduit donc que :

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1[$$

Exercice A4 : Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$.

a) Montrer que :

$$A \subset B \Longrightarrow \sup A \leq \sup B$$

b) Montrer que $A \cup B$ admet une borne supérieur et déterminer $\sup(A \cup B)$

c) Montrer que $A \cap B$ est majorée. Peut-on déterminer $\sup(A \cap B)$?

a) Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{R})^2$ tel que $A \subset B$. On a alors :

$$\forall a \in A, a \in B$$
$$\Longrightarrow \forall a \in A, a \leq \sup(B)$$
$$\Longrightarrow \sup(A) \leq \sup(B)$$

b) On sait que A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. On en déduit donc que :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \sup(A) = a \text{ et } \sup(B) = b$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in A \cup B, \begin{cases} x \in A \\ \text{ ou} \\ x \in B \end{cases} \Longrightarrow x \leq \max(a, b)$$

On en déduit donc que $A \cup B$ admet une borne supérieure et :

$$\sup(A \cup B) \leq \max(a, b)$$

Réciproquement on sait que :

$$\max(a, b) \leq \sup(A \cup B)$$

On en déduit donc que :

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$$

c) 1er cas : $A \cap B = \emptyset$

Alors $A \cap B$ est vide donc on ne peut pas parler de majorant !

2ième cas : $A \cap B \neq \emptyset$

On a alors :

$$x \in A \cap B \Longrightarrow \begin{cases} x \leq \sup(A) \\ x \leq \sup(B) \end{cases} \Longrightarrow x \leq \min(\sup(A), \sup(B))$$

Cependant on ne peut pas exprimer $\sup(A \cap B)$ en fonction de $\sup(A)$ et $\sup(B)$.

Par exemple on pose $A = [0; 1] \cup [2; 3]$ et $B = \left[0; \frac{1}{2}\right] \cup [4; 5]$

On a alors :

$$\sup(A) = 3, \sup(B) = 5 \text{ et } \sup(A \cap B) = \frac{1}{2}$$

Exercice A5 : Montrer que :

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\le y\Longrightarrow\lfloor x\rfloor\le\lfloor y\rfloor$$
$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2, \lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor\le\lfloor x+y\rfloor\le\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+1$$

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\le y\Longrightarrow\begin{cases}\lfloor y\rfloor\le x\le y\\ \text{ou}\\ x<\lfloor y\rfloor\le y\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\lfloor x\rfloor=\lfloor y\rfloor\\ \text{ou}\\ \lfloor x\rfloor<\lfloor y\rfloor\end{cases}\Longrightarrow\lfloor x\rfloor\le\lfloor y\rfloor$$

On en déduit donc que :

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\le y\Longrightarrow\lfloor x\rfloor\le\lfloor y\rfloor$$

De même on sait que :

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2, \lfloor x+y\rfloor=\max(\{n\in\mathbb{Z}, n\le x+y\})$$

Or on sait que $\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor\in\{n\in\mathbb{Z}, n\le x+y\}$. On en déduit donc que :

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2, \lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor\le\lfloor x+y\rfloor$$

De même on a :

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2, x=\lfloor x\rfloor+\epsilon_x\,,\epsilon_x\in[0;1[, y=\lfloor y\rfloor+\epsilon_y\,,\epsilon_y\in[0;1[$$
$$\Longrightarrow x+y=\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+\epsilon_x+\epsilon_y, \epsilon_x+\epsilon_y\in[0;2[$$
$$\Longrightarrow\ \lfloor x+y\rfloor=\left\lfloor\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+\epsilon_x+\epsilon_y\right\rfloor\le\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+\left\lfloor\epsilon_x+\epsilon_y\right\rfloor\le\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+1$$

On en déduit donc que :

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2, \lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor\le\lfloor x+y\rfloor\le\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+1$$

Exercice A6 : Montrer que :

$$\forall\,x\in[0;+\infty[, \lfloor x\rfloor=\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{x+1}{2}\right\rfloor$$

Soit $x\ge 0$. On va distinguer deux cas.

1er cas : $\lfloor x\rfloor$ est pair.

$$\exists k\in\mathbb{N}, \lfloor x\rfloor=2k\Leftrightarrow 2k\le x<2k+1\Leftrightarrow k\le\frac{x}{2}<k+\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor=k$$

De même on a :

$$\exists k\in\mathbb{N}, \lfloor x\rfloor=2k\Leftrightarrow 2k\le x<2k+1$$
$$\Leftrightarrow 2k+1\le x+1<2k+2$$
$$\Leftrightarrow k<k+\frac{1}{2}\le\frac{x+1}{2}<k+1$$
$$\Leftrightarrow\left\lfloor\frac{x+1}{2}\right\rfloor=k$$

On en déduit donc que :

$$\lfloor x\rfloor=2k=\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{x+1}{2}\right\rfloor$$

2ième cas : $\lfloor x\rfloor$ est impair

$$\exists k\in\mathbb{N}, \lfloor x\rfloor=2k+1\Leftrightarrow 2k+1\le x<2k+2\Leftrightarrow k<k+\frac{1}{2}\le\frac{x}{2}<k+1\Leftrightarrow\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor=k$$

De même on a :

$$\exists k\in\mathbb{N}, \lfloor x\rfloor=2k+1\Leftrightarrow 2k+1\le x<2k+2$$
$$\Leftrightarrow 2k+2\le x+1<2k+3$$
$$\Leftrightarrow k+1\le\frac{x+1}{2}<k+\frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow\left\lfloor\frac{x+1}{2}\right\rfloor=k+1$$

On en déduit donc que :

$$\lfloor x\rfloor=2k+1=\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{x+1}{2}\right\rfloor$$

Dans les deux cas on a démontré que :

$$\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$$

Partie B : Suites numériques – Monotonie et définition

Exercice B1 : Ecrire les suites qui correspondent aux programmes Python suivant :

```python
def masuite(n):
    a=[2]
    for i in range(1,n+1):
        a.append(3*a[i-1]+2)
    return a
```

```python
def masuite(n):
    a=[1,1]
    for i in range(2,n+1):
        a.append(a[i-2]+a[i-1])
    return a
```

1) On peut faire un tableau.
On a :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2 \end{cases}$$

2) De même on a :

$$\begin{cases} u_0 = 1 = u_1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

C'est la fameuse suite de Fibonacci !

Exercice B2 : Déterminer le sens de variation des suites suivantes :

$$u : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto \dfrac{n!}{e^n} \end{cases} \quad v : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \end{cases}$$

1) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$$

On a de plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{e^{n+1}} \times \frac{e^n}{n!} = \frac{n+1}{e}$$

Or on sait que $e \in]2;3[$. On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

De plus comme (u_n) est positive on en déduit donc que :

$$\forall n \geq 2, u_{n+1} > u_n$$

La suite (u_n) n'est donc croissante qu'à partir du rang 2 !

2) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{n+1}{(n+1)^2+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n+1}{(n+1)^2+k} - \frac{n}{n^2+k} \right) + \frac{1}{n+2}$$

Or on sait que :

$$\forall k \in [\![1;n]\!], \frac{n+1}{(n+1)^2+k} - \frac{n}{n^2+k} = \frac{(n+1)(n^2+k) - n((n+1)^2+k)}{((n+1)^2+k)(n^2+k)}$$

$$= \frac{k - n^2 - n}{((n+1)^2+k)(n^2+k)}$$

On en déduit donc que :

$$\forall k \in [\![1;n]\!], \frac{k-n^2-n}{((n+1)^2+k)(n^2+k)} \geq \frac{k-n^2-n}{((n+1)^2+n)(n^2+n)}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+1}{(n+1)^2+k}-\frac{n}{n^2+k}\right) \geq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-n^2-n}{((n+1)^2+n)(n^2+n)}\right)$$
$$\geq \frac{1}{((n+1)^2+n)(n^2+n)}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{n}{n^2+3n+1}$$
$$\geq \frac{1}{2(n^2+3n+1)} - \frac{n}{n^2+3n+1}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1}-v_n \geq \frac{1}{2(n^2+3n+1)} - \frac{n}{n^2+3n+1} + \frac{1}{n+2}$$
$$\geq \frac{n^2+3n+1-n^2-2n}{(n+2)(n^2+3n+1)}$$
$$\geq \frac{n+1}{(n+2)(n^2+3n+1)}$$
$$\geq 0$$

On en déduit donc que la suite (u_n) est croissante.

Remarque : On peut (et on va montrer dans la partie suivante) que la suite (u_n) converge. On a :

$$\forall k \in [\![1;n]\!], \frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+k} \leq \frac{1}{n^2+1}$$
$$\Rightarrow \frac{n^2}{n^2+n} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n^2}{n^2+1}$$

De plus on sait que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

De même on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = 1$$

D'après le théorème des gendarmes on en déduit donc que :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k} = 1$$

Partie C : Limite d'une suite

Exercice C1 : Déterminer les limites des suites suivantes, avec $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ et $n \neq 1$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$1)\ u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \quad 2)\ u_n = \frac{n^3+5n}{5n^3+\cos(n)+\frac{1}{n^2}} \quad 3)\ u_n = \frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}, (a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$$

$$4)\ u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx\rfloor \quad 5)\ u_n = \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \quad 6)\ u_n = \sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$$

$$7)\ u_n = \sqrt[n]{2+(-1)^2} \quad 8)\ u_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad 9)\ u_n = (\ln(n))^{\frac{1}{n}} \quad 10)\ u_n = \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{\ln(n)}}$$

1) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

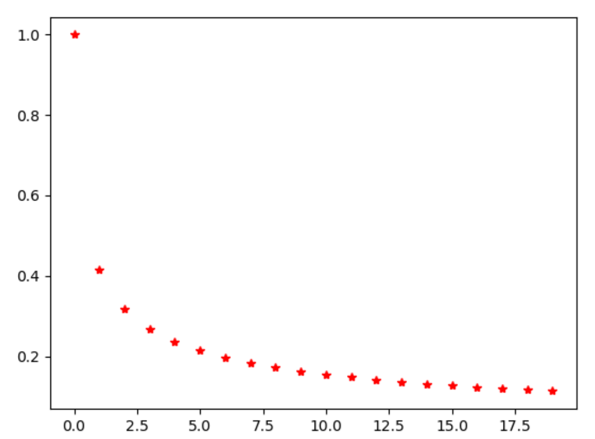
De plus on sait que :

$$\lim_n \left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right) = +\infty \Longrightarrow \lim_n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$$

Illustration avec un programme Python pour les 20 premiers points :

```
def u(n):
    import math as m
    return (m.sqrt(n+1)-m.sqrt(n))

def tracecourbe(n):
    abscisse=[i for i in range(n)]
    ordonnee=[u(i) for i in range(n)]
    import matplotlib.pyplot as plt
    plt.plot(abscisse,ordonnee,'*r')
    plt.show()
```



2) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n^3 + 5n}{5n^3 + \cos(n) + \frac{1}{n^2}} = \frac{1 + \frac{5}{n^2}}{5 + \frac{\cos(n)}{n^3} + \frac{1}{n^5}}$$

De plus on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{1}{n^3} \leq \frac{\cos(n)}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$$

De plus on sait que :

$$\lim_n \frac{1}{n^3} = 0 \Longrightarrow \lim_n \frac{\cos(n)}{n^3} = 0 \text{ (d'après le théorème des gendarmes)}$$

De plus on sait que :

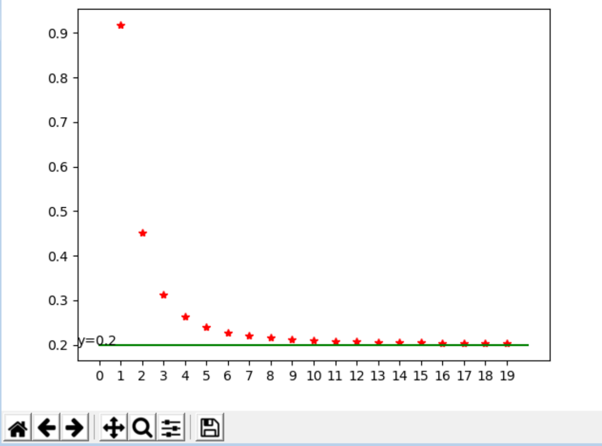
$$\lim_n \frac{5}{n^2} = \lim_n \frac{1}{n^3} = 0$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n \frac{n^3 + 5n}{5n^3 + \cos(n) + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{5}$$

```
def u(n):
    import math as m
    return ((n**3+5*n)/(5*n**3+m.cos(n)+1/n**2))

def tracecourbe(n,premierterme,limite):
    abscisse=[i for i in range(premierterme,n)]
    ordonnee=[u(i) for i in range(premierterme,n)]
    import matplotlib.pyplot as plt
    axes = plt.gca()
    plt.plot(abscisse,ordonnee,'*r')
    plt.plot([0,20],[limite,limite],'g')
    plt.text(-1, limite, r'y='+str(limite))
    axes.xaxis.set_ticks(range(n))
    plt.show()
```



3) Il faut distinguer les cas.

1^{er} cas : $a = b$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0 \Longrightarrow \lim_n u_n = 0$$

$2^{ième}$ cas : $a < b$

On a alors :

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1}$$

De plus on sait que :

$$0 < \frac{a}{b} < 1 \Longrightarrow \lim_n \left(\frac{a}{b}\right)^n = 0$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n u_n = -1$$

3$^{\text{ième}}$ cas : $a > b$

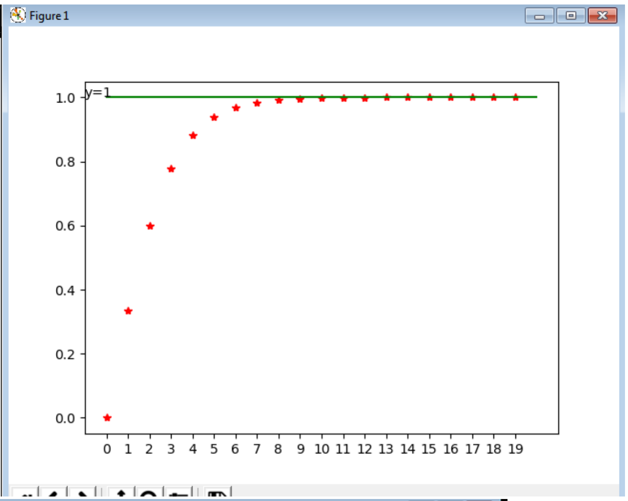
On a alors :

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n} \Longrightarrow \lim_n u_n = 1 \text{ car } \lim_n \left(\frac{b}{a}\right)^n = 0$$

Illustration Python avec $a = 2$ et $b = 1$ puis $a = 1$ et $b = 2$

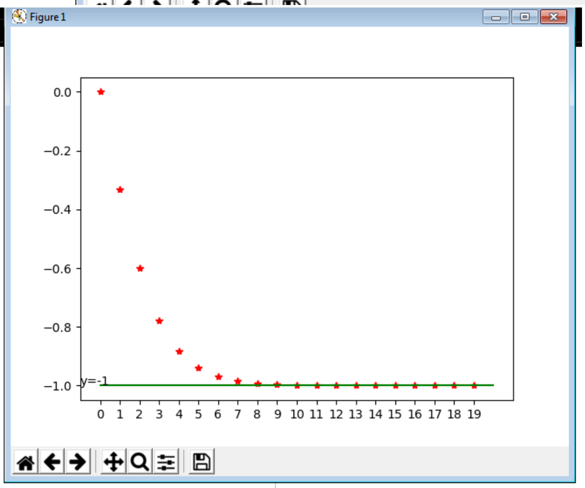
```python
def u(n,a,b):
    import math as m
    return ((a**n-b**n)/(a**n+b**n))

def tracecourbe(n,premierterme,limite):
    abscisse=[i for i in range(premierterme,n)]
    ordonnee=[u(i,2,1) for i in range(premierterme,n)]
    import matplotlib.pyplot as plt
    axes = plt.gca()
    plt.plot(abscisse,ordonnee,'*r')
    plt.plot([0,20],[limite,limite],'g')
    plt.text(-1, limite, r'y='+str(limite))
    axes.xaxis.set_ticks(range(n))
    plt.show()
```




```python
def u(n,a,b):
    import math as m
    return ((a**n-b**n)/(a**n+b**n))

def tracecourbe(n,premierterme,limite):
    abscisse=[i for i in range(premierterme,n)]
    ordonnee=[u(i,1,2) for i in range(premierterme,n)]
    import matplotlib.pyplot as plt
    axes = plt.gca()
    plt.plot(abscisse,ordonnee,'*r')
    plt.plot([0,20],[limite,limite],'g')
    plt.text(-1, limite, r'y='+str(limite))
    axes.xaxis.set_ticks(range(n))
    plt.show()
```



4) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in [\![1;n]\!], kx - 1 < \lfloor kx \rfloor \leq kx$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kx-1) < \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx \rfloor \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kx)$$

De plus on sait que :

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kx-1) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kx) - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}1 = \frac{n+1}{2n}x - \frac{1}{n}$$

De même on a :

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kx) = \frac{n+1}{2n}x$$

Or on sait que :

$$\lim_{n}\frac{n+1}{n} = \lim_{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{n}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kx-1) = \frac{x}{2} = \lim_{n}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kx)$$

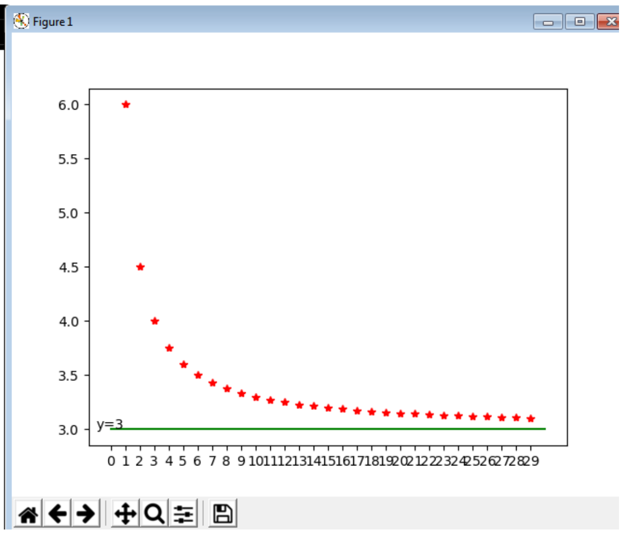
On en déduit donc d'après le théorème des gendarmes que :

$$\lim_{n}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx\rfloor = \frac{x}{2}$$

Illustration Python avec $x = 6$.

```python
def u(n,x):
    import math as m
    v=0
    for i in range(1,n+1):
        v=v+int(i*x)
    return v/n**2

def tracecourbe(n,premierterme,limite):
    abscisse=[i for i in range(premierterme,n)]
    ordonnee=[u(i,6) for i in range(premierterme,n)]
    import matplotlib.pyplot as plt
    axes = plt.gca()
    plt.plot(abscisse,ordonnee,'*r')
    plt.plot([0,n],[limite,limite],'g')
    plt.text(-1, limite, r'y='+str(limite))
    axes.xaxis.set_ticks(range(n))
    plt.show()
```



5) On sait que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\mathbb{R}, \forall k\in[\![1;n]\!], \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\Longrightarrow \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}}$$

Or on sait que :

$$\lim_{n}\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n}\frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 2$$

De même on a :

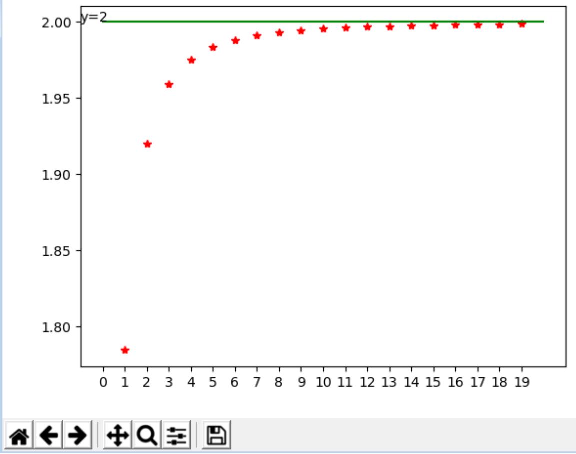
$$\lim_{n}\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n}\frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 2$$

D'après le théorème des gendarmes on en déduit donc que :

$$\lim_{n}\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = 2$$

```python
def u(n):
    import math as m
    v=0
    for k in range(1,2*n+2):
        v=v+1/(m.sqrt(n**2+k))
    return v

def tracecourbe(n,premierterme,limite):
    abscisse=[i for i in range(premierterme,n)]
    ordonnee=[u(i) for i in range(premierterme,n)]
    import matplotlib.pyplot as plt
    axes = plt.gca()
    plt.plot(abscisse,ordonnee,'*r')
    plt.plot([0,n],[limite,limite],'g')
    plt.text(-1, limite, r'y='+str(limite))
    axes.xaxis.set_ticks(range(n))
    plt.show()
```



6) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in [\![1; n^2]\!], \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$$

$$\Rightarrow \frac{n^2}{\sqrt{n^2+n}} \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$$

Or on sait que :

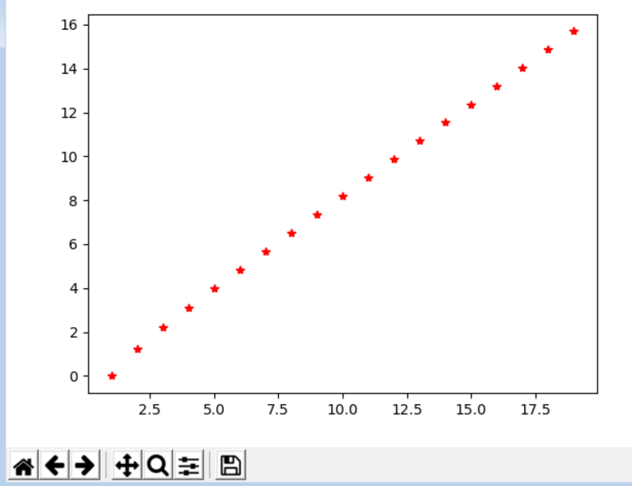
$$\lim_n \frac{n^2}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_n \frac{n}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = +\infty$$

D’après le théorème de comparaison on en déduit donc que :

$$\lim_n \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = +\infty$$

```python
def u(n):
    import math as m
    v=0
    for k in range(1,n**2):
        v=v+1/(m.sqrt(n**2+k))
    return v

def tracecourbe(n,premierterme):
    abscisse=[i for i in range(premierterme,n)]
    ordonnee=[u(i) for i in range(premierterme,n)]
    import matplotlib.pyplot as plt
    axes = plt.gca()
    plt.plot(abscisse,ordonnee,'*r')
    plt.show()
```



7) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (2+(-1)^n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(2+(-1)^n)}$$

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq 2+(-1)^n \leq 3$$

$$\Rightarrow 0 \leq \ln(2+(-1)^n) \leq \ln(3) \text{ car } \ln \text{ est croissante sur } [1;3]$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq u_n \leq e^{\frac{3}{n}}$$

Or on sait que :

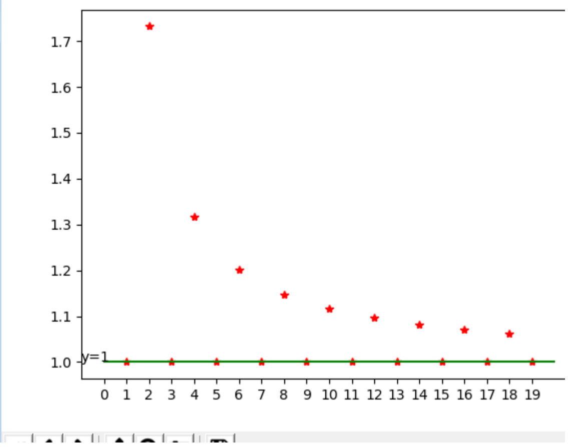
$$\lim_{n} e^{\frac{3}{n}} = 1$$

On en déduit donc d'après le théorème des gendarmes que :

$$\lim_{n} \sqrt[n]{2+(-1)^n} = 1$$

```python
def u(n):
    import math as m
    return ((2+(-1)**n)**(1/n))

def tracecourbe(n,premierterme,limite):
    abscisse=[i for i in range(premierterme,n)]
    ordonnee=[u(i) for i in range(premierterme,n)]
    import matplotlib.pyplot as plt
    axes = plt.gca()
    plt.plot(abscisse,ordonnee,'*r')
    plt.plot([0,n],[limite,limite],'g')
    plt.text(-1, limite, r'y='+str(limite))
    axes.xaxis.set_ticks(range(n))
    plt.show()
```



8) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-n;+\infty[, \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$$

On va démontrer le résultat suivant :

Lemme : Montrer que :

$$\forall x > -1, \frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$$

1ière inégalité : Montrons que :

$$\forall x > -1, \frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x)$$

On pose :

$$f: \begin{cases}]-1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x}{x+1} - \ln(1+x) \end{cases}$$

On sait que f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ $\left(f \in \mathcal{D}(]-1;+\infty[)\right)$ et :

$$\forall x > -1, f'(x) = \frac{(x+1)-x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{-x}{(1+x)^2}$$

On en déduit donc le tableau de variations suivant :

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	0	$\searrow$

De plus comme $f(0) = 0$ on en déduit donc que :

$$\forall x > -1, f(x) \leq 0$$

On a donc :

$$\forall x > -1, \frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x)$$

2ième inégalité : Montrons que :

$$\forall x > -1, x \geq \ln(1+x)$$

On pose :

$$g: \begin{cases}]-1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x - \ln(1+x) \end{cases}$$

On sait que g est dérivable sur $]-1;+\infty[$ $\left(g \in \mathcal{D}(]-1;+\infty[)\right)$ et :

$$\forall x > -1, g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

On en déduit donc le tableau de variations suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

De plus comme $g(0) = 0$ on en déduit donc que :

$$\forall x > -1, g(x) \geq 0$$

On a donc :

$$\forall x > -1, x \geq \ln(1+x)$$

On a donc :

$$\forall x > -1, \frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in]-n;+\infty[, \frac{\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}+1} \leq \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \leq \frac{x}{n}$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in]-n;+\infty[, \frac{x}{\frac{x}{n}+1} \leq n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \leq x$$

On en déduit donc d'après le théorème des gendarmes que :

$$\lim_{n} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = x$$

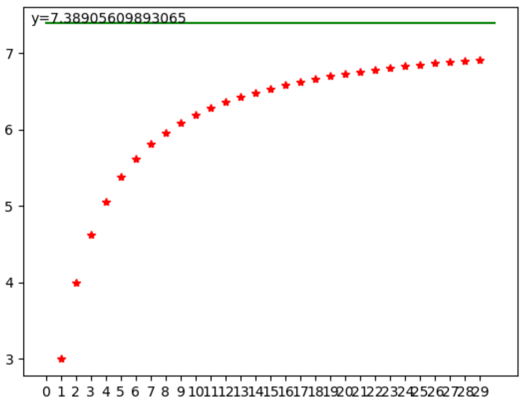
On en déduit donc que :

$$\lim_{n}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Illustration Python avec $x = 2$

```
def u(n,x):
    import math as m
    return ((1+x/n)**(n))

def tracecourbe(n,premierterme,limite):
    abscisse=[i for i in range(premierterme,n)]
    ordonnee=[u(i,2) for i in range(premierterme,n)]
    import matplotlib.pyplot as plt
    axes = plt.gca()
    plt.plot(abscisse,ordonnee,'*r')
    plt.plot([0,n],[limite,limite],'g')
    plt.text(-1, limite, r'y='+str(limite))
    axes.xaxis.set_ticks(range(n))
    plt.show()
```



9) On sait que :

$$\forall n \geq 2, (\ln(n))^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(\ln(n))}$$

De plus on sait par croissance comparée que :

$$\lim_{n}\frac{\ln(n)}{n} = 0$$

On en déduit donc que :

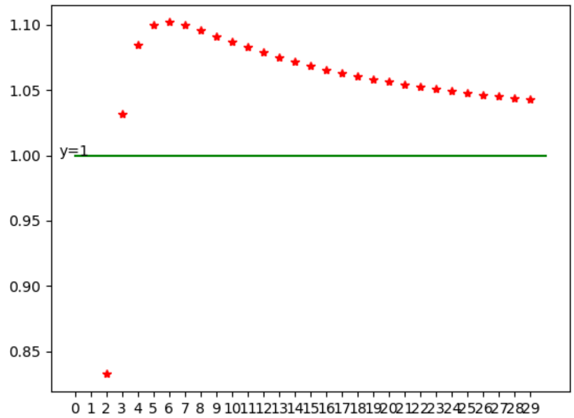
$$\lim_{n}\frac{\ln(\ln(n))}{n} = \lim_{n}\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} \times \frac{\ln(n)}{n} = \lim_{N\to+\infty}\frac{\ln(N)}{N} \times \lim_{n}\frac{\ln(n)}{n} = 0$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{n}(\ln(n))^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1$$

```python
def u(n):
    import math as m
    return ((m.log(n))**(1/n))

def tracecourbe(n,premierterme,limite):
    abscisse=[i for i in range(premierterme,n)]
    ordonnee=[u(i) for i in range(premierterme,n)]
    import matplotlib.pyplot as plt
    axes = plt.gca()
    plt.plot(abscisse,ordonnee,'*r')
    plt.plot([0,n],[limite,limite],'g')
    plt.text(-1, limite, r'y='+str(limite))
    axes.xaxis.set_ticks(range(n))
    plt.show()
```



10) On sait que :

$$\forall n \geq 2, \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{\ln(n)}} = e^{\frac{\ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)}}$$

De plus on sait que :

$$\forall n \geq 2, \ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \ln(n)$$

$$\Longrightarrow \forall n \geq 2, \frac{\ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} - 1$$

Or on sait que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1 \Longrightarrow \lim_{n} n\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

De plus on sait que :

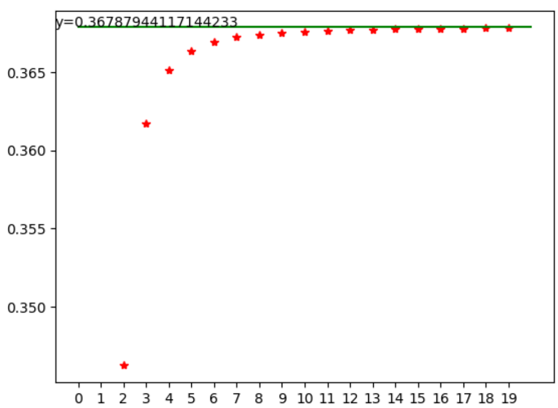
$$\lim_{n}\ln(n) = +\infty$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{n}\frac{\ln\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = 0 \Longrightarrow \lim_{n}\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{\ln(n)}} = e^{-1}$$

```python
def u(n):
    import math as m
    return ((m.sin(1/n))**(1/m.log(n)))

def tracecourbe(n,premierterme,limite):
    abscisse=[i for i in range(premierterme,n)]
    ordonnee=[u(i) for i in range(premierterme,n)]
    import matplotlib.pyplot as plt
    axes = plt.gca()
    plt.plot(abscisse,ordonnee,'*r')
    plt.plot([0,n],[limite,limite],'g')
    plt.text(-1, limite, r'y='+str(limite))
    axes.xaxis.set_ticks(range(n))
    plt.show()
```



Exercice C2 :

1) Montrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, |\sin(x) - x| \leq \frac{x^2}{2}$$

2) En déduire :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

1) Il faut montrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R}, -\frac{x^2}{2}\leq \sin(x)-x\leq\frac{x^2}{2}$$

Dans un premier temps nous allons démontrer le résultat suivant :

Lemme :

$$\forall x\in\mathbb{R}^+, \sin(x)-x\leq 0$$
$$\forall x\in\mathbb{R}^-, \sin(x)-x\geq 0$$

1er cas : $x\in\mathbb{R}^+$

On pose :

$$g:\begin{cases}\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \sin(x)-x\end{cases}$$

On sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et :

$$\forall x\in\mathbb{R}^+, f'(x)=\cos(x)-1\leq 0$$

On a donc le tableau de variation suivant :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
f	$0 \searrow$
$f(x)$	$-$

On en déduit donc que :

$$\forall x\in\mathbb{R}^+, \sin(x)-x\leq 0$$

2ième cas : $x\leq 0$

On sait que :

$$\forall x\leq 0, \sin(-x)-(-x)\leq 0$$
$$\Longrightarrow \forall x\leq 0, \sin(x)-x\geq 0 \text{ (par imparité de la fonction sinus)}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x\in\mathbb{R}^+, \sin(x)-x\leq 0$$
$$\forall x\in\mathbb{R}^-, \sin(x)-x\geq 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x\geq 0, \sin(x)-x\leq 0\leq\frac{x^2}{2}$$
$$\forall x\leq 0, \sin(x)-x\geq 0\geq-\frac{x^2}{2}$$

Nous allons à présent montrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R}^+, \sin(x)-x+\frac{x^2}{2}\geq 0$$

On pose $f: x\mapsto -\frac{x^2}{2}-\sin(x)+x$. On sait que $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+)$ et :

$$\forall x\geq 0, f'(x)=-x+1-\cos(x)\Longrightarrow f''(x)=\sin(x)-1\leq 0$$

On en déduit donc le tableau suivant :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f''(x)$	$-$
f'	0 $\searrow$
$f'(x)$	$-$
f	0 $\searrow$
$f(x)$	$-$

D'après les variations de la fonction f on en déduit que :

$$\forall x \geq 0, f(x) \leq 0 \Longrightarrow \forall x \geq 0, \sin(x) - x \geq -\frac{x^2}{2}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \leq 0, \sin(-x) - (-x) \geq -\frac{(-x)^2}{2}$$
$$\Longrightarrow \forall x \leq 0, -\sin(x) + x \geq -\frac{x^2}{2}$$
$$\Longrightarrow \forall x \leq 0, \sin(x) - x \leq \frac{x^2}{2}$$

Ainsi on a démontré que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -\frac{x^2}{2} \leq \sin(x) - x \leq \frac{x^2}{2}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x) - x| \leq \frac{x^2}{2}$$

2) D'après la question précédente on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![1;n]\!], \left|\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2}\right| \leq \frac{k^2}{2n^4}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![1;n]\!], -\frac{k^2}{2n^4} + \frac{k}{n^2} \leq \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k^2}{2n^4} + \frac{k}{n^2}$$
$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{k^2}{2n^4} + \frac{k}{n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{2n^4} + \frac{k}{n^2}\right)$$

Or on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{2n^4} + \frac{k}{n^2}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2n^4} + \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4} + \frac{n(n+1)}{2n^2}$$
$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} + \frac{n+1}{2n}$$

De même on a :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{k^2}{2n^4} + \frac{k}{n^2}\right) = -\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} + \frac{n+1}{2n}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} + \frac{n+1}{2n} \leq \sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} + \frac{n+1}{2n}$$

Or on sait que :

$$\lim_n \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} = \lim_n \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{12n} = 0$$

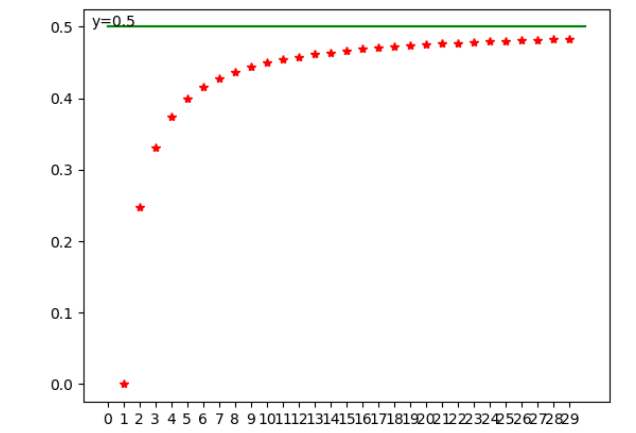
$$\lim_n \frac{n+1}{2n} = \lim_n \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}$$

On en déduit donc d'après le théorème des gendarmes que :

$$\lim_n \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$$

```python
def u(n):
    import math as m
    v=0
    for k in range(1,n):
        v=v+m.sin(k/n**2)
    return(v)

def tracecourbe(n,premierterme,limite):
    abscisse=[i for i in range(premierterme,n)]
    ordonnee=[u(i) for i in range(premierterme,n)]
    import matplotlib.pyplot as plt
    axes = plt.gca()
    plt.plot(abscisse,ordonnee,'*r')
    plt.plot([0,n],[limite,limite],'g')
    plt.text(-1, limite, r'y='+str(limite))
    axes.xaxis.set_ticks(range(n))
    plt.show()
```



Exercice C3 (moyenne de Cesaro) : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On pose pour tout

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$$

1) Montrer que si (u_n) est monotone, alors la suite (v_n) est monotone et de même sens que (u_n).
2) a) Montrer que si (u_n) converge vers 0, (v_n) aussi. Que pensez-vous de la réciproque ?
b) Montrer que si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, (v_n) aussi.
c) Montrer que si $\lim_n (w_{n+1} - w_n) = 0$, alors $\lim_n \frac{w_n}{n} = 0$. Donner un exemple d'une telle suie qui ne soit pas convergente.

1) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1}}{n+1} - \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$$
$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)n(v_{n+1} - v_n) = n(u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1}) - (n+1)(u_1 + u_2 + \dots + u_n)$$
$$= nu_{n+1} - (u_1 + u_2 + \dots + u_n)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (u_{n+1} - u_k)$$

1er cas : (u_n) est croissante

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![1;n]\!], u_{n+1} \geq u_k$$
$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)n(v_{n+1} - v_n) = \sum_{k=1}^{n} (u_{n+1} - u_k) \geq 0$$
$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n \geq 0$$

Donc la suite (v_n) est croissante.

2ième cas : : (u_n) est décroissante

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![1;n]\!], u_{n+1} \leq u_k$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)n(v_{n+1} - v_n) = \sum_{k=1}^{n} (u_{n+1} - u_k) \leq 0$$
$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n \leq 0$$

Donc la suite (v_n) est décroissante.

On en déduit donc que si (u_n) est monotone, alors la suite (v_n) est monotone et de même sens que (u_n)

2) a) On sait que :

$$\lim_n u_n = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, |u_n| \leq \epsilon$$

On pose $\epsilon > 0$. On en déduit donc que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \left|\frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}\right| \leq \frac{|u_1| + \cdots + |u_{n_0 - 1}|}{n} + \frac{|u_{n_0}| + \cdots + |u_n|}{n}$$
$$\leq \frac{|u_1| + \cdots + |u_{n_0-1}|}{n} + \frac{(n - n_0 + 1)}{n}\epsilon$$

Or on sait que :

$$\lim_n \frac{|u_1| + \cdots + |u_{n_0-1}|}{n} = 0 \text{ et } \lim_n \frac{(n - n_0 + 1)}{n} = 1$$

On en déduit donc que :

$$\forall \epsilon > 0, \lim_n \left|\frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}\right| \leq \epsilon$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n \left|\frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}\right| = 0 \Longrightarrow \lim_n v_n = 0$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n u_n = 0 \Longrightarrow \lim_n v_n = 0$$

La réciproque est fausse. On trouve un contre-exemple.

On pose $u_n = (-1)^{n+1}$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} \leq \frac{1}{n} \Longrightarrow \lim_n v_n = 0$$

b) Dans cette question on suppose que (u_n) converge vers ℓ. On pose la suite (w_n) suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = v_n - \ell$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \frac{u_1 + \cdots u_n}{n} - \ell$$
$$= \frac{u_1 + \cdots u_n}{n} - \frac{n\ell}{n}$$
$$= \frac{(u_1 - \ell) + \cdots + (u_n - \ell)}{n}$$

Or on sait d'après la question 2) a) que :

$$\lim_n (u_n - \ell) = 0 \Longrightarrow \lim_n w_n = 0 \Longrightarrow \lim_n (v_n - \ell) = 0$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n u_n = \ell \Longrightarrow \lim_n v_n = \ell$$

c) Il faut penser à utiliser une moyenne de Césaro. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = w_{n+1} - w_n$$

On a alors d'après la question 2) a) :

$$\lim_n u_n = 0 \Longrightarrow \lim_n \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} = 0$$

Or on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (w_{k+1} - w_k) = w_{n+1} - w_1$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} = \frac{w_{n+1} - w_1}{n}$$

De plus on sait que :

$$\lim_n \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} = 0 \text{ et} \lim_n \frac{w_1}{n} = 0$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n \frac{w_{n+1}}{n} = 0$$

De plus on sait que :

$$\left|\frac{w_{n+1}}{n}\right| \geq \left|\frac{w_{n+1}}{n+1}\right|$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n \left|\frac{w_{n+1}}{n+1}\right| = 0 = \lim_n \frac{w_n}{n}$$

Par exemple on peut poser :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sqrt{n}$$

On a alors :

$$\lim_n (w_{n+1} - w_n) = \lim_n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim_n \left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right) = 0$$

Pourtant on a :

$$\lim_n w_n = +\infty$$

Exercice C4 : Ecrire à l'aide des quantificateurs les propriétés suivantes :
1) La suite u ne converge par vers le réel ℓ
2) La suite u ne diverge pas vers $+\infty$
3) La suite u diverge

On vous apprend ici à écrire les négations de certaines propositions.
1) On sait que la suite (u_n) converge vers ℓ si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \epsilon$$

La négation devient :

$$\exists \epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n_0 > n, |u_n - \ell| > \epsilon$$

2) De même on a :
(u_n) diverge vers $+\infty$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, u_n > A$$

La négation devient :

$$\exists A \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0, u_n \leq A$$

3) On sait que (u_n) diverge si elle ne converge vers aucun réel ℓ. Avec la première question on obtient :

$$\forall \ell \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \epsilon$$

Exercice C5 (règle de d'Alembert) : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

On suppose que v converge vers une limite ℓ. Montrer que :
1) Si ℓ<1, u converge vers 0
2) Si ℓ>1, u diverge $+\infty$
3) Que dire quand $\ell = 1$?

1) On sait que :

$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell < 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$$

On en déduit donc que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Longrightarrow, \forall n \geq n_0, u_{n+1} < u_n$$

On en déduit donc que la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.

Comme elle est minorée par 0, elle converge vers un réel $\ell' \geq 0$.
Si $\ell' > 0$ on a alors :

$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\ell'}{\ell'} = 1$$

On obtient alors une contradiction avec le fait que :

$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

On en déduit donc que $\lim_n u_n = 0$

2) On sait que :

$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell > 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$$

On en déduit donc que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Longrightarrow, \forall n \geq n_0, u_{n+1} > u_n$$

On en déduit donc que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang. Donc soit elle converge vers un réel $\ell' \geq 0$ soit elle diverge vers $+\infty$.
Si la suite converge vers ℓ'. On a alors :

$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\ell'}{\ell'} = 1$$

On obtient alors une contradiction avec le fait que :

$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n u_n = +\infty$$

3) Ici il suffit de prendre deux exemples.
1er cas : On pose :

$$\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}, \mathbf{u_n} = \mathbf{n+1}$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0 \text{ et } \lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_n \frac{n+2}{n+1} = \lim_n \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

De plus on a :

$$\lim_n u_n = +\infty$$

2ième cas : De même on pose :

$$\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}, \mathbf{u_n} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n+1}}$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0 \text{ et } \lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_n \frac{n+1}{n+2} = \lim_n \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = 1$$

De plus on a :

$$\lim_n u_n = 0$$

On ne peut donc rien conclure.

Exercice C6 : Montrer que la suite suivante converge :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

Donc la suite (u_n) est croissante.

A présent il faut montrer que la suite est majorée !
On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![1;n]\!], k^2 = k \times k \geq k \times (k-1)$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![1;n]\!], \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$$

Ensuite il faut voir que :

$$\forall k \in [\![2;n]\!], \frac{1}{k(k-1)} = \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

On en déduit donc que :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2$$

Donc la suite (u_n) est majorée par 2. Comme elle est croissante, on en déduit donc que la suite converge.

Remarque : Ici on ne peut pas voir vers quoi la suite converge. On verra dans l'année que :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Partie D : Convergence des suites implicites

Exercice D.1 : On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \left]n\pi - \frac{\pi}{2}; \; n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$$

On pose de plus l'équation :

$$(E): \tan(x) = x$$

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution x_n dans I_n
2) Déterminer la limite de x_n
3) Montrer que :

$$\frac{1}{n\pi} x_n \to 1$$

4) Montrer qu'il existe (x_n) qui converge vers 0 telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + v_n$$

1) Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$f_n : \begin{cases} \left]n\pi - \frac{\pi}{2}; \; n\pi + \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \tan(x) - x \end{cases}$$

On sait que $f_n \in \mathcal{C}^1(I_n)$ et :

$$\forall x \in \backslash I_n, f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} - 1 = \tan^2(x) \geq 0$$

On en déduit donc que (f_n) est croissante.

De plus on sait que $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan(x) = 0 \\ x \in I_n \end{cases} \Leftrightarrow x = n\pi$

On en déduit donc que f_n est strictement croissante sur I_n.

De plus on a :

$$\lim_{\substack{x \to n\pi - \frac{\pi}{2} \\ x > n\pi - \frac{\pi}{2}}} f_n(x) = -\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \to n\pi + \frac{\pi}{2} \\ x < n\pi + \frac{\pi}{2}}} f_n(x) = +\infty$$

On a le tableau de variation suivant :

x	$n\pi - \frac{\pi}{2}$		$n\pi + \frac{\pi}{2}$
$f_n'(x)$		$+$	
f_n	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

On a donc f_n est :

_ continue sur I_n

_ strictement croissante sur I_n

_ Change de signe sur I_n

Donc d'après le théorème de la bijection, il existe un unique $x_n \in I_n$ tel que $f_n(x_n) = 0$

On en déduit donc que l'équation (E) admet une unique solution x_n dans I_n.

2) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq n\pi - \frac{\pi}{2}$$

Or on sait que :

$$\lim_n \left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = +\infty$$

On en déduit donc par comparaison que :

$$\lim_n x_n = +\infty$$

3) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n\pi + \frac{\pi}{2} \geq x_n \geq n\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + \frac{1}{2n} \geq \frac{x_n}{n\pi} \geq 1 - \frac{1}{2n}$$

De plus on sait que :

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{2n}\right) = \lim_n \left(1 - \frac{1}{2n}\right) = 1$$

On en déduit donc d'après le théorème des gendarmes que :

$$\lim_n \frac{x_n}{n\pi} = 1$$

4) On pose la suite (v_n) définie par :

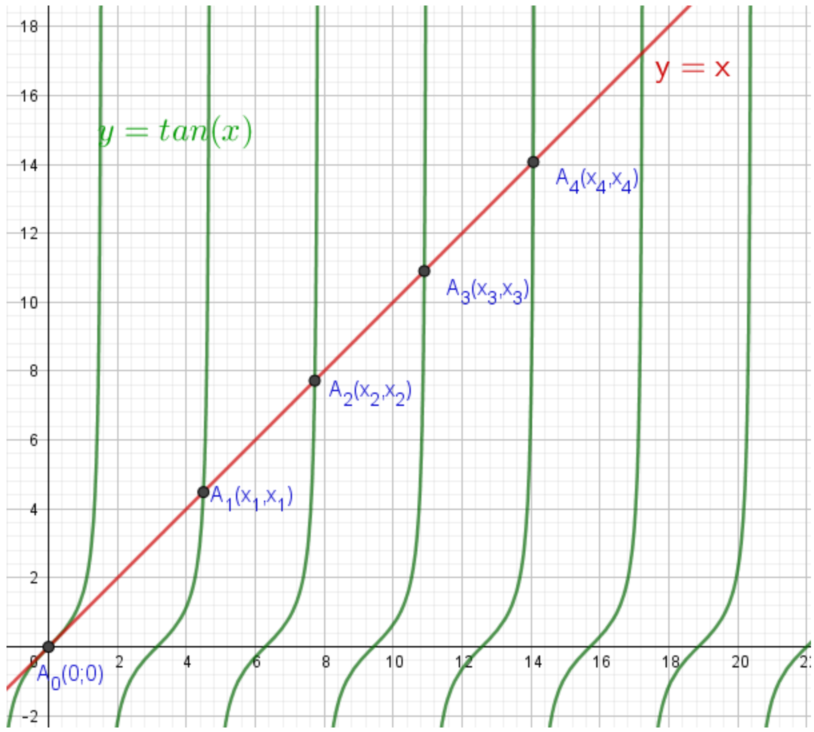
$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = x_n - \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n\pi + \frac{\pi}{2} \geq x_n \geq n\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\Longrightarrow 0 \geq x_n - \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \geq$$

On peut faire apparaitre les premiers éléments de la suite (x_n) sur le graphe suivant :



Exercice D.2 : a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution réelle. On note u_n cette solution.
b) Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
c) En déduire qu'elle converge et calculer sa limite.

a) Soit $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$. On pose la fonction :

$$\mathrm{f_n} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \mathrm{x} \mapsto \mathrm{x}^3 + \mathrm{nx} - 1 \end{cases}$$

$\mathrm{f_n} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $\forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}, \mathrm{f}'_\mathrm{n}(\mathrm{x}) = 3\mathrm{x}^2 + \mathrm{n} > 0$ si $\mathrm{n} > 0$
De même on sait que $\mathrm{f_0} : \mathrm{x} \mapsto \mathrm{x}^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
On en déduit donc que $\mathrm{f_n}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'_n(x)$	$+$
f_n	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

On a donc $\mathrm{f_n}$ est :
_ continue sur $\mathbb{R}$
_ strictement croissante sur $\mathbb{R}$
_ Change de signe sur $\mathbb{R}$
Donc d'après le théorème de la bijection, il existe un unique $\mathrm{u_n} \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{f_n}(\mathrm{u_n}) = 0$
On en déduit donc que pour tout $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$, l'équation $\mathrm{x}^3 + \mathrm{nx} = 1$ admet une unique solution réelle.
b) On sait que $\mathrm{f_{n+1}}$ est croissante sur $\mathbb{R}$. De plus on a :

$$\mathrm{f_{n+1}}(\mathrm{u_n}) = (\mathrm{u_n})^3 + (\mathrm{n}+1)\mathrm{u_n} = (\mathrm{u_n})^3 + \mathrm{nu_n} + \mathrm{u_n} = 1 + \mathrm{u_n}$$

De plus on sait que :

$$\mathrm{f_n}(0) = -1 < 0 \Longrightarrow \mathrm{f_n}(0) < \mathrm{f_n}(\mathrm{u_n}) \Longrightarrow 0 < \mathrm{u_n} \text{ car } \mathrm{f_n} \text{ est croissante}$$

On en déduit donc que :

$$\mathrm{f_{n+1}}(\mathrm{u_n}) = 1 + \mathrm{u_n} > 1$$
$$\Longrightarrow \mathrm{f_{n+1}}(\mathrm{u_n}) > \mathrm{f_{n+1}}(\mathrm{u_{n+1}})$$

$$\Longrightarrow u_n > u_{n+1} \text{ car } f_{n+1} \text{ est croissante}$$

On en déduit donc que la suite (u_n) est décroissante.

c) On a démontré précédemment que la suite (u_n) était décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un réel positif. On pose :

$$\lim_n u_n = \ell \geq 0$$

De plus on sait que :

$$\leq u_n = \frac{1}{u_n^2 + n} \leq \frac{1}{n}$$

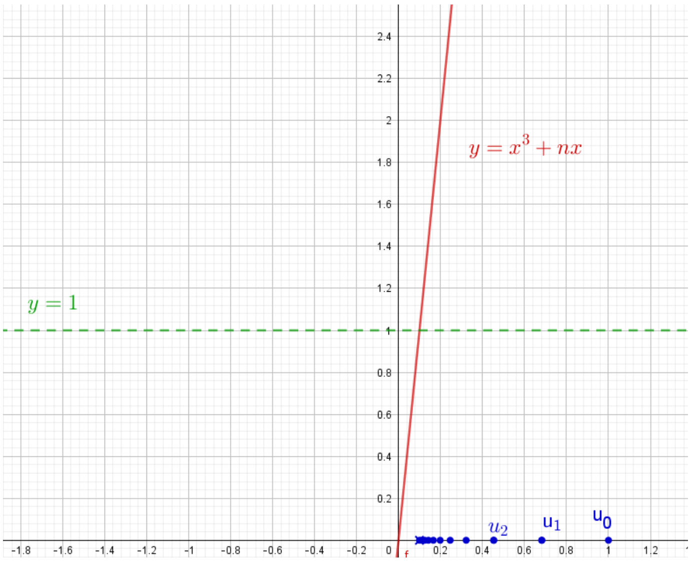
On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$$

D'après le théorème des gendarmes on en déduit donc que :

$$\lim_n u_n = 0$$

On a la courbe suivante :



Exercice D.3 : a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x + x^2 + \cdots + x^n = 1$ admet une unique solution réelle dans l'intervalle $[0; +\infty[$. On note x_n cette solution.
b) Montrer que la suite (x_n) est monotone, puis convergente et calculer sa limite.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose la fonction :

$$f_n : \begin{cases} [0; +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x + x^2 + \cdots + x^n \end{cases}$$

$f_n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n'(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} > 0 \text{ car } x \geq 0$$

On en déduit donc que f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

x	0	$+\infty$
$f_n'(x)$	$+$	
f_n	$0 \nearrow$	$+\infty$

On a donc f_n est :
_ continue sur $\mathbb{R}^+$
_ strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$
_ $f_n(0) = 0$ et $f_n \to +\infty$ quand $x \to +\infty$

Donc d'après le théorème de la bijection, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}^+$ tel que $f_n(x_n) = 1$

b) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1}(x_n) = x_n + x_n^2 + \cdots + (x_n)^n + (x_n)^{n+1} = 1 + (x_n)^{n+1} > 1$$

On en déduit donc que :

$$f_{n+1}(x_n) > f_{n+1}(x_{n+1})$$

Comme la fonction f_{n+1} est croissante on en déduit donc que : $f_{n+1}(x_n) > f_{n+1}(x_{n+1}) \Longrightarrow x_n > x_{n+1}$

Donc la suite (x_n) est décroissante.

De plus (x_n) est minorée par 0 donc elle converge vers un réel $\ell, \ell \geq 0$.

De plus on sait que :

$$\begin{gathered} \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2, f_n(1) = n > 1 \\ \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2, f_n(x_n) < f_n(1) \\ \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2, x_n < 1 \text{ car } f_n \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+ \end{gathered}$$

De plus on sait que :

$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2, x_n + \cdots + (x_n)^n = 1 \\ &\Longrightarrow x_n = 1 - (x_n)^2(1 + x_n + \cdots + (x_n)^{n-2}) \\ &= 1 - (x_n)^2 \times \frac{1 - (x_n)^{n-1}}{1 - x_n} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2, x_n = 1 - (x_n)^2 \times \frac{1 - (x_n)^{n-1}}{1 - x_n}$$

De plus on sait que :

$$\begin{gathered} \forall n \geq 2, 0 < x_n \leq x_2 < 1 \\ \Longrightarrow \forall n \geq 2, 0 < (x_n)^{n-1} \leq (x_2)^{n-1} < 1 \end{gathered}$$

Or on sait que :

$$\lim_n (x_2)^{n-1} = 0 \text{ car } x_2 < 1$$

On en déduit donc d'après le théorème des gendarmes que :

$$\lim_n (x_n)^{n-1} = 0$$

On a donc par passage à la limite :

$$\begin{aligned} x_n &= 1 - (x_n)^2 \times \frac{1 - (x_n)^{n-1}}{1 - x_n} \\ &\Longrightarrow \ell = 1 - \ell^2 \times \frac{1}{1 - \ell} \\ &\Longrightarrow \ell - \ell^2 = 1 - \ell - \ell^2 \\ &\Longrightarrow \ell = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n x_n = \frac{1}{2}$$

Partie E : Suites adjacentes

Exercice E.1 (La suite arithmético-géométrique) : Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On pose :

$$\begin{cases} (u_0, v_0) = (a, b) \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n \leq v_n$$

2) Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$$

3) Montrer que u et v sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

1) On va déjà démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0 \text{ et } v_n > 0$$

On pose les propositions suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) : "u_n > 0 \text{ et } v_n > 0"$$

Initialisation : $n = 0$

On a alors $u_0 = a > 0$ et $v_0 = b > 0$. On en déduit donc que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, fixé. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a alors :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} > 0 \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} > 0$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire donc d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

De plus on sait que :

$$\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}^{+^*}\right)^2 \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$$
$$\Longrightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$$
$$\Longrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - u_{n+1} \geq 0$$
$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq u_n$$

On en déduit donc que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n \leq v_n$$

2) On va déjà démontrer par récurrence que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$$

Pour cela on va déjà démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2}$$

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (\, v_{n+1} - u_{n+1}) - \frac{v_n - u_n}{2} = \left(\frac{u_n + v_n}{2} - v_n\right) + \frac{1}{2}\left(u_n - 2\sqrt{u_n v_n}\,\right)$$
$$= \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(u_n - 2\sqrt{u_n v_n}\,\right)$$

Or on sait d'après la question 1 que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n \leq v_n$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_n - v_n}{2} < 0$$

De plus on a :

$$0 < u_n \leq v_n \Longrightarrow (u_n)^2 \leq u_n v_n$$
$$\Longrightarrow u_n \leq \sqrt{u_n v_n} \leq 2\sqrt{u_n v_n}$$
$$\Longrightarrow u_n - 2\sqrt{u_n v_n} < 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (\, v_{n+1} - u_{n+1}) - \frac{v_n - u_n}{2} \leq 0$$
$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2}$$

A présent on pose les propositions suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) : "\forall\, n \in \mathbb{N}, v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)"$$

Initialisation : $n = 0$

On a alors $u_0 = a > 0$ et $v_0 = b$.

On en déduit donc que :

$$v_0 - u_0 = \frac{1}{2^0}(v_0 - u_0)$$

On en déduit donc que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, fixé. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a alors :

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2}$$

De plus d'après l'hypothèse de récurrence on sait que :

$$v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$$

On en déduit donc que :

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2} \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$$

On en déduit donc que :

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}(v_0 - u_0)$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire donc d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

3) Il faut montrer que (u_n) et (v_n) sont croissante et décroissante respectivement.

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n = \sqrt{u_n}\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right)$$

Or on sait d'après la question 1 que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n \leq v_n$$

On en déduit donc par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < \sqrt{u_n} \leq \sqrt{v_n}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} \geq u_n$$

Donc la suite (u_n) est croissante à partir de 1.

De plus on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0 \text{ car } \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n \leq v_n$$

On en déduit donc que la suite (v_n) est décroissante à partir de 1.

De plus d'après la question 2 on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall\, n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$$

De plus on sait que :

$$\lim_n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ car } \frac{1}{2} \in]-1;1[$$

On en déduit donc d'après le théorème des gendarmes que :

$$\lim_n (v_n - u_n) = 0$$

Ainsi les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes car on a les trois propriétés suivantes :

_ (u_n) est croissante
_ (v_n) est décroissante
_ $\lim_n (v_n - u_n) = 0$

On en déduit donc d'après les propriétés des suites adjacentes que :

$$\lim_n u_n = \lim_n v_n = \ell$$

Cependant il est très difficile d'obtenir la limite ℓ !

Exercice E.2 : On pose :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad u_n = H_n - \ln(n) \quad \text{et } v_n = H_n - \ln(n+1)$$

1) a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

b) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

2) En déduire l'existence de $\gamma \in \mathbb{R}$ et d'une suite (w_n) qui converge vers 0 tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + w_n \text{ (}\gamma\text{ est appelée la constante d'Euler)}$$

3) Quelle est la limite de H_n en $+\infty$?

4) Déterminer la limite de :

$$R_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

1) a) Il faut penser à la démonstration du lemme suivant (déjà fait dans le chapitre 4 et dans ce TD exercice C1, 8) :

Lemme : Montrer que :

$$\forall x > -1, \frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$$

1ière inégalité : Montrons que :

$$\forall x > -1, \frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x)$$

On pose :

$$f : \begin{cases}]-1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x}{x+1} - \ln(1+x) \end{cases}$$

On sait que f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ $\left(f \in \mathcal{D}(]-1;+\infty[)\right)$ et :

$$\forall x > -1, f'(x) = \frac{(x+1)-x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{-x}{(1+x)^2}$$

On en déduit donc le tableau de variations suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	0	$\searrow$	

De plus comme $f(0) = 0$ on en déduit donc que :

$$\forall x > -1, f(x) \leq 0$$

On a donc :

$$\forall x > -1, \frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x)$$

2ième inégalité : Montrons que :

$$\forall x > -1, x \geq \ln(1+x)$$

On pose :

$$g : \begin{cases}]-1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x - \ln(1+x) \end{cases}$$

On sait que g est dérivable sur $]-1;+\infty[$ $\left(g \in \mathcal{D}(]-1;+\infty[)\right)$ et :

$$\forall x > -1, g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

On en déduit donc le tableau de variations suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

De plus comme $g(0) = 0$ on en déduit donc que :

$$\forall x > -1, g(x) \geq 0$$

On a donc :

$$\forall x > -1, x \geq \ln(1+x)$$

On a donc :

$$\forall x > -1, \frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$$

Il suffit ensuite de voir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} > -1 \text{ donc :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1} \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

2) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = H_n - \ln(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq 0 \text{ (d'aprèsla question 1)}$$

Donc la suite (u_n) est décroissante.

De même on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = H_n - \ln(n+1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+2)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

Or on sait d'après la question 1 que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \Longrightarrow \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n \geq 0$$

Donc la suite (v_n) est croissante.

De plus on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Or on sait que :

$$\lim_n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim_n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(1) = 0$$

On en déduit donc que :

$$\mathbf{\lim_n (u_n - v_n) = 0}$$

Ainsi les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes car on a les trois propriétés suivantes :
_ (u_n) est croissante
_ (v_n) est décroissante
_ $\lim_n (v_n - u_n) = 0$
On en déduit donc d'après les propriétés des suites adjacentes que les suites (u_n) et (v_n) convergent :

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, \lim_n u_n = \lim_n v_n = \ell$$

c) On sait que :

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, \lim_n u_n = \ell = \lim_n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)$$

On pose γ cette limite et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) - \gamma$$

On a alors :

$$\lim_n w_n = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + w_n$$

d) On en déduit donc que :

$$\lim_n H_n = \lim_n (\ln(n) + \gamma + w_n) = +\infty$$

e) On sait d'après la question c que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} &= (\ln(2n) + \gamma + w_{2n}) - (\ln(n-1) + \gamma + w_{n-1}) \\ &= \ln\left(\frac{2n}{n-1}\right) + w_{2n} - w_{n-1} \end{aligned}$$

Or on sait que :

$$\lim_n \ln\left(\frac{2n}{n-1}\right) = \lim_n \ln\left(\frac{2}{1-\frac{1}{n}}\right) = \ln(2)$$

Partie F : Suites extraites

Exercice F.1 : Etudier la convergence de :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Il suffit de prendre deux suites extraites qui convergent vers deux limites différentes.
On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{4n} = \sin\left(\frac{4n\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{4n\pi}{2}\right) = 1 \Longrightarrow \lim_n u_{4n} = 1$$

De plus on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{8n+2} = \sin\left(\frac{(8n+2)\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{(8n+2)\pi}{2}\right) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(4n\pi + \pi) = 0 \Longrightarrow \lim_n u_{8n+2} = 1$$

On a donc deux suites extraites de (u_n) qui ne convergent pas vers la même limite.
Donc la suite (u_n) diverge.

Exercice F.2 : Etudier la convergence de :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{1}{n}$$

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{3n} = \sin\left(\frac{3n\pi}{3}\right) + \frac{1}{3n} = \sin(n\pi) + \frac{1}{3n}$$
$$\Longrightarrow \lim_n u_{3n} = 0$$

De même on a :

$$u_{6n+1} = \sin\left(\frac{(6n+1)\pi}{3}\right) + \frac{1}{6n+3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{6n+3} \Longrightarrow \lim_n u_{6n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

On a donc deux suites extraites de (u_n) qui ne convergent pas vers la même limite.
Donc la suite (u_n) diverge.

Exercice F.3 : Soit u une suite réelle monotone admettant une sous-suite convergente. Montrer que la suite u converge.

Soit (u_n) une suite monotone tel que : $\exists \varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante tel que $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ converge.

1er cas : On suppose que (u_n) est croissante

On sait que :

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, \lim_n u_{\varphi(n)} = \ell$$

On en déduit donc que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \leq \epsilon$$

De plus on sait que $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ est croissante donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{\varphi(n)} \leq \ell$$

On en déduit donc que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 0 \leq \ \ell - u_{\varphi(n)} \leq \epsilon$$

Or on sait que (u_n) est croissante. On en déduit donc que :

$$\forall n \geq \varphi(n_0), u_{\varphi(n)} \geq \ u_n \geq u_{\varphi(n_0)}$$

On en déduit donc que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 0 \leq \ell - u_n \leq \ell - u_{\varphi(n)} \leq \epsilon$$

On en déduit donc que (u_n) converge vers ℓ.

2ième cas : On suppose que (u_n) est décroissante

On sait que :

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, \lim_n u_{\varphi(n)} = \ell$$

On en déduit donc que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \leq \epsilon$$

De plus on sait que $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ est décroissante donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{\varphi(n)} \geq \ell$$

On en déduit donc que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 0 \leq \ u_{\varphi(n)} - \ell \leq \epsilon$$

Or on sait que (u_n) est croissante. On en déduit donc que :

$$\forall n \geq \varphi(n_0), u_{\varphi(n)} \leq \ u_n \leq u_{\varphi(n_0)}$$

On en déduit donc que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 0 \leq u_n - \ell \leq u_{\varphi(n)} - \ell \leq \epsilon$$

On en déduit donc que (u_n) converge vers ℓ.

Partie G : Suites récurrentes d’ordre 1

Exercice G.1 : On considère la suite définie $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \in [0;3]$:

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$$

b) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Ici on peut étudier la fonction :

$$f : \begin{cases} [0;3] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{2x+3} \end{cases}$$

On a alors :

$$\forall x \in [0;3], f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+3}} = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} > 0$$

On en déduit donc les variations de f :

x	0	3
$f'(x)$	$+$	
f	$\sqrt{3}$ $\nearrow$	3

On va démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) : \text{" } 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3 \text{"}$$

Initialisation : $n = 0$. On a :

$$u_0 = 0, u_1 = \sqrt{3}$$

On en déduit donc que :

$$0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 3$$

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel fixé. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a alors :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$$

De plus on sait que $f : x \mapsto \sqrt{2x+3}$ est croissante sur $[0;3]$. On en déduit donc que :

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(3)$$
$$\Longrightarrow \sqrt{3} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$$
$$\Longrightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$$

On en déduit donc que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : On conclut d’après le principe de récurrence.

2) (u_n) est une suite croissante majorée. Elle converge donc vers un réel compris entre 0 et 3 !

Cette suite converge vers ℓ qui vérifie :

$$\ell = f(\ell)$$
$$\Leftrightarrow \ell^2 = 2\ell + 3$$
$$\Leftrightarrow \ell^2 - 2\ell - 3 = 0$$

On calcule $\Delta = 4 + 4 \times 3 = 16$. On a donc :

$$\ell_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \text{ ou } \ell_2 = \frac{2+4}{2} = 3$$

On en déduit donc que $\ell = 3$.

Exercice G2 : Etudier les suites définies par :

$$\text{a) } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n(1-u_n) \quad \text{b) } u_0 = 1/2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}(4-u_n)$$

$$\text{c) } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \text{ et } u_0 = 1 \quad \text{d) } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1+2u_n) \text{ et } u_0 \in \mathbb{R}$$

a) On pose $f: x \mapsto 2x(1-x)$ définie sur $\mathbb{R}$.
On va étudier cette fonction.
On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

On cherche les points fixes de f :

$$f(x) = x \Leftrightarrow 2x(1-x) = x \Leftrightarrow x(1-2x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0; \frac{1}{2}\right\}$$

1er cas : Si $u_0 \in \left\{0; \frac{1}{2}\right\}$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0$$

Donc la suite est constante.

2ième cas : $u_0 \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$

On sait que $f\left(\left]0; \frac{1}{2}\right[\right) \subset \left]0; \frac{1}{2}\right[$

On en déduit donc que $\left]0; \frac{1}{2}\right[$ est stable par f. De plus f est croissante sur $\left]0; \frac{1}{2}\right[$ donc d'après une propriété du cours qui se démontre par récurrence (presque) trivial, (u_n) est croissante ou décroissante, suivant le signe de $u_1 - u_0$

On sait que :

$$u_1 - u_0 = 2u_0(1-u_0) - u_0 = u_0(1-2u_0) > 0 \text{ car } u_0 \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$$

On en déduit donc que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < u_{n+1} < \frac{1}{2}$$

Donc la suite (u_n) est majorée et croissante, donc elle est convergente vers un point fixe de f, ici $\frac{1}{2}$ car :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_0 \leq u_n$$

3ième cas : $u_0 \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[$

On a alors d'après le tableau de variation $u_1 \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$.

Cela revient au cas n°2.

4ième cas : $u_0 = 1 \Longrightarrow u_1 = 0 \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 0$

5ième cas : $u_0 < 0$

On sait que $f(]-\infty; 0[) \subset]-\infty; 0[$ et que f est croissante sur $]-\infty; 0[$. On en déduit donc que (u_n) est monotone.

De plus on a :

$$u_1 - u_0 = u_0(1-2u_0) < 0$$

Donc la suite (u_n) est décroissante. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_0 < 0$$

Si la suite (u_n) était convergente, on se ramènerait à deux limites possibles, 0 ou $\frac{1}{2}$. Or cela est impossible.

On en déduit donc que (u_n) diverge, et comme elle est décroissante, elle diverge vers $+\infty$

6ième cas : $u_0 > 1 \Longrightarrow u_1 < 0$ et on se ramène au cas 5.

b) On a :

$$u:\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n) \end{cases}$$

C'est une suite arithmético-géométrique. On peut alors expliciter une relation entre u_n et n.

On pose $f: x \mapsto \frac{1}{3}(4 - x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

_ On cherche le point fixe

On résout :

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{3}(4 - x) = x \Leftrightarrow x = 1$$

_ On pose une suite auxiliaire

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 1 \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{1}{3}(4 - u_n) - \frac{1}{3}(4 - 1) = -\frac{1}{3}(u_n - 1)$$

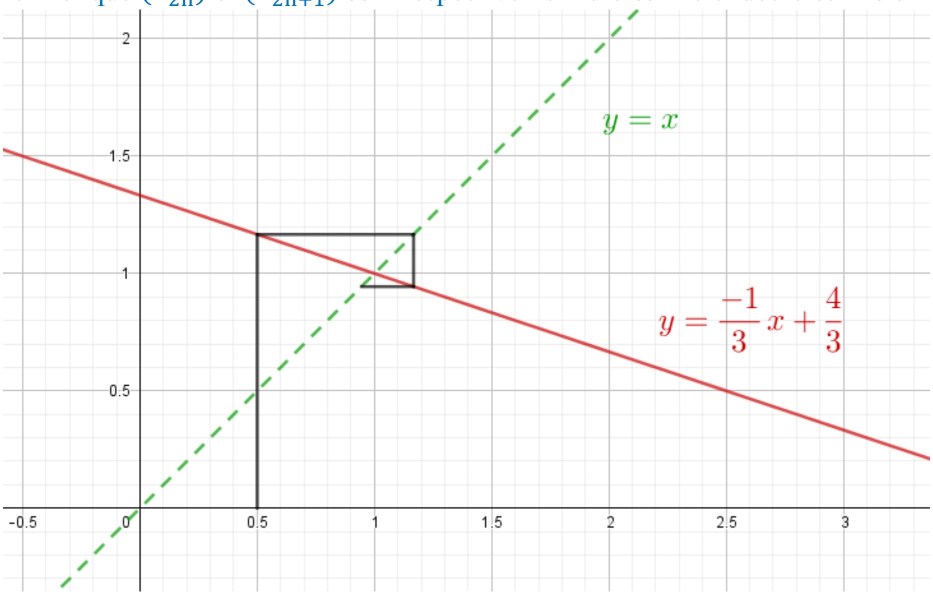
On en déduit que (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n + 1$$

On en déduit que :

$$\lim_n u_n = 1$$

De plus on peut démontrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont respectivement croissante et décroissante et adjacentes !



---

c) On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto xe^{-x} \end{cases}$$

On sait que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-x}(1 - x)$$

On a alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

On sait de plus que $f(0) = 0$. On en déduit donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires (car f est continue) donc :

$$f([0; 1]) = \left[0; \frac{1}{e}\right] \subset [0; 1]$$

On en déduit donc que $[0; 1]$ est stable par f.

Comme $u_0 = 1 \in [0;1]$, on en déduit donc que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0;1]$.
De plus f est croissante sur $[0;1]$ donc (u_n) est monotone.
De plus on a :

$$u_1 - u_0 = \frac{1}{e} - 1 < 0$$

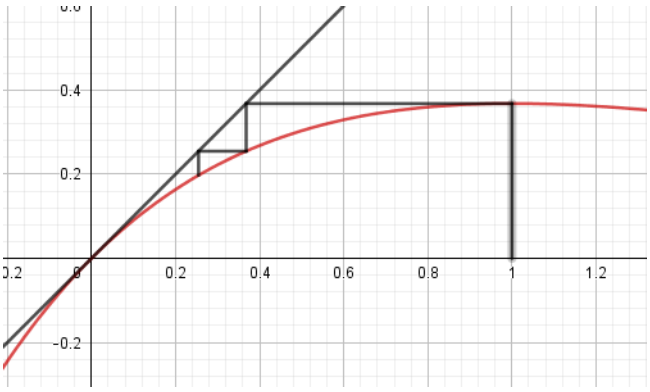
Donc la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un réel $\ell \geq 0$ qui vérifie :

$$\ell = f(\ell)$$

On résout :

$$f(x) = x \Leftrightarrow xe^{-x} = x \Leftrightarrow (x-1)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Donc (u_n) est décroissante et converge vers 0.
On peut le voir sur la courbe ci-dessous :



---

d) On pose $f: x \mapsto \ln(1+2x)$
On sait que $\mathcal{D}_f = \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ donc on peut déjà écarter les cas où $u_0 < -\frac{1}{2}$.
On étudie la fonction f. On a :

x	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
f	$\nearrow$	0	$\nearrow$

D'après les variations on en déduit que $f([0;+\infty[) \subset [0;+\infty[$ donc $[0;+\infty[$ est stable par f.
De plus on peut voir que si $u_0 \in \left]-\frac{1}{2}; 0\right]$ alors $u_1 < 0$ et donc la suite (u_n) n'est pas définie à partie de $n = 2$. On en déduit donc qu'on étudie la suite :

$$u: \begin{cases} u_0 \geq 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1+2u_n) \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1+2u_n) \text{ et } u_0 \in \mathbb{R}$$

1er cas : $u_0 = 0$
On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$
2ième cas : $u_0 > 0$
Comme la fonction f est croissante, (u_n) est monotone.
On regarde alors le signe de $u_1 - u_0$.

$$u_1 - u_0 = \ln(1+2u_0) - u_0$$

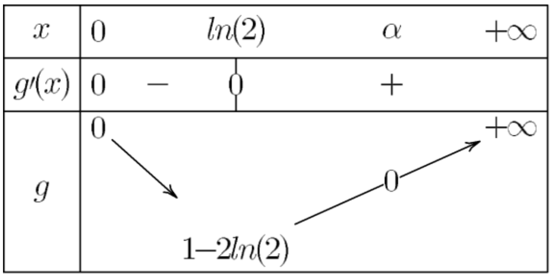
On va chercher le point fixe de f sur $\mathbb{R}^+$.
On a :

$$f(x) = x \Leftrightarrow \ln(1+2x) = x \Leftrightarrow 1 + 2x = e^x \Leftrightarrow e^x - 2x - 1 = 0$$

On pose $g: x \mapsto e^x - 2x - 1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$. On a alors :

$$\forall x \geq 0, g'(x) = e^x - 2$$

On a alors le tableau de variation suivant :



On sait que :
_ $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$
_ g est strictement croissante sur $]\ln(2) + \infty[$
_ g change de signe sur $]\ln(2) ; +\infty[$
On en déduit que :

$$\exists!\, \alpha \in]0; +\infty[, f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \exists!\, \alpha \in]0; +\infty[, \ln(1 + 2\alpha) = \alpha$$

On a alors le tableau de variation suivant :

On en déduit donc que :

$$f(]0; \alpha[) \subset]0; \alpha[$$

On distingue alors deux cas.

- $\mathbf{u_0 \in]0; \alpha[}$

On a alors :

$$u_1 - u_0 > 0 \Longrightarrow (u_n) \text{ est croissante}$$

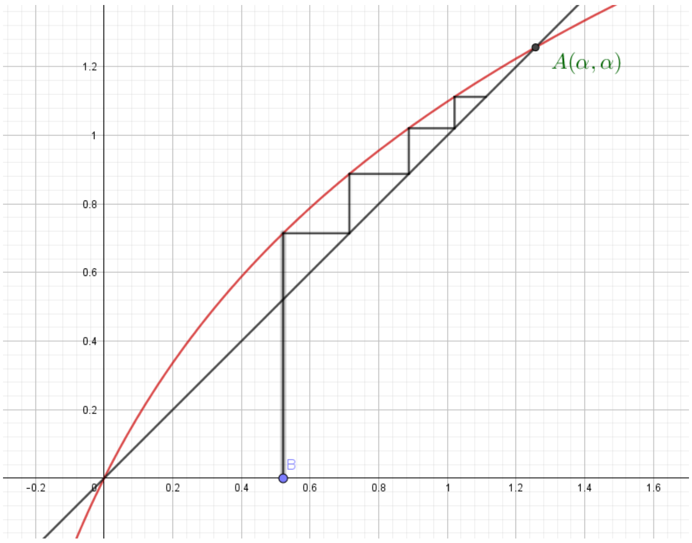
On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq u_{n+1} \leq f(\alpha)$$

Comme la suite (u_n) est croissante et majorée, elle converge vers $\ell > 0$, on en déduit donc que :

$$\lim_n u_n = \alpha$$

On peut le voir sur la courbe suivante :



- $\mathbf{u_0 > \alpha}$

On a alors :

$$u_1 - u_0 < 0 \Longrightarrow (u_n) \text{ est décroissante}$$

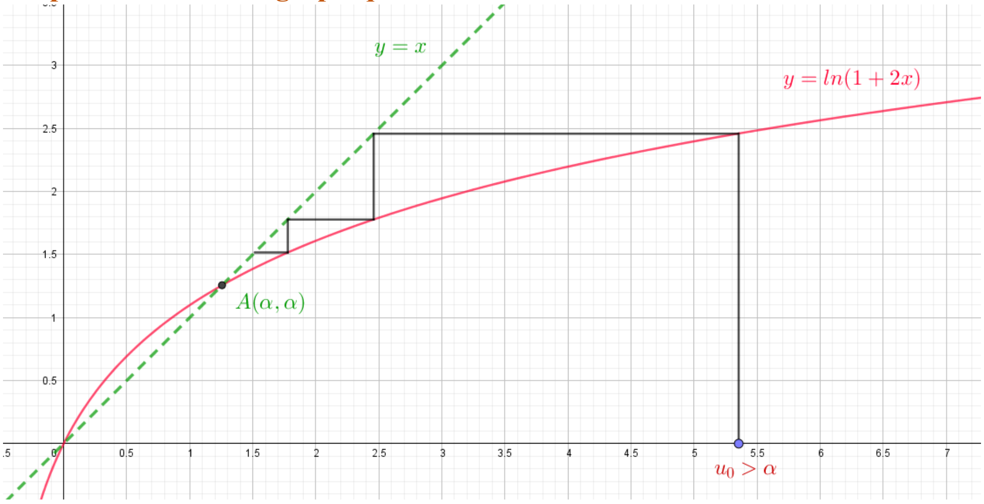
On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha < u_{n+1} \leq u_n$$

On en déduit donc que la suite (u_n) est décroissante et minorée donc elle converge vers un point fixe, donc :

$$\lim_n u_n = \alpha$$

On peut le voir sur le graphique ci-dessous :



Remarque : Nous n'avons pas déterminer la valeur de α. Peut être que α est un nombre irrationnel et que l'on ne peut déterminer qu'une valeur approchée de α. Pour ce faire on doit trouver un encadrement de α. On peut faire un programme Python avec deux suites adjacentes (u_n) et (v_n). On pourrait ainsi prendre :

$$u : \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \ln(1 + 2u_n) \end{cases}$$

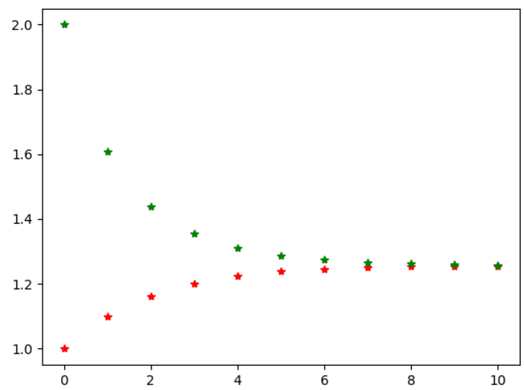
$$v : \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \ln(1 + 2v_n) \end{cases}$$

D'après ce que l'on vu précédemment (et je me suis aussi aidé de la courbe de géogébra pour voir que $1 < \alpha < 2$), les deux suites sont adjacentes et convergent vers la même limite.
On peut faire les programmes Python suivant :

- **Avec la courbe :**

```
    v=[2]
    for i in range(1,n+1):
        u.append(m.log((1+2*u[i-1]),m.exp(1)))
        v.append(m.log((1+2*v[i-1]),m.exp(1)))
    import matplotlib.pyplot as plt
    plt.plot([i for i in range(n+1)],u,'*r')
    plt.plot([i for i in range(n+1)],v,'*g')
    plt.show()
```

```
ython 3.4.5 |Continuum Analytics, Inc.| (default, Jul  5 2016,
```



- **Avec les valeurs numériques :**

```
def exG2TD9(n):
    import math as m
    u=[1]
    v=[2]
    for i in range(1,n+1):
        u.append(m.log((1+2*u[i-1]),m.exp(1)))
        v.append(m.log((1+2*v[i-1]),m.exp(1)))
        print([u[i],'<alpha<',v[i]])
```

```
>>> exG2TD9(10)
[1.0986122886681098, '<alpha<', 1.6094379124341003]
[1.1622831138840004, '<alpha<', 1.4395687003478859]
[1.2013392077833216, '<alpha<', 1.3556128095102529]
[1.2245628907790618, '<alpha<', 1.3113621775951037]
[1.2381208022830934, '<alpha<', 1.28722632709480l]
[1.2459517114796799, '<alpha<', 1.2738120607012113]
[1.2504469809395082, '<alpha<', 1.2662781178550395]
[1.2530183535615447, '<alpha<', 1.2620217549714388]
[1.2544862562454582, '<alpha<', 1.2596090547465428]
[1.2553232631394808, '<alpha<', 1.258238836951012]
>>>
```

Exercice G3 : Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par :

$$f:\mapsto \frac{x^2}{2-x^2}$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in [0;1[$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2-u_n^2}$$

1) Montrer que pour tout $x \in [0;1[$, $0 \leq f(x) \leq x \leq 1$.
2) En déduire que $0 \leq u_n < 1$ puis que (u_n) est décroissante.
3) La suite (u_n) a-t-elle une limite et si oui laquelle ?

1) Il suffit d'étudier la fonction. $f \in \mathcal{C}^1([0;1])$ et :

$$\forall x \in [0;1], f'(x) = \frac{2x(1-x^2)+2x^3}{(2-x^2)^2} = \frac{2x}{(2-x^2)^2}$$

On en déduit donc le tableau de variations suivant :

x	0		1
f	0	$\nearrow$	1

On en déduit donc que $\forall x \in [0;1], f(x) \in [0;1]$.

2) On sait que $u_0 \in [0;1[$ donc par une récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0;1[$$

De plus on sait que f est croissante donc (u_n) est monotone.

De plus on a :

$$u_1 - u_0 = \frac{u_0^2}{2-u_0^2} - u_0 = \frac{u_0^2 - u_0(2-u_0^2)}{2-u_0^2} = \frac{u_0(u_0^2+u_0-2)}{2-u_0^2}$$

De plus on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2+x-2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = (x+2)(x-1)$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in [0;1[, x^2+x-2 < 0$$

On en déduit donc que :

$$u_1 - u_0 < 0$$

On en déduit donc que (u_n) est décroissante.

3) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers $\ell \in [0;1[$.

De plus on sait que ℓ vérifie l'équation :

$$\ell = \frac{\ell^2}{2-\ell^2} \Longrightarrow \ell(\ell^2+\ell-2) = 0 \Longrightarrow \ell(\ell+2)(\ell-1) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \ell = 0 \\ \ell = 1 \\ \ell = -2 \end{cases}$$

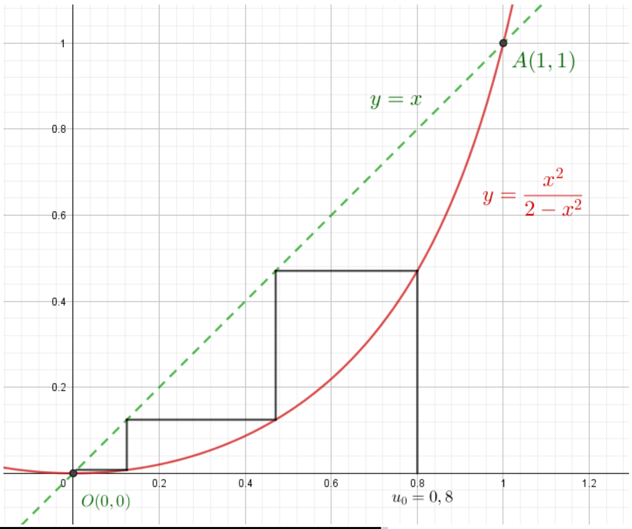
De plus on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n < u_0 < 1$$

On en déduit donc que :

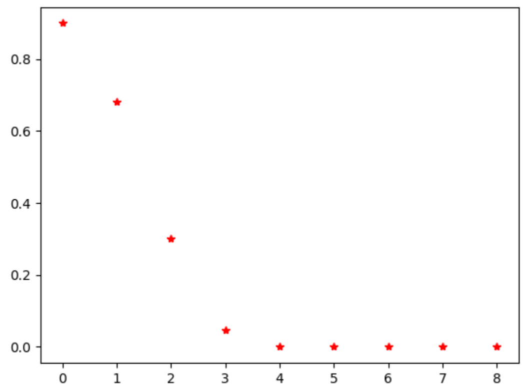
$$\lim_n u_n = \ell = 0$$

On a les illustrations suivantes :




```python
def exG2TD9(n,a):
    u=[a]
    for i in range(1,n+1):
        u.append(u[i-1]**2/(2-u[i-1]**2))
    import matplotlib.pyplot as plt
    plt.plot([i for i in range(n+1)],u,'*r')
    plt.show()
```

```
Python 3.4.5 |Continuum Analytics, Inc.| (default, Jul  5 201
```



Exercice G.4 : On pose :

$$u : \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + 2 \end{cases}$$

1) Représenter les premiers termes de la suite et conjecturer son sens de variation et sa limite.
2) Ecrire un programme Python qui vous affiche la courbe obtenue en 1.
3) Exprimer u_n en fonction de n puis en déduire la limite de u_n.
4) Déterminer une formule explicite de :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

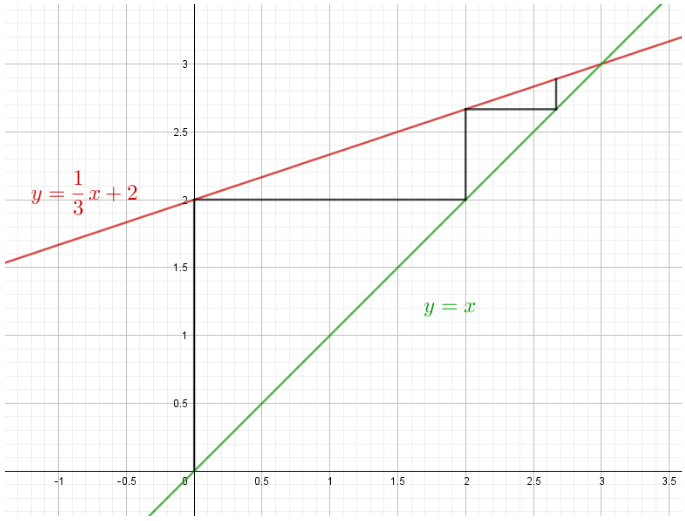
5) Même questions pour la suite définie par :

$$u : \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -u_n + 4 \end{cases}$$

1) On a :

$$(u_n) = \left(0; 2; \frac{7}{3}; \dots\right)$$

La suite (u_n) semble croissante.
On a la courbe suivante :



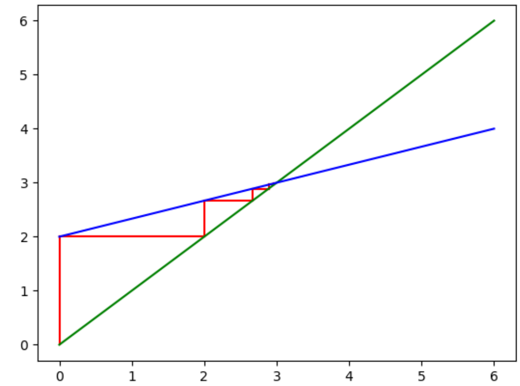
2) On a :

```
def exG2TD9(n):
    u=[0]
    import matplotlib.pyplot as plt
    for i in range(1,n+1):
        u.append(1/3*u[i-1]+2)
        plt.plot([u[i-1],u[i-1]],[u[i-1],u[i]],'r')
        plt.plot([u[i-1],u[i]],[u[i],u[i]],'r')
    plt.plot([0,6],[0,6],'g')
    plt.plot([0,6],[2,4],'b')
    plt.show()
```

aint.py × module1 ×

hon

Error: x and y must have same first dimension, but have shapes



3) La suite (u_n) est arithmético-géométrique.

_ On cherche le point fixe :

$$f(x)=x \Leftrightarrow \frac{1}{3}x+2=x \Leftrightarrow x=2$$

_ On pose la suite auxiliaire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 3$$
$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{1}{3}(u_n - 3) = \frac{1}{3}v_n$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (-3) + 3 = 3\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

De plus on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lim_n \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \Longrightarrow \lim_n u_n = 3$$

4) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} 3\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^k\right) = 3(n+1) - 3 \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} 3(n+1) - \frac{9}{2} \times \left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

5) On pose :

$$u:\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -u_n + 4 \end{cases}$$

_ On cherche le point fixe :

$$f(x) = -x + 4 = x \Longrightarrow x = 2$$

_ On pose une suite auxiliaire

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 2$$
$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = -u_n + 4 - 2 = -(u_n - 2) = -v_n$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n(-1) + 2 = (-1)^{n+1} + 2$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = 1, u_{2n+1} = 3$$

On peut le voir grâce à un programme Python :

```python
def exG2TD9(n):
    u=[1]
    for i in range(1,n+1):
        u.append(-u[i-1]+4)
    return (u)
```

```
DM1 Toussaint.py    module1
Console Python
*** Python 3.4.5 |Continuum Analytics, I
 on win32. ***
>>>
*** Console de processus distant Réiniti
>>>
>>> exG2TD9(10)
[1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1]
```

Exercice G5 :Soit u la suite définie par récurrence par :

$$u: \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right) \end{cases}$$

1) Montrer que u_n existe et $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{\left|u_n - \sqrt{2}\right|^2}{2}$$

3) a) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2^{2^n-1}}$$

b) Donner la limite de (u_n).
4) Combien de termes de la suite faut-il calculer pour avoir une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-100} près ?

1) Il suffit de prouver que :

$$\forall x \geq \sqrt{2}, f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \geq \sqrt{2}$$

On sait que $f: x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \in \mathcal{C}^1\left(\left[\sqrt{2}; +\infty\right[\right)$ et :

$$\forall x \geq \sqrt{2}, f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right) = \frac{1}{2x^2}(x^2 - 2) \geq 0$$

On a les variations suivantes :

x	$\sqrt{2}$	$+\infty$
f	$\sqrt{2}$	$\nearrow$

On en déduit donc d'après le TVI que :

$$f\left(\left[\sqrt{2}; +\infty\right[\right) = \left[\sqrt{2}; +\infty\right[$$

On en déduit donc que $\left[\sqrt{2}; +\infty\right[$ est stable par f.

Du plus on sait que $u_0 = 2 \geq \sqrt{2}$.

On en déduit donc par une récurrence immédiate que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \sqrt{2}$$

2) On sait que :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - \sqrt{2} &= \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n} - 2\sqrt{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{(u_n)^2 - 2\sqrt{2}u_n + 2}{u_n}\right)\\ &= \frac{1}{2u_n}\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2\end{aligned}$$

Or on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \sqrt{2} \geq 1$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2$$

3) a)

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{2^n - 1}}$$

On peut le faire par récurrence :
On pose la proposition Q_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, Q_n = "u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{2^n-1}}"$$

Initialisation : On a

$$\begin{cases} u_0 - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2} < 1 \\ \dfrac{1}{2^{2^0-1}} = \dfrac{1}{2^0} = 1 \end{cases} \Longrightarrow u_0 - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{2^0-1}} \Longrightarrow P_0 \text{ est vraie.}$$

Hérédité : Soit n un entier fixé. On suppose vraie Q_n : $u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{2^n-1}}$
On a donc :

$$0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{2^n-1}}$$

$$\Longrightarrow \left(u_n - \sqrt{2}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2^{2^n-1}}\right)^2 \quad (\text{car } x \mapsto x^2 \text{ est croissante sur } [0; +\infty[)$$

On sait que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2$$

$$\Longrightarrow u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{2^n-1}}\right)^2$$

Or on a :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{2^n-1}}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{(2^{2^n-1})^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{2^n \times 2 - 2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{2^{n+1}-2}} = \frac{1}{2^{2^{n+1}-1}}$$

Donc Q_{n+1} est vraie.

Conclusion : Q_0 est vraie et Q_n est héréditaire donc d'après le principe de récurrence, Q_n est vraie pour tout entier naturel n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{2^n-1}}$$

b) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{2^n-1}}$$

Or on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2^{2^n-1}} = \frac{2}{2^{2^n}}$$

On sait que :

$$\lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty \ (\text{car } 2 > 1)$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} 2^{2^n} = +\infty$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{2^{2^n}} = 0$$

D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n - \sqrt{2} = 0$$

On a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$$

c) On a vu précédemment que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{2^n-1}}$$

On cherche :

$$0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq 10^{-100}$$

On résout :

$$\frac{1}{2^{2^n-1}} \leq 10^{-100}$$

$$\Longrightarrow 2^{2^n-1} \geq 10^{100} \left(\text{car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur }]0;+\infty[\right)$$

On peut résoudre cette équation à « tâtons » si l'on ne connait pas la fonction ln ou log.
Sinon on a :

$$2^{2^n-1} \geq 10^{100}$$

$$\Longrightarrow \ln\left(2^{2^n-1}\right) \geq \ln\left(10^{100}\right) \ (\text{ car } x \mapsto \ln(x) \text{ est croissante sur }]0;+\infty[\ )$$

$$\Longrightarrow (2^n - 1)\ln(2) \geq 100\ln(10)$$

$$\Longrightarrow 2^n \geq 1 + \frac{100\ln(10)}{\ln(2)} \ (\text{ car } \ln(2) > 0)$$

$$\Longrightarrow \ln(2^n) \geq \ln\left(1 + \frac{100\ln(10)}{\ln(2)}\right) \ (\text{ car } x \mapsto \ln(x) \text{ est croissante sur }]0;+\infty[\ )$$

$$\Longrightarrow n\ln(2) \geq \ln\left(1 + \frac{100\ln(10)}{\ln(2)}\right)$$

$$\Longrightarrow n \geq \frac{\ln\left(1 + \frac{100\ln(10)}{\ln(2)}\right)}{\ln(2)}$$

Or à la calculatrice on obtient :

$$\frac{\ln\left(1 + \frac{100\ln(10)}{\ln(2)}\right)}{\ln(2)} \approx 8{,}38$$

Il faut donc 9 étapes pour avoir une valeur approchée à 10^{-100} de $\sqrt{2}$.
Ainsi u_9 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-100}.
Remarque : On peut faire un programme Python :

```
u=[2]
for i in range(1,5):
    u.append(1/2*(u[i-1]+2/u[i-1]))
print(u)
```

Ainsi $\sqrt{2} \approx 1.414213562374689$ à 10^{-15}

Exercice G.6 : Soient $x > 1$, (u_n) et (v_n) définies par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = x\,;\, v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \end{cases}$$

1) Montrer que (u_n) et (v_n) sont bien définies et à termes strictement positifs.
2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq v_n$$

3) Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
4) Montrer que la suite $(u_n v_n)$ est constante. En déduire la valeur de la limite commune à (u_n) et (v_n).

1) On peut faire une récurrence immédiate. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) : "u_n > 0 \text{ et } v_n > 0"$$

Initialisation : $n = 0$
On a : $u_0 = x > 0\,;\, v_0 = 1 > 0$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit n un entier naturel fixé. On suppose vraie $\mathcal{P}(n)$. On a alors :
On a alors :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) > 0 \text{ et } v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} > 0$$

On en déduit donc que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire donc d'après le principe de récurrence, on en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0 \text{ et } v_n > 0$$

2) On peut le faire par récurrence. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{Q}(n) : "u_n \geq v_n"$$

Initialisation : $n = 0$
On a : $u_0 = x > 1 \Longrightarrow u_0 \geq v_0$. Donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit n un entier naturel fixé. On suppose vraie $\mathcal{P}(n)$. On a alors :
On a alors :

$$u_n \geq v_n$$

On a alors :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) = \frac{\frac{1}{2}(u_n + v_n)^2}{u_n + v_n} = \frac{\frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2 + 2u_n v_n)}{u_n + v_n} = \frac{\frac{1}{2}((u_n - v_n)^2 + 4u_n v_n)}{u_n + v_n} \geq \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$$

On en déduit donc que $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{Q}(0)$ est vraie et $\mathcal{Q}(n)$ est héréditaire donc d'après le principe de récurrence, on en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq v_n$$

3) Il suffit de montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
_ (u_n) est décroissante.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n + v_n) - u_n = \frac{1}{2}(v_n - u_n) < 0$$

_ (v_n) est croissante.

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} - v_n = \frac{v_n(u_n - v_n)}{u_n + v_n} > 0$$

_ $\lim\limits_{n}(u_n - v_n) = 0$
On sait que les suites (u_n) et (v_n) sont respectivement décroissante et croissante. De plus on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq v_0 \leq v_n \leq u_n \leq u_0$$

On en déduit que la suite (u_n) est décroissante minorée donc converge vers $\ell_1 \geq 1$ et (v_n) est croissante majorée donc converge vers $\ell_2 \geq 1$.
De plus on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} = \frac{(u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$$

Par passage à la limite on en déduit donc que :

$$\ell_1 - \ell_2 = \frac{(\ell_1 - \ell_2)^2}{2(\ell_1 + \ell_2)}$$

On raisonne par l'absurde : Si $\ell_1 \neq \ell_2$

On a alors :

$$\ell_1 - \ell_2 = 2(\ell_1 + \ell_2) \Longrightarrow \ell_1 = -3\ell_2 < 0$$

Impossible car $\ell_1 \geq 1$

On en déduit donc que :

$$\ell_1 = \ell_2 = \ell$$

4) On calcule :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \times \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} = u_n v_n$$

On en déduit donc que la suite $(u_n v_n)$ est constante et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n v_n = \ell_1 \ell_2 = \ell^2$$

Comme $\ell \geq 1 > 0$ on en déduit donc que :

$$\ell = \sqrt{u_0 v_0} = \sqrt{x}$$

On peut faire un programme Python pour illustrer la convergence des deux suites vers $\sqrt{x}$:

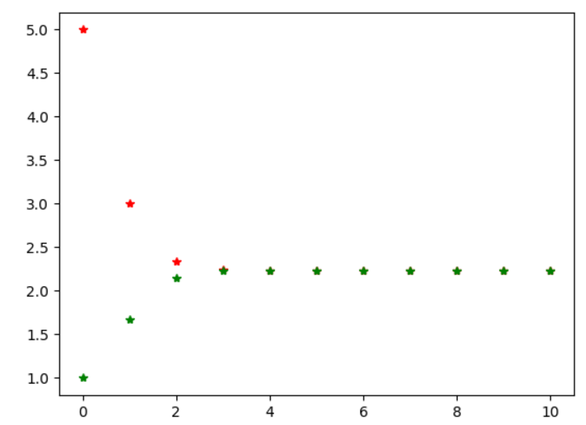
```python
def f(x,y):
    return(1/2*(x+y),2*x*y/(x+y))

def courbe(n,x):
    u=[x]
    v=[1]
    for i in range(1,n+1):
        u.append(f(u[i-1],v[i-1])[0])
        v.append(f(u[i-1],v[i-1])[1])
    print(u[n],v[n])
    import matplotlib.pyplot as plt
    plt.plot([i for i in range(n+1)],u,'*r')
    plt.plot([i for i in range(n+1)],v,'*g')
```

DM1 Toussaint.py   module1

Console Python

```
*** Python 3.4.5 |Continuum Analytics, Inc.| (default, Jul  5 2016, 14:56:50) [MSC v.1600 32 bit (Intel)] on wi
>>> courbe(10,5)
2.23606797749979 2.23606797749979
```



Exercice G.7 : Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$$

De plus on pose la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g: x \mapsto \sin(x) - x$.

1) Etudier g sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, -1 \leq u_n \leq 1$$

3) On suppose que $0 \leq u_1 \leq 1$

a) Montrer que pour tout $n \geq 1, 0 \leq u_n \leq 1$.

b) En déduire que pour tout $n \geq 1, u_{n+1} \leq u_n$.

c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

4) On suppose que $-1 \leq u_1 \leq 0$. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

1) On sait que $g \in \mathcal{C}^1\left(\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right)$ et :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right], g'(x) = \cos(x) - 1 \leq 0$$

On en déduit donc que :

x	$-\frac{\pi}{2}$ $\quad$ 0 $\quad$ $\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$	$-$
g	$\searrow$ 0 $\searrow$

2) C'est une récurrence immédiate car :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) \in [-1; 1]$$

3) a) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) : "0 \leq u_n \leq 1"$$

Initialisation : $n = 0$

On sait que $u_0 \in [0; 1]$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel n fixé. On suppose vraie $\mathcal{P}(n)$.

On a alors $u_n \in [0; 1] \subset \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. On en déduit donc que $u_{n+1} = \sin(u_n) \in [0; 1]$.

Donc $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire donc d'après le principe de récurrence, $u_n \in [0; 1]$ pour tout entier naturel n.

b) On sait d'après la question 1) que :

$$\forall x \in [0; 1], \sin(x) - x \leq 0$$

De plus on sait d'après la question 2) a) que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0; 1]$$

On en déduit donc que ;

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sin(u_n) - u_n \leq 0 \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leq 0$$

Donc la suite (u_n) est décroissante.

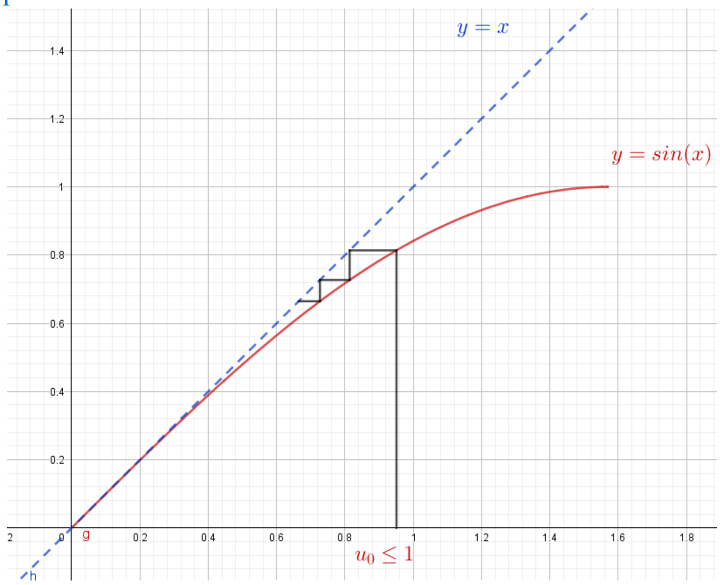
c) On en déduit donc que la suite (u_n) converge car elle est décroissante et minorée par 0.

On a donc :

$$1 \geq \ell \geq 0 \text{ et } \ell = \sin(\ell)$$

D'après l'étude de la fonction g dans la question 1, on en déduit que $\ell = 0$.

On peut le voir sur le graphique suivant :



4) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{Q}(n) : "-1 \leq u_n \leq 0"$$

Initialisation : $n = 0$

On sait que $u_0 \in [-1; 0]$ donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel n fixé. On suppose vraie $\mathcal{Q}(n)$.

On a alors $u_n \in [-1;0] \subset \left[-\frac{\pi}{2};0\right]$. On en déduit donc que $u_{n+1} = \sin(u_n) \in [-1;0]$.
Donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : $\mathcal{Q}(0)$ est vraie et $\mathcal{Q}(n)$ est héréditaire donc d'après le principe de récurrence, $u_n \in [0;1]$ pour tout entier naturel n.

b) On sait d'après la question 1) que :

$$\forall x \in [-1;0], \sin(x) - x \geq 0$$

De plus on sait d'après la question 2) a) que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [-1;0]$$

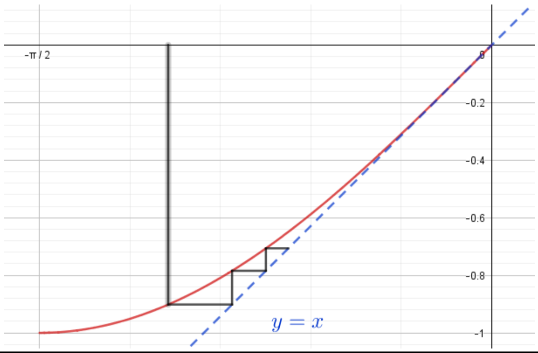
On en déduit donc que ;

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sin(u_n) - u_n \geq 0 \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$$

Donc la suite (u_n) est croissante.
c) On en déduit donc que la suite (u_n) converge car elle est croissante et majorée par 0.
On a donc :

$$-1 \leq \ell \leq 0 \text{ et } \ell = \sin(\ell)$$

D'après l'étude de la fonction g dans la question 1, on en déduit que $\ell = 0$.
On peut le voir sur le graphique suivant :



Partie H : Suites linéaires récurrentes d'ordre 2

Exercice H.1 : Donner le terme général et étudier la convergence des suites définies par $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ et :

a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$ b) $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$ c) $u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$

a) On résout l'équation caractéristique :

$$(E_q): r^2 - r + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(r - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

On en déduit donc que :

$$\exists!\,(A,B) \in \mathbb{R}^2, u_n = (An + B)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

b) On résout l'équation caractéristique :

$$(E_q): r^2 - r + \frac{1}{2} = 0 \Longrightarrow \Delta = i^2$$

On en déduit donc que :

$$r^2 - r + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = \dfrac{1-i}{2} = e^{-\frac{i\pi}{4}} \\ r_2 = \dfrac{1+i}{2} = e^{\frac{i\pi}{4}} \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\exists!\,(A,B) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^n + B\left(e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)^n$$

De plus on sait que $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$, donc par une récurrence immédiate on en déduit donc que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{R}$.
On en déduit donc que :

$$\begin{cases} u_0 = A + B = \overline{A} + \overline{B} \\ u_1 = Ae^{\frac{i\pi}{4}} + Be^{-\frac{i\pi}{4}} = \overline{A}e^{\frac{i\pi}{4}} + \overline{B}e^{\frac{i\pi}{4}} \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} (A - \overline{B}) + (B - \overline{A}) = 0 \\ (A - \overline{B})e^{\frac{i\pi}{4}} + (B - \overline{A})e^{-\frac{i\pi}{4}} = 0 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow (A - \overline{B})e^{\frac{i\pi}{4}} = (A - \overline{B})e^{-\frac{i\pi}{4}}$$
$$\Longrightarrow A = \overline{B}$$

On en déduit donc que :

$$\exists!\,(a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (a+ib)\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^n + (a-ib)\left(e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)^n$$
$$= 2\mathcal{R}e\left((a+ib)\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^n\right)$$
$$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\left(a\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) - b\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$$

c) On résout l'équation caractéristique :

$$(E_q): r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0$$
$$\Delta = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$$

On a donc :

$$r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} \\ r_2 = 1 \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\exists!\,(A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A\left(-\frac{1}{2}\right)^n + B$$

Exercice H.2 : Soit $(u_0; v_0) \in \mathbb{R}^2$. On pose :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$$

1) Explicitez u_n et v_n en fonction de n.
2) En déduire les limites des suites u et v.

1) On peut le faire de deux façons différentes.
Méthode 1 : Suite linéaire récurrentes d'ordre 2

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{1}{3}v_{n+1} = \frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{u_n + 2v_n}{3}\right) = \frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{9}(3u_{n+1} - 2u_n) = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$$

On peut alors résoudre l'équation caractéristique :

$$(E_q): r^2 - \frac{4}{3}r + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow r \in \left\{-\frac{1}{3}; 1\right\}$$

On en déduit donc que :

$$\exists!\,(A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A\left(-\frac{1}{3}\right)^n + B$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 3u_{n+1} - 2u_n = 3\left(A\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} + B\right) - 2\left(A\left(-\frac{1}{3}\right)^n + B\right) = -A\left(-\frac{1}{3}\right)^n + B$$

Méthode 2 : On peut remarquer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} + v_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} + \dfrac{u_n + 2v_n}{3} = u_n + v_n \\ u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} - \dfrac{u_n + 2v_n}{3} = \dfrac{u_n - v_n}{3} \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n + v_n = u_0 + v_0 \\ u_n - v_n = \dfrac{(u_0 - v_0)}{3^n} \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{u_0 + v_0}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{(u_0 - v_0)}{3^n}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_0 + v_0}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{(u_0 - v_0)}{3^n}$$

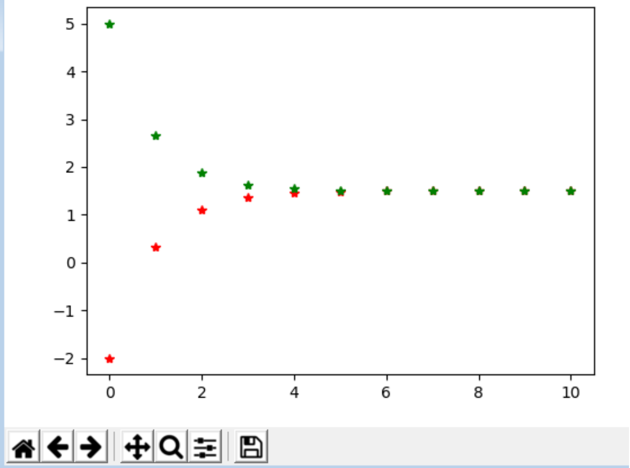
2) D'après la question 1), la méthode 2, on en déduit donc que :

$$\lim_n u_n = \lim_n v_n = \frac{u_0 + v_0}{2}$$

On peut faire un programme Python pour illustrer ces deux suites :

```python
def f(x,y):
    return (1/3*(2*x+y),1/3*(x+2*y))

def courbe(n,a,b):
    x=[a]
    y=[b]
    for i in range(1,n+1):
        x.append(f(x[i-1],y[i-1])[0])
        y.append(f(x[i-1],y[i-1])[1])
    print(x,y)
    import matplotlib.pyplot as plt
    plt.plot([i for i in range(n+1)],x,'*r')
    plt.plot([i for i in range(n+1)],y,'*g')
    plt.show()
```




```
DM 1 Toussaint.py   module1
Console Python
*** Python 3.4.5 |Continuum Analytics, Inc.| (default, Jul  5 2016, 14:56:50) [MSC v.1600 32 bi
>>> courbe(10,-2,5)
[-2, 0.3333333333333333, 1.1111111111111111, 1.3703703703703702, 1.45679012345679, 1.4855967078189298, 1.4951989026063095, 1.4983996342021026, 1.4994665447340338, 1.49982218157
.8888888888888886, 1.6296296296296293, 1.5432098765432096, 1.5144032921810695, 1.5048010973936894, 1.501600365797896, 1.5005334552659648, 1.5001778184219878, 1.500059272807328
```

Partie I : Suites complexes

Exercice I.1 : Etudier la convergence des suites complexes suivantes :

1) Pour tout entier naturel n, $z_n = x_n + iy_n$ avec $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n - y_n) \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + y_n) \end{cases}$$

2) Pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \frac{i}{2} z_n + 1$.

1) On peut faire la même chose que l'exercice précédent.

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = \frac{1}{2}x_{n+1} - \frac{1}{2}y_{n+1} = \frac{1}{2}x_{n+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{x_n + y_n}{2}\right) = \frac{1}{2}x_{n+1} - \frac{1}{4}x_n - \frac{1}{4}(x_n - 2x_{n+1}) = x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n$$

On peut alors résoudre l'équation caractéristique :

$$(E_q): r^2 - r + \frac{1}{2} = 0 \Longrightarrow \Delta = i^2$$

On en déduit donc que :

$$r^2 - r + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = \dfrac{1-i}{2} = e^{-\frac{i\pi}{4}} \\ r_2 = \dfrac{1+i}{2} = e^{\frac{i\pi}{4}} \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\exists!\,(A,B) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, x_n = A\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^n + B\left(e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)^n$$

De plus on sait que $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$, donc par une récurrence immédiate on en déduit donc que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \mathbb{R}$.
On en déduit donc que :

$$\begin{cases} x_0 = A + B = \overline{A} + \overline{B} \\ x_1 = Ae^{\frac{i\pi}{4}} + Be^{-\frac{i\pi}{4}} = \overline{A}e^{\frac{i\pi}{4}} + \overline{B}e^{\frac{i\pi}{4}} \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} (A - \overline{B}) + (B - \overline{A}) = 0 \\ (A - \overline{B})e^{\frac{i\pi}{4}} + (B - \overline{A})e^{-\frac{i\pi}{4}} = 0 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow (A - \overline{B})e^{\frac{i\pi}{4}} = (A - \overline{B})e^{-\frac{i\pi}{4}}$$
$$\Longrightarrow A = \overline{B}$$

On en déduit donc que :

$$\exists!\,(a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, x_n = (a+ib)\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^n + (a-ib)\left(e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)^n$$
$$= 2\mathcal{R}e\left((a+ib)\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^n\right)$$
$$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \left(a\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) - b\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$$

De plus on sait que

$$x_0 = 2a \text{ et } x_1 = \sqrt{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{b\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{x_0 - y_0}{2}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} a = \dfrac{x_0}{2} \\ a - b = \dfrac{x_0 - y_0}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{x_0}{2} \\ b = \dfrac{y_0}{2} \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \left(x_0\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) - y_0\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

De plus on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n = x_n - 2x_{n+1}$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \left(x_0\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) - y_0\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\left(x_0\cos\left(\frac{\pi}{4}(n+1)\right) - y_0\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right)\right)$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \left(x_0\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}(n+1)\right)\right) - y_0\left(\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}(n+1)\right)\right)\right)\right)$$

Or on sait que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}(n+1)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$$

De même on a :

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}(n+1)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \left(x_0 \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) + y_0 \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

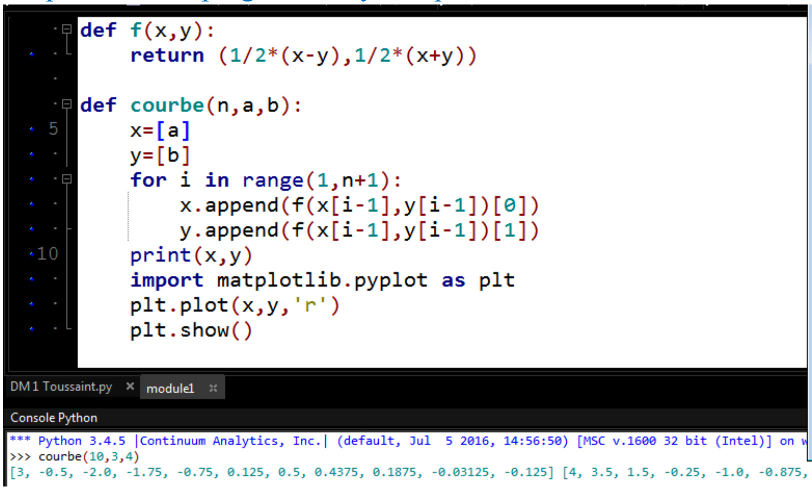
On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_n = x_n + iy_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \left(x_0 e^{\frac{in\pi}{4}} + iy_0 e^{\frac{in\pi}{4}}\right)$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n z_n = 0$$

On peut faire un programme Python pour illustrer cette suite



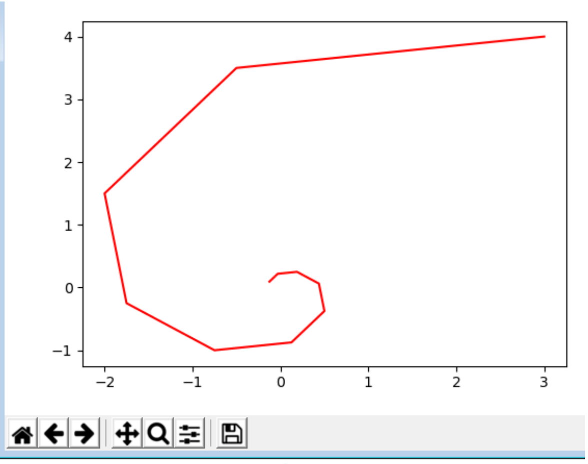
```python
def f(x,y):
    return (1/2*(x-y),1/2*(x+y))

def courbe(n,a,b):
    x=[a]
    y=[b]
    for i in range(1,n+1):
        x.append(f(x[i-1],y[i-1])[0])
        y.append(f(x[i-1],y[i-1])[1])
    print(x,y)
    import matplotlib.pyplot as plt
    plt.plot(x,y,'r')
    plt.show()
```

DM1 Toussaint.py   module1

Console Python

```
*** Python 3.4.5 |Continuum Analytics, Inc.| (default, Jul  5 2016, 14:56:50) [MSC v.1600 32 bit (Intel)] on w
>>> courbe(10,3,4)
[3, -0.5, -2.0, -1.75, -0.75, 0.125, 0.5, 0.4375, 0.1875, -0.03125, -0.125] [4, 3.5, 1.5, -0.25, -1.0, -0.875, -0.375, 0.0625, 0.25, 0.21875, 0.09375]
```



2) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{i}{2}z_n + 1$$

_ On cherche le point fixe :

$$f(z) = z \Leftrightarrow \frac{i}{2}z + 1 = z \Leftrightarrow z = -\frac{1}{\frac{i}{2} - 1} = \frac{2}{2-i} = \frac{2(i+2)}{5} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$$

_ On pose une suite auxiliaire

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i\right)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = z_{n+1} - \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i\right) = \frac{i}{2}z_n + 1 - \left(\frac{i}{2}\left(-\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i\right) + 1\right) = \frac{i}{2}\left(z_n - \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i\right)\right)$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \left(\frac{i}{2}\right)^n v_0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(\frac{i}{2}\right)^n \left(z_0 - \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i\right)\right) + \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i\right)$$

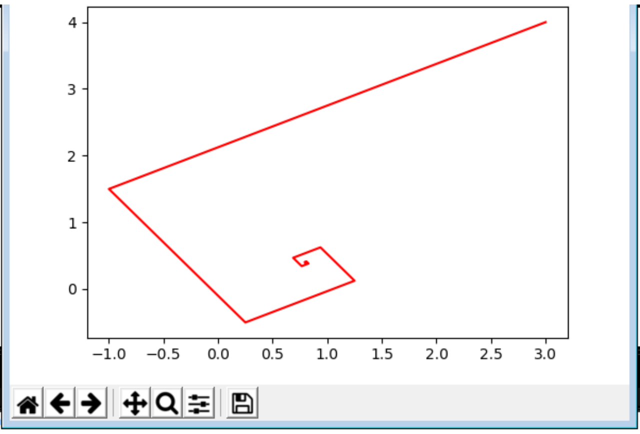
On en déduit donc que :

$$\lim_n z_n = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$$

On peut le voir sur un programme Python :

```
def f(x,y):
    return (1-y/2,x/2)

def courbe(n,a,b):
    x=[a]
    y=[b]
    for i in range(1,n+1):
        x.append(f(x[i-1],y[i-1])[0])
        y.append(f(x[i-1],y[i-1])[1])
    print(x,y)
    import matplotlib.pyplot as plt
    plt.plot(x,y,'r')
    plt.show()
```



DM1 Toussaint.py × module1 ×

Console Python

```
*** Python 3.4.5 |Continuum Analytics, Inc.| (default, Jul  5 2016, 14:56:50) [MSC v.1600 32 bit (In
>>> courbe(10,3,4)
[3, -1.0, 0.25, 1.25, 0.9375, 0.6875, 0.765625, 0.828125, 0.80859375, 0.79296875, 0.7978515625] [4, 1.5, -0.5, 0.125, 0.625, 0.46875, 0.34375, 0.3828125, 0.4140625, 0.404296875, 0.396484375]
```

Exercice I.2 : On considère la suite complexe (z_n) définie par :

$$\begin{cases} z_0 = re^{i\theta}(-\pi < \theta \leq \pi), r > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2} \end{cases}$$

On désigne par r_n le module de z_n et par θ_n l'argument de z_n tel que $-\pi < \theta \leq \pi$.

1) Effectuer la construction géométrique de z_{n+1} à partir de z_n.

2) a) Exprimer r_{n+1} en θ_{n+1} en fonction de r_n et de θ_n.

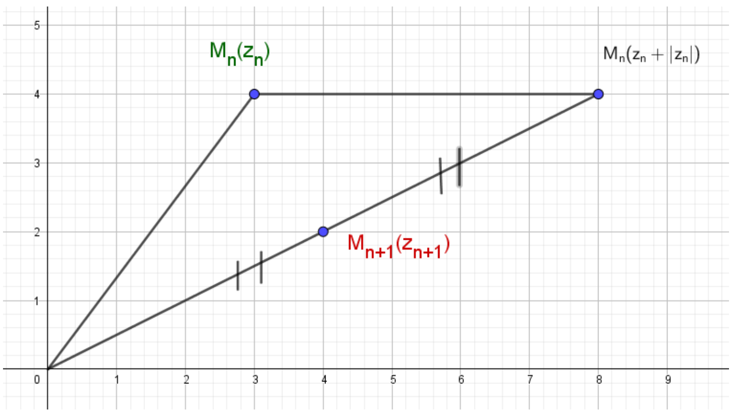
b) En déduire la valeur de $\lim_n \theta_n$.

3) a) Etudier la suite définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = r_n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

b) En déduire la limite de r_n puis celle de z_n.

1) On a la courbe suivante :



2) a) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_n \neq 0$$

On pose alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_n = r_n e^{i\theta_n}$$

On a alors :

$$z_{n+1} = \frac{r_n e^{i\theta_n} + r_n}{2} = \frac{r_n}{2}\left(1 + e^{i\theta_n}\right) = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) e^{\frac{i\theta_n}{2}}$$

On va montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{\theta_n}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$$

Initialisation : $n = 0$

On sait que $\theta \in]-\pi;\pi[\Longrightarrow \frac{\theta_0}{2} = \frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

Hérédité : Soit n un entier naturel fixé. On suppose que $\frac{\theta_n}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) e^{\frac{i\theta_n}{2}} \Longrightarrow r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) > 0 \text{ car } \frac{\theta_n}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$$

On en déduit donc que :

$$z_{n+1} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) e^{\frac{i\theta_n}{2}} = r_{n+1} e^{i\theta_{n+1}} \text{ avec } \theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$$

On en déduit donc que la proposition est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour n=0 et est héréditaire, on en déduit alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = r_{n+1} e^{i\theta_{n+1}} \text{ avec } r_{n+1} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \text{ et } \theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$$

b) La suite (θ_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, on en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \theta_n = \frac{\theta_0}{2^n} \Longrightarrow \lim_n \theta_n = 0 \text{ car } \frac{1}{2} \in]-1;1[$$

3) a) On sait que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = r_{n+1} \sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$

Or on sait que :

$$\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) = \sin\left(\frac{1}{2} \times \frac{\theta}{2^n}\right) = \sin\left(\frac{1}{2} \times \theta_n\right)$$

On en déduit donc que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \sin\left(\frac{1}{2} \times \theta_n\right) = \frac{r_n}{2} \times \sin(\theta_n) = \frac{r_n}{2} \times \sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) = \frac{u_n}{2}$$

On en déduit donc que la suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2^n} \times r_0 \sin(\theta_0) = r_n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, r_n = \frac{1}{2^n} \times \frac{r_0 \sin(\theta_0)}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$$

De plus on sait que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} = \frac{1}{\theta} \lim_{X \to 0} \frac{X}{\sin(X)} = \frac{1}{\theta} \quad (\text{si } \theta \neq 0)$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n z_n = \frac{r_0 \sin(\theta_0)}{\theta_0} \text{ si } \theta \neq 0$$

Si $\theta = 0 \Longrightarrow z_0 \in \mathbb{R}^{+*} \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, z_n = z_0$ par une récurrence immédiate !

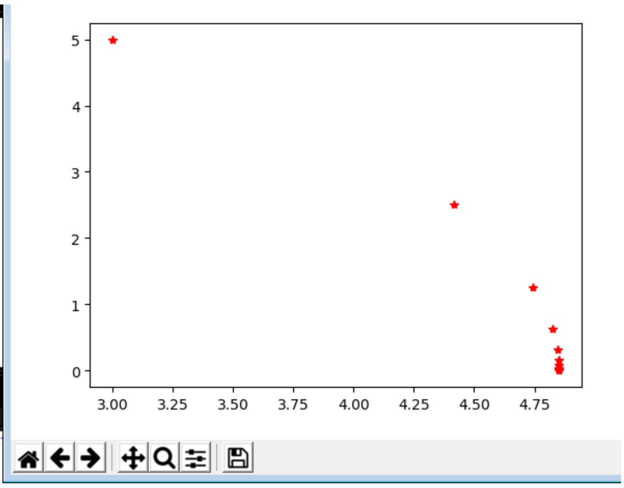
```
def f(x,y):
    return ((x+(x**2+y**2)**(0.5))/2,y/2)

def courbe(n,a,b):
    x=[a]
    y=[b]
    z=[str(x[0])+'+i'+str(y[0])]
    for i in range(1,n+1):
        x.append(f(x[i-1],y[i-1])[0])
        y.append(f(x[i-1],y[i-1])[1])
        z.append(str(x[i])+'i'+str(y[i]))
    print(z)
    import matplotlib.pyplot as plt
    plt.plot(x,y,'*r')
```

DM 1 Toussaint.py   module1

Console Python

```
*** Python 3.4.5 |Continuum Analytics, Inc.| (default, Jul  5 2016, 14:56:50) [MSC v.1600 32 bi
>>>
*** Console de processus distant Réinitialisée ***
>>> courbe(10,3,5)
['3+i5', '4.415475947422651i2.5', '4.744784871300526i1.25', '4.825731154362089510.625', '4.845883567978732i0.3125', '4.850916444298154i0.15625', '4.852174337193349i0.078125', '4.852
.01953125', '4.852587054881134i0.009765625', '4.852591968102371i0.0048828125']
```



Exercice I.3 : 1) Donner l'expression du terme général de la suite récurrente complexe (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 + 4i \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (3-2i)u_{n+1} - (5-5i)u_n \end{cases}$$

2) Soit $\theta \in]0;\pi[$. Déterminer le terme général de la suite réelle (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 = u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2\cos(\theta)\,u_{n+1} + u_n = 0$$

1) On résout l'équation caractéristique.

$$(E_q): r^2 - (3-2i)r + (5-5i) = 0$$

On calcule Δ:

$$\Delta = (3-2i)^2 - 4(5-5i) = 5 - 12i - 20 + 20i = -15 + 8i = \delta^2 = (x+iy)^2$$

On a alors :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -15 \\ xy = 4 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17 \end{cases} \iff (x,y) = (1,4) \text{ ou } (x,y) = (-1,-4)$$

On a alors :

$$r^2 - (3-2i)r + (5-5i) = 0 \iff r_1 = \frac{3 - 2i + 1 + 4i}{2} = 2 + i \text{ ou } r_2 = 1 - 3i$$

On en déduit donc que :

$$\exists!\,(A,B) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A(2+i)^n + B(1-3i)^n$$

De plus on sait que :

$$u_0 = 0 = A + B \text{ et } u_1 = A(2+i) + B(1-3i) = 1 + 4i$$

On en déduit donc que :

$$A(1+4i) = 1 + 4i \Longrightarrow A = 1 \text{et } B = -1$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (2+i)^n - (1-3i)^n$$

2) On résout l'équation caractéristique.

$$(E_q): r^2 - 2\cos(\theta)\,r + 1 = 0$$

On calcule Δ:

$$\Delta = 4\cos^2(\theta) - 4 = \left(2i\sin(\theta)\right)^2$$

On a alors :

$$r^2 - 2\cos(\theta)\,r + 1 = 0 \iff r \in \left\{e^{i\theta}; e^{-i\theta}\right\}$$

1er cas : $\theta \neq 0$

On en déduit donc que :

$$\exists!\,(A,B) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = Ae^{i\theta n} + Be^{-i\theta n}$$

De plus on sait que :

$$u_0 = 0 = A + B \text{ et } u_1 = Ae^{i\theta} + Be^{-i\theta} = 1$$
$$\Longrightarrow A\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) = 1$$
$$A = -\frac{i}{2\sin(\theta)}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{i}{2\sin(\theta)}\left(-e^{i\theta n} + e^{-i\theta n}\right)$$
$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$$

2ième cas : $\theta = 0$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$$

On a alors :

$$(E_q): r^2 - 2r + 1 = 0 \iff r = 1$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (An + B)$$

Comme $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ on en déduit alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n$$

On peut illustrer cela grâce à un programme Python :

```
def suite(n):
    u=[0,1]
    for i in range(2,n+1):
        u.append(2*u[i-1]-u[i-2])
    return (u)
```

DM1 Toussaint.py × module1

Console Python

```
*** Python 3.4.5 |Continuum Analytics, Inc
 on win32. ***
>>>
*** Console de processus distant Réinitial
>>>
>>> suite(10)
[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
```