Chapitre 10 : Système linéaire et calcul matriciel
Partie A : Système linéaire

Dans toute cette partie $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$.

a) Définition

Définition : Soit $\left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ une famille de $\mathbb{K}$ à np éléments et même que $(b_i)_{1\le i\le n}$

On appelle système linéaire de n équations à p inconnues tout système d'équation de la forme :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} a_{1,1}\,\mathbf{x_1} + a_{1,2}\,\mathbf{x_2} + \cdots + a_{1,p}\mathbf{x_p} = b_1 \\ a_{2,1}\,\mathbf{x_1} + a_{2,2}\,\mathbf{x_2} + \cdots + a_{2,p}\mathbf{x_p} = b_1 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{n,1}\,\mathbf{x_1} + a_{n,2}\,\mathbf{x_2} + \cdots + a_{n,p}\mathbf{x_p} = b_n \end{cases}$$

Les coefficients $a_{i,j}$ s'appellent les coefficients du système.
Les bi sont appelés seconds membres
Le p-uplet $u = \left(x_1, \ldots, x_p\right)$ est le p-uplet des inconnues du système.
On dit que $u = \left(x_1, \ldots, x_p\right)$ est une solution du système si les valeurs $x_1, \ldots, x_p$ satisfont à chacune des égalités figurant dans (S).

Définition : On dit qu'un système linéaire est incompatible si l'ensemble des solutions est vide. On dit qu'il est compatible sinon.

Application a.1 : Déterminer si les systèmes suivants sont compatibles ou incompatibles.

$$(\mathcal{S}_1) : \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x + 4y = 3 \end{cases} \qquad (\mathcal{S}_2) : \begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x - 4y + 2z = 3 \\ 3x - y + 3z = 2 \end{cases} \qquad (\mathcal{S}_3) : \begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x - 4y + 2z = 3 \end{cases}$$

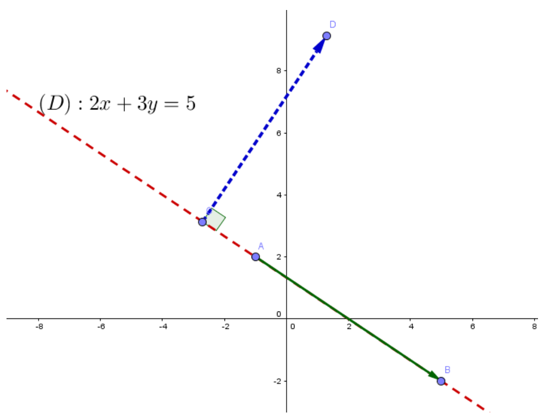
b) Interprétation géométrique

Dans le plan, les droites affines sont les ensembles dont une équation cartésienne est de la forme :

$$(\mathcal{D}) : \; ax + by = c \; \text{ avec } \; (a;b) \neq (0;0)$$

On retrouve rapidement qu'un vecteur directeur de la droite $(\mathcal{D})$ est $\vec{u}(-b;a)$ et un vecteur normal $\vec{n}(a;b)$

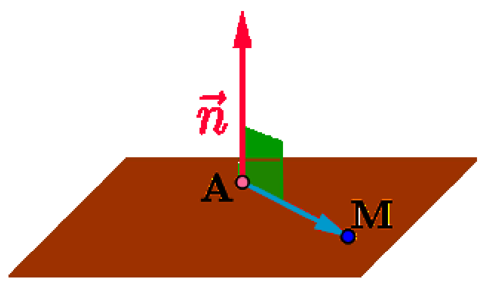
Exemple b.1: $2x + 3y = 5$



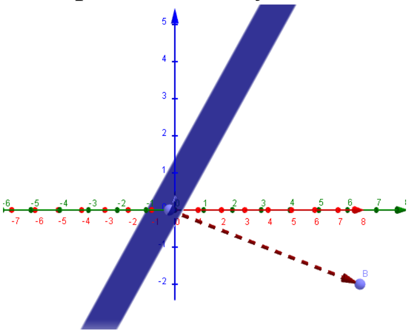
Dans l'espace, les plans affines $(\mathcal{P})$ sont les ensembles dont une équation cartésienne est de la forme :

$$(\mathcal{P}) : ax + by + cz = d$$
$$\text{avec } \; (a;b;c) \neq (0;0;0)$$

On retiendra qu'un vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$ est $\vec{n}(a;b;c)$.



Exemple b.2: $2x + 3y - 2z + 1 = 0$



Un système linéaire de deux équations à trois inconnues

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

avec $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ et $(a'; b'; c') \neq (0; 0; 0)$

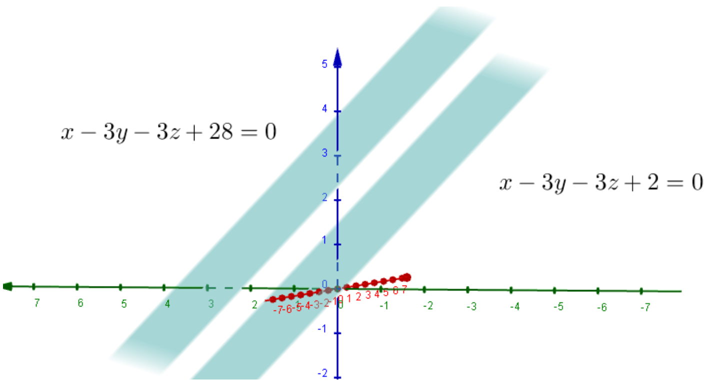
peut s'interpréter géométriquement comme l'intersection de deux plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ dans l'espace. L'ensemble des solutions de ce système est alors soit :

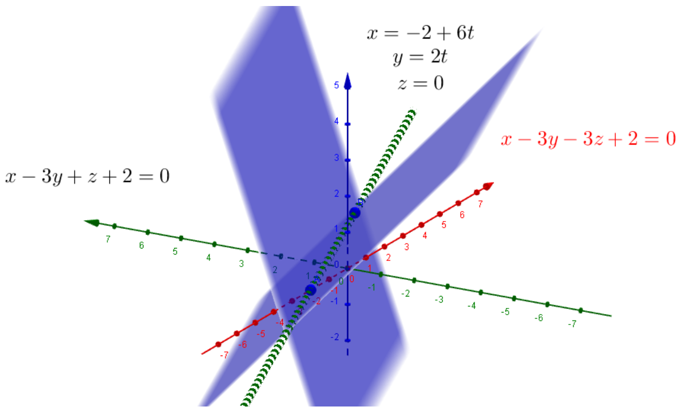
- vide (si les deux plans sont parallèles non confondus)
- Une droite (si $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont non parallèles non confondus)
- Un plan (si $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont confondus).

Le système est donc incompatible dans le premier cas, compatible dans les deux cas suivants.

Exemples b.3:

$$\begin{cases} x - 3y - 3z + 2 = 0 \\ x - 3y - 3z + 28 = 0 \end{cases}$$





$$\begin{cases} x - 3y - 3z + 2 = 0 \\ x - 3y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z + 1 = 0 \\ 4x + 6y - 4z + 2 = 0 \end{cases}$$