Programme de Colle n°10
Du 1 au 5 décembre 2025

Chapitre 9 : Suites numériques

Nombres réels et suites numériques

L'objectif de cette section est de donner une base solide à l'étude des suites réelles, notamment les suites définies par une relation de récurrence.

Dans l'étude des suites, on distingue nettement les aspects qualitatifs (monotonie, convergence, divergence) des aspects quantitatifs (majoration, encadrement, vitesse de convergence ou de divergence).

Contenus	Capacités & commentaires
a) Propriété de la borne supérieure	
Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$. Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure). Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous $a, b \in X$ tels que $a \leqslant b$, $[a, b] \subset X$.	Notations $\sup X$, $\inf X$. On convient que $\sup X = +\infty$ si X est non majorée.
b) Généralités sur les suites réelles	
Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone. Mode de définition d'une suite réelle : explicite, implicite, par récurrence.	Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $\left(\lvert u_n\rvert\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Contenus	Capacités & Commentaires
c) Limite d'une suite réelle	
Limite finie ou infinie d'une suite. Unicité de la limite.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Notations $u_n \longrightarrow \ell$, $\lim u_n$.
Suite convergente, divergente. Toute suite convergente est bornée.	
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.	Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.
Passage à la limite d'une inégalité large. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.	
Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$).	Utilisation d'une majoration de la forme $\lvert u_n - \ell\rvert \leqslant v_n$, où (v_n) converge vers 0.
d) Suites monotones	
Théorème de la limite monotone. Théorème des suites adjacentes.	
Approximations décimales d'un réel.	Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès. Tout réel est limite d'une suite de rationnels.
e) Suites extraites	
Suite extraite.	Tout développement théorique sur les suites extraites est hors programme.
Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite.	Utilisation pour montrer la divergence d'une suite. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ, alors (u_n) tend vers ℓ. Le théorème de Bolzano-Weierstrass est hors programme.

f) Suites complexes

Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire.

g) Suites particulières

Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.	Pour une relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$, recherche d'une solution constante, détermination des solutions.
Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants.	
Présentation de l'étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ sur quelques exemples simples. Représentation géométrique. Si (u_n) converge vers un élément ℓ en lequel f est continue, alors $f(\ell) = \ell$.	Cette étude est l'occasion d'introduire la notion d'intervalle stable par une fonction. Pour l'étude de la monotonie de (u_n), on souligne l'intérêt, d'une part, de l'étude du signe de $f(x) - x$, et, d'autre part, de l'utilisation de la croissance éventuelle de f.

Questions de cours

Propriété III.b.4 : Si la suite u converge, alors sa limite est unique.

Propriété III.b.5 : On a l'implication suivante :

$$\lim u_n = \ell \Longrightarrow \lim|u_n| = |\ell|$$

Propriété III.b.7 : Toute suite convergence est bornée.

Propriété IV.b.1 : Théorème des gendarmes

Propriété IV.c.2 : Soient u et v deux suites adjacentes telles que u soit croissante et v décroissante. On a alors : u et v converge vers la même limite ℓ

Exercices du type

Exercice D.2 : a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution réelle. On note u_n cette solution.
b) Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
c) En déduire qu'elle converge et calculer sa limite.

Exercice F.1 : Etudier la convergence de :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Exercice G.1 : On considère la suite définie $u_0 = 0$ *et* $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$
a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \in [0;3]$:

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$$

b) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice G2 : Etudier les suites définies par :

$$a)\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n) \qquad b)\ u_0 = 1/2\ \ et\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n)$$

$$c)\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}\ et\ u_0 = 1 \quad d)\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = ln(1 + 2u_n)\ \ et\ u_0 \in \mathbb{R}$$

Exercice G3 : Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par :

$$f: \mapsto \frac{x^2}{2 - x^2}$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in [0;1[$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2 - u_n^2}$$

1) Montrer que pour tout $x \in [0;1[$, $0 \leq f(x) \leq x \leq 1$.
2) En déduire que $0 \leq u_n < 1$ puis que (u_n) est décroissante.
3) La suite (u_n) a-t-elle une limite et si oui laquelle ?

Exercice G.6 : Soient $x > 1$, (u_n) et (v_n) définies par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = x\,;\, v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \end{cases}$$

1) Montrer que (u_n) et (v_n) sont bien définies et à termes strictement positifs.
2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq v_n$$

3) Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
4) Montrer que la suite $(u_n v_n)$ est constante. En déduire la valeur de la limite commune à (u_n) et (v_n).

Exercice H.2 : Soit $(u_0; v_0) \in \mathbb{R}^2$. On pose :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$$

1) Explicitez u_n et v_n en fonction de n.
2) En déduire les limites des suites u et v.