Chapitre 10 : Système linéaire et calcul matriciel
Partie B : Matrice d'un système linéaire

Dans toute cette partie $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$, n et p deux entiers naturels non nuls.

I) Matrice

a) Un tableau de nombre

Définition : Une matrice A de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau à n lignes et p colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$, appelés coefficients de la matrice. On note $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$

On appelle $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times p$.

Exemple I.a.1 :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ \sqrt{3} & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}) \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2+3i \\ i \\ e^{\frac{i\pi}{3}} \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$$

Définition : Une matrice qui ne comporte qu'une seule colonne s'appelle une matrice colonne, une matrice qui ne comporte qu'une seule ligne s'appelle une matrice ligne.

b) Matrice associée à un système linéaire

Définition : On pose le système :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} a_{1,1}\,\mathbf{x_1} + a_{1,2}\,\mathbf{x_2} + \cdots + a_{1,p}\mathbf{x_p} = b_1 \\ a_{2,1}\,\mathbf{x_1} + a_{2,2}\,\mathbf{x_2} + \cdots + a_{2,p}\mathbf{x_p} = b_1 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n,1}\,\mathbf{x_1} + a_{n,2}\,\mathbf{x_2} + \cdots + a_{n,p}\mathbf{x_p} = b_n \end{cases}$$

On appelle matrice des coefficients de $(\mathcal{S})$ ou matrice associée au système linéaire $(\mathcal{S})$ la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

De même on appelle matrice colonne des seconds membres associée à $(\mathcal{S})$ la matrice colonne :

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

On définit la matrice augmentée associée au système $(\mathcal{S})$ par :

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} & b_n \end{array}\right)$$

Exemples I.b.1 : On pose le système suivant :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 7x + 8y + 2z + 6t = 7 \\ 9x + 10y + 3z + 10t = 0 \end{cases}$$

Déterminer la matrice des coefficients de $(\mathcal{S})$, ainsi que la matrice des seconds membres et la matrice augmentée associée au système $(\mathcal{S})$.

Remarque : Lorsque le nombre d'inconnus et le nombre d'équations est identique (ici lorsque n=p), on dit que la matrice associée à $(\mathcal{S})$ est carrée. On pose $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des matrices carrées de taille n×n.

Exemple I.b.2 : On pose :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$

Déterminer la matrice des coefficients de $(\mathcal{S})$, ainsi que la matrice des seconds membres et la matrice augmentée associée au système $(\mathcal{S})$.

II) Systèmes équivalents

a) Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice

Définition : On appelle opération élémentaire sur les lignes d'un système (ou d'une matrice) l'une des trois opérations suivantes :

- Multiplication d'une ligne L_i par un scalaire λ non nul. On note cela : $L_i \longleftarrow \lambda L_i$
- Echanges des lignes L_i et L_j avec $i \neq j$. On note cela : $L_i \leftrightarrow L_j$
- Ajout de βL_j à L_i avec $i \neq j$. On note cela : $L_i \longleftarrow l_i + \beta L_j$

Exemple II.a.1 : On pose le système :

$$(S): \begin{cases} x + 3y - 2z = -3 \\ 2x + 2y + 4z = 4 \end{cases}$$

Donner le résultat de l'opération : $L_2 \longleftarrow L_2 + (-2)L_1$

Exemple II.a.2 : On pose la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 8 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Donner le résultat de l'opération : $L_2 \longleftarrow L_2 + L_3$

Propriété II.a.3 : Les opérations élémentaires sont réversibles. En particulier, si $(\mathcal{S}')$ se déduit de $(\mathcal{S})$ par une suite finie d'opérations élémentaires, alors $(\mathcal{S})$ se déduit de $(\mathcal{S}')$ par une suite finie d'opérations élémentaires.

Exemple II.a.4 : On pose les deux systèmes suivants :

$$(S): \begin{cases} x + 3y - 2z = -3 \\ 2x + 2y + 4z = 4 \end{cases}$$

Déterminer une suite d'opérations élémentaires pour obtenir une équation paramétrique des solutions.

b) Systèmes équivalents

Définition : On dit que deux systèmes $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}')$ sont équivalents par lignes si l'on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. On note $(\mathcal{S}) \Leftrightarrow (\mathcal{S}')$.
On dit que deux matrices A et A' sont sont équivalents par lignes si l'on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. On note $A \underset{L}{\sim} A'$.

Propriété II.b.1 : Deux systèmes équivalents ont même ensemble de solutions.

Propriété II.b.2 : On a l'équivalence suivante :

$$\big((S) \Leftrightarrow (\mathcal{S}')\big) \Leftrightarrow (A|B) \underset{L}{\sim} (A'|B')$$

Où (A|B) et (A'|B') sont les matrices augmentées aux systèmes (S) et (S') respectivement.
De plus ce sont les mêmes opérations élémentaires pour passer de (S) à (S') que pour passer de $(A|B)$ à $(A'|B')$.

Remarque : Cela justifie l'écriture matricielle pour résoudre les systèmes linéaires. Nous allons approfondir cette remarque.

III) Pivot de Gauss-Jordan

a) Matrice échelonnée

Définition : Une matrice est dite échelonnée par lignes si elle vérifie les deux propriétés suivantes :
1. Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi.
2. A partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé à droite (strictement) du premier coefficient non nul de la ligne précédente.

On appelle pivot le premier coefficient non nul de chaque ligne non nulle.

Illustration : La matrice E est échelonnée par lignes. Les symboles ⊕ représentent les pivots (ils sont non nuls).

$$E = \begin{pmatrix} 0 & \oplus & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \oplus & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple III.a.1:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition : Une matrice est dite échelonnée réduite par lignes si elle est nulle, ou si tous les pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.

Exemple III.a.2 :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition : Un système est dit échelonné par ligne (resp. échelonné réduit par lignes) si sa matrice des coefficients l'est.

Exemple III.a.3: Montrer que ce système est échelonné.

$$(S): \begin{cases} x + 2y - 3z + t = 6 \\ \quad z - 2t = 2 \\ \quad\quad t = 6 \end{cases}$$

Application III.a.4 : Donner une matrice échelonnée par lignes mais pas échelonnée réduite.

b) Algorithme de Gauss-Jordan

Propriété III.b.1 : Toute matrice est équivalente à une matrice échelonnée réduite par ligne (qui de plus est unique).

Algorithme de Gauss-Jordan : Pour une matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$, on commence à $i = j = 1$.

Tant que ($i \leq n$ et $j \leq p$) faire :

- On regarde dans la j-ième colonne s'il y a un coefficient non nul entre la i-ième et la dernière ligne. Si oui, on note k l'indice de cette ligne, et on effectue les opérations élémentaires suivantes :
  - On effectue $L_i \leftrightarrow L_k$
  - On effectue $l_i \leftarrow \frac{1}{a_{k,j}} L_i$ (pour avoir un coeffcient de 1)
  - On effectue $L_\ell \leftarrow L_\ell - a_{\ell,j} L_i$ pour tout $1 \leq k \leq n, k \neq i$ (pour annuler tous les coefficients de la colonne sauf le pivot).
  - On augmente i de 1.
- On augmente j de 1.

Application III.b.2 : Appliquer l'algorithme de Gauss-Jordan aux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

IV) Application à la résolution d'un système linéaire

a) Système homogène

Définition : On dit que le système

$$(\mathcal{S}_0):\begin{cases} a_{1,1}\,\mathbf{x_1} + a_{1,2}\,\mathbf{x_2} + \cdots + a_{1,p}\mathbf{x_p} = b_1 \\ a_{2,1}\,\mathbf{x_1} + a_{2,2}\,\mathbf{x_2} + \cdots + a_{2,p}\mathbf{x_p} = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n,1}\,\mathbf{x_1} + a_{n,2}\,\mathbf{x_2} + \cdots + a_{n,p}\mathbf{x_p} = b_n \end{cases}$$

Est un système homogène si ses seconds membres sont nuls : $(b_1\,; b_2\,; \ldots\,; b_n) = (0\,; \ldots\,; 0)$

A chaque système linéaire $(\mathcal{S})$, on associe son système homogène $(\mathcal{S}_0)$en remplaçant les seconds membres par 0 :

$$(\mathcal{S}):\begin{cases} a_{1,1}\,\mathbf{x_1} + a_{1,2}\,\mathbf{x_2} + \cdots + a_{1,p}\mathbf{x_p} = b_1 \\ a_{2,1}\,\mathbf{x_1} + a_{2,2}\,\mathbf{x_2} + \cdots + a_{2,p}\mathbf{x_p} = b_1 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n,1}\,\mathbf{x_1} + a_{n,2}\,\mathbf{x_2} + \cdots + a_{n,p}\mathbf{x_p} = b_n \end{cases} \underset{\text{système homogène}}{\Longrightarrow} (\mathcal{S}'):\begin{cases} a_{1,1}\,\mathbf{x_1} + a_{1,2}\,\mathbf{x_2} + \cdots + a_{1,p}\mathbf{x_p} = 0 \\ a_{2,1}\,\mathbf{x_1} + a_{2,2}\,\mathbf{x_2} + \cdots + a_{2,p}\mathbf{x_p} = 0 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n,1}\,\mathbf{x_1} + a_{n,2}\,\mathbf{x_2} + \cdots + a_{n,p}\mathbf{x_p} = 0 \end{cases}$$

Propriété IV.a.1 : Soit $(\mathcal{S})$ un système homogène à n équations et p inconnues. Notons E l'ensemble de ses solutions. On a :

- (0 ;… ;0) appartient à E
- $\forall\, x = (x_1; \ldots; x_p) \in E, \forall (y_1; \ldots; y_p) \in E, x + y = (x_1 + y_1; \ldots; x_p + y_p) \in E$
- $\forall\, x = (x_1; \ldots; x_p), \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \lambda\, x = (\,\lambda x_1; \ldots;\, \lambda x_p) \in E$

Propriété IV.a.2 : Soit $(\mathcal{S})$ un système compatible de n équations à p inconnues. Alors toute solution de $(\mathcal{S})$ s'écrit comme somme d'une solution particulière de $(\mathcal{S})$ et d'une solution du système homogène associé $(\mathcal{S}_0)$. En d'autres ternes, on a :

$$E = y + E_0$$

E et E_0 sont les ensembles des solutions de $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}_0)$, et $y \in \mathbb{K}^p$ une solution particulière de $(\mathcal{S})$.

Remarque : Cela nous invite à nous intéresser aux solutions du système homogène. Ce que nous allons faire par la suite.

b) Inconnues principales et secondaires

Remarque : En appliquant la méthode de Gauss-Jordan sur la matrice augmentée (A|B) associée au système (S), on se ramène à un système équivalent (S') dont la matrice augmentée (A'|B') est une matrice échelonnée par lignes.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccccc|c} a'_{1,j_1} & \cdots & & & & & & b'_1 \\ 0 & & a'_{2,j_2} & \cdots & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & & & a'_{r,j_r} & \cdots & \\ & & & & & 0 & & b'_{r+1} \\ 0 & & & & & & & 0 \end{array}\right)$$

Définition : On appelle inconnue principale tout inconnue associée à un pivot de A.
Tout autre inconnue est appelée inconnue secondaire ou paramètre.

Exemple IV.b.1 : Déterminer les inconnues principales et secondaires du système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 6 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

c) Rang d'un système ou d'une matrice

Définition (rang d'un système) : Le rang d'un système (S) est le nombre de pivot de la réduite échelonnée par lignes de la matrice du système homogène associée à (S).

Exemple IV.c.1 : Déterminer le rang du système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y + z + t = 6 \\ x - 2y + z + 2t = 1 \\ 4x + 2y + 2z + 2t = 14 \end{cases}$$

Propriété IV.c.2 : Si le rang du système est r, alors on a $r \leq n$ et $r \leq p$
Le nombre de paramètres est égale à p-r :

Nombre de paramètres = nombres d'inconnues – rang du système

Exemple IV.c.3 : Déterminer le nombre de paramètres du système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

Propriété IV.c.4 : Soit (S) un système à n équations et p inconnues. Soit (A|B) la matrice augmentée de (S) et (A'|B') la matrice augmentée où A' est la matrice réduite échelonnée par lignes de A.
On pose $A' = \left(a'_{i,j}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B' = (b'_i)_{1 \leq i \leq n}$
SI :
Il existe $i \in [\![1; n]\!]$ tel que $\left('a_{i,1}; \dots; a'_{i,p}\right) = (0; \dots; 0)$ et $b'_i \neq 0$
Alors le système est dit incompatible et le système (S) n'a pas de solution.
SINON :

- Si r = p (Le nombre d'inconnues est égale au rang du système) : Il existe une unique solution.
- Si r < p (Le rang est inférieur strictement au nombres d'inconnues), le système possède une infinité de solutions paramétrées à l'aide des p-r inconnues secondaires.

Application IV.c.5 : Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1): \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 11 \\ 2x + 3y + 4z + t = 12 \\ 3x + 4y + z + 2t = 13 \\ 4x + y + 2z + 3t = 14 \end{cases} ; (S_2): \begin{cases} 2x - y + t = -4 \\ y + 3z - 3t = 1 \\ x + t = -3 \\ 3x + 3z - t = -6 \end{cases} (S_3): \begin{cases} -2x + y - z = 1 \\ x + y + 2z = 0 \\ 3x - 2y + z = 4 \end{cases}$$

Remarque : Si n = p = r, on dit que le système est de Cramer. On a alors une réduite échelonnée par lignes de la forme :

$$(A'|B') = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & 0 & \\ 0 & & 0 & 1 & b'_p \end{array}\right)$$