Correction DS n°3

Exercice 1 : Calcul d'une intégral

On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \end{cases}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Démontrer que f est impaire.
3) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

4) Démontrer que f réalise une bijection de f dans un ensemble à déterminer.
5) Démontrer que :

$$f^{-1} = sh$$

Dans toute la suite on cherche à calculer :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} dx$$

6) A l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{x+1}$ démontrer que :

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{u^2-u+1}} du$$

7) En déduire que :

$$I = \frac{1}{2} ln(3)$$

1) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2+1 > x^2$$
$$\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} \; car \; x \mapsto \sqrt{x} \; est \; croissante \; sur \; \mathbb{R}^+$$
$$\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+1} > |x| \geq -x$$
$$\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+1} + x > 0$$

On en déduit donc que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

2) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = ln\left(\sqrt{1+(-x)^2} + (-x)\right) = ln\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = ln\left(\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{\sqrt{1+x^2}+x}\right) =$$
$$= ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\right) = -ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right) = -f(x)$$

On en déduit donc que f est impaire.

3) On étudie f sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \geq 0, f(x) = ln\big(u(x)\big) \; avec \; u: x \mapsto \sqrt{x^2+1} + x$$

On sait que u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \geq 0, u'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + 1 = \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} > 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{1\sqrt{x^2+1}}$$

4) On cherche à présent la limite de f en $+\infty$.
Or on sait que :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=+\infty$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\ (par\ composée)$$

Par imparité on en déduit que :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

On sait que f est :

- Continue sur $\mathbb{R}$
- Strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires (ou son corollaire ou le théorème de la bijection), on a :

$$\forall y\in\mathbb{R},\exists!\,x\in\mathbb{R}, f(x)=y$$

On en déduit que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

5) On peut le faire de différentes méthodes.

Méthode 1 : On calcule :

$$\forall x\in\mathbb{R}, f\big(sh(x)\big)=ln\left(sh(x)+\sqrt{1+sh^2(x)}\right)=ln\big(sh(x)+ch(x)\big)=ln(e^x)=x$$

On en déduit donc que $f^{-1}=sh\ car\ f$ est bijective.

Méthode 2 : On résout :

$$f(x)=y\Leftrightarrow ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=y\Leftrightarrow x+\sqrt{1+x^2}=e^y\Leftrightarrow 1+x^2=(e^y-x)^2\Leftrightarrow 1=e^{2y}-2xe^y$$

On en déduit donc que :

$$f(x)=y\Leftrightarrow x=\frac{e^{2y}-1}{2e^y}=\frac{e^y-e^{-y}}{2}=sh(y)$$

On en déduit donc que $f^{-1}=sh.$

Partie B : Une intégrale à calculer

1) On cherche :

$$I=\int_0^1\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}dx$$

On pose $u=\frac{1}{x+1}$

_ On calcule les bornes

$$x=0\Longrightarrow u=1$$
$$x=1\Longrightarrow u=\frac{1}{2}$$

_ Calcul du du

On sait que $x: u\mapsto\frac{1}{u}-1\in\mathcal{C}^1\left(\left[\frac{1}{2};1\right]\right)$ *et :*

$$\frac{dx}{du}=-\frac{1}{u^2}\Longrightarrow dx=-\frac{1}{u^2}du$$

_ On remplace

$$\int_0^1\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}dx=\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{u}{\sqrt{\left(\frac{1}{u}-1\right)^2+\left(\frac{1}{u}-1\right)+1}}-\frac{1}{u^2}du$$
$$=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{u\sqrt{\frac{1-2u+u^2-u}{u^2}}}du$$
$$=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{\sqrt{u^2-u+1}}du$$

2) On sait que :

$$\forall u \in \mathbb{R}, u^2 - u + 1 = \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

On en déduit donc que :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{u^2 - u + 1}} du = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} du = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}} du$$

Ici on peut faire un changement de variable ou bien directement utiliser la dérivée de la fonction :

$$x \mapsto ln\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\right)$$

On a alors :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}} du = \left[ln\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{4}{3}}\right) - ln(1) =$$

$$= ln(\sqrt{3}) = \frac{1}{2}ln(3)$$

Exercice 2 : Une nouvelle somme de cosinus

On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} cos(kx)$$

1) a) Déterminer la valeur de $S_0(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Déterminer la valeur de $S_3\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

2) a) Rappeler la formule du binôme de Newton sur $\mathbb{C}$.

b) En déduire la valeur de $S_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) a) Démontrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k = (1+z)^n$$

b) Démontrer par récurrence que :

$$\forall (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}, \sum_{k=0}^{n} \mathcal{R}e(a_i) = \mathcal{R}e\left(\sum_{k=0}^{n} a_i\right)$$

c) En déduire des deux questions précédentes que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, S_n(x) = \mathcal{R}e\left(\left(1 + e^{ix}\right)^n\right)$$

4) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, S_n(x) = 2^n cos^n\left(\frac{x}{2}\right) cos\left(\frac{nx}{2}\right)$$

5) Résoudre $S_n(x) = 0$

1) a) On a :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{S_0(x)} = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} \boldsymbol{cos(kx)} = \boldsymbol{cos(0)} = \mathbf{1}$$

b) On a :

$$S_3\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)=1+\binom{3}{1}\underbrace{cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0}+\binom{3}{2}\underbrace{cos(\pi)}_{=-1}+\binom{3}{3}\underbrace{cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}_{=0}=1-3=-2$$

2) a) On a :

$$\forall\,(x;y)\in\mathbb{C}^2,\forall\,n\in\mathbb{N},(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

b) On a :

$$\forall n\in\mathbb{N},S_n(0)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}cos(k\times 0\,)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

3) On a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N},S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}cos(k\times x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathcal{Re}\left(e^{ikx}\right)=\mathcal{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ikx}\right)=$$

$$=\mathcal{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{ix}\right)^k\right)=\mathcal{Re}\left(\left(1+e^{ix}\right)^n\right)$$

4) On sait que :

$$\forall x\in\mathbb{R},1+e^{ix}=e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{-\frac{ix}{2}}+e^{\frac{ix}{2}}\right)=2\,cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{\frac{ix}{2}}$$

On a donc :

$$\forall x\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N},\left(1+e^{ix}\right)^n=\left(2\,cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{\frac{ix}{2}}\right)^n=2^n\,cos^n\left(\frac{x}{2}\right)e^{\frac{inx}{2}}$$

On a donc :

$$\forall x\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N},S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}cos(k\times x)=\mathcal{Re}\left(2^n\,cos^n\left(\frac{x}{2}\right)e^{\frac{inx}{2}}\right)=2^n\,cos^n\left(\frac{x}{2}\right)cos\left(\frac{nx}{2}\right)$$

5) On a :

$$S_n(x)=0\Leftrightarrow 2^n\,cos^n\left(\frac{x}{2}\right)cos\left(\frac{nx}{2}\right)=0\Leftrightarrow\begin{cases}cos^n\left(\frac{x}{2}\right)=0\\ \quad ou\\ cos\left(\frac{nx}{2}\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \quad ou\\ \frac{nx}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{cases};k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pi+2k\pi\\ \quad ou\\ x=\frac{\pi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\end{cases};k\in\mathbb{Z}$$

Exercice 3 : Un logarithme complexe

Le but de cet exercice est d'étendre la fonction $ln\colon]0;+\infty[\to\mathbb{R}$ en une fonction définie sur le demi-plan complexe :

$$\mathcal{P}^+=\{a+ib\in\mathbb{C};a>0\}$$

On rappelle pour cela la définition de l'exponentielle complexe :

$$\exp:\begin{cases}\mathbb{C}\to\mathbb{C}\\ x+iy\mapsto e^x e^{iy}\end{cases}$$

1) a) Représentez $\mathcal{P}^+$ sur votre copie.
   b) Démontrer que :

$$\exp\left(1+\frac{i\pi}{2}\right)=e\times i$$

2) Démontrer que exp n'est pas injective.
3) Démontrer que exp définie une surjection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$.
4) Dans cette question on pose : $z=x+iy,(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Montrer que :

$$\exp(z) = a + ib \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos(y) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin(y) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

Ce résultat nous invite à poser la fonction suivante :

$$\varphi: \begin{cases} \mathcal{P}^+ \to \mathbb{C} \\ a+ib \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(a^2+b^2) + i\arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) \end{cases}$$

a) Montrer que φ est injective.

(*Indication* : On pourra montrer que $\varphi(a+ib) = \varphi(a'+ib')$ si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$).

b) On pose :

$$\mathcal{D} = \left\{x + iy \in \mathbb{C}, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$$

Représentez $\mathcal{D}$ sur votre copie.

c) Montrer que :

$$\forall z \in \mathcal{D}, \exp(z) \in \mathcal{P}^+$$

d) Montrer que :

$$\forall z \in \mathcal{D}, \varphi(\exp(z)) = z$$

e) En déduire que φ définie une bijection de $\mathcal{P}^+$ dans $\mathcal{D}$.

Remarque : On peut ainsi définir le logarithme complexe sur $\mathcal{P}^+$ en posant :

$$\forall a+ib \in \mathcal{P}^+, \ln(a+ib) = \frac{1}{2}\ln(a^2+b^2) + i\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

On a alors une extension du logarithme sur $\mathcal{P}^+$.

1) b) On a :

$$\boldsymbol{\exp\left(1 + \frac{i\pi}{2}\right) = e^1 \times e^{i\frac{\pi}{2}} = e \times i \ car\ e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i}$$

2) On a :

$$\boldsymbol{\exp(1 + 2\pi i) = e^1 e^{2i\pi} = e = \exp(1)}$$

Donc exp n'est pas injective.

3) On sait que :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists \theta \in \mathbb{R}\ tel\ que\ z = |z|e^{i\theta}\ avec\ |z| > 0$$

On a donc :

$$\boldsymbol{z = \exp(ln(|z|) + i\theta)}$$

Ainsi exp définie une surjection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$.

4) On a :

$$\exp(z) = \exp(x+iy) = e^x e^{iy} = e^x cos(y) + ie^x \sin(y)$$

On a donc :

$$\exp(z) = a + ib \Leftrightarrow \begin{cases} e^x \cos(y) = a \\ e^x \sin(y) = b \end{cases}$$

De plus on a :

$$|\exp(z)| = e^x = \sqrt{a^2+b^2}$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\exp(z) = a + ib \Leftrightarrow \begin{cases} e^x\cos(y) = a \\ e^x \sin(y) = b \\ e^x = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos(y) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin(y) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases} car\ \sqrt{a^2+b^2} > 0}$$

5) a) On résout :

$$\varphi(z) = \varphi(z') \Longrightarrow \varphi(a+ib) = \varphi(a'+ib')$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\ln(a^2+b^2) = \frac{1}{2}\ln((a')^2+(b')^2) \\ arctan\left(\frac{b}{a}\right) = arctan\left(\frac{b'}{a'}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = (a')^2+(b')^2 \\ \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \end{cases} \quad car \ln et \arctan sont\ bijectives\ sur\ leur\ ensemble\ de\ définition$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = (a')^2+(b')^2 \\ b^2 = a^2 \times \left(\frac{b}{a}\right)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right) = (a')^2\left(1+\left(\frac{b'}{a'}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow a^2 = (a')^2 \ car \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}\ et\ 1+\left(\frac{b}{a}\right)^2 \geq 1\ donc\ 1+\left(\frac{b}{a}\right)^2 \neq 0$$

De plus on sait que $a > 0\ et\ a' > 0$. On en déduit donc que :

$$a^2 = (a')^2 \Rightarrow \boldsymbol{a = a'}$$

De plus comme :

$$\boldsymbol{\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}}$$

On en déduit donc que $b = b'$.
Ainsi on a :

$$\varphi(z) = \varphi(z') \Rightarrow z = z'$$

c) On a :

$$\forall z \in \mathcal{D}, z = x+iy\ avec\ y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$$

On a alors :

$$e^z = e^x e^{\frac{i\pi}{2}} = e^x\cos(y) + ie^x\sin(y)$$

Or on sait que :

$$y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \cos(y) > 0$$

Ainsi on a :

$$\mathcal{Re}(e^z) = e^x\cos(y) > 0$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\forall z \in \mathcal{D}, \exp(z) \in \mathcal{P}^+}$$

d) D'après la question précédente, on sait que :

$$\forall z \in \mathcal{D}, \exp(z) \in \mathcal{P}^+$$

Ainsi on a :

$$\forall z \in \mathcal{D}, \exp(z) \in \mathcal{D}_\varphi.\ On\ pose\ z = x+iy, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\ donc:$$

$$\varphi(\exp(z)) = \varphi(\exp(x+iy))$$

$$= \varphi(e^x\cos(y)+ie^x\sin(y)) = \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}(\cos^2(y)+\sin^2(y))\right) + iarctan\left(\frac{e^x\sin(y)}{e^x\cos(y)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(e^{2x}) + iarctan(\tan(y))$$

Or $y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $donc\ arctan(\tan(y)) = y$
On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\varphi(\exp(z)) = z}$$

Ainsi z admet un antécédent par φ. Donc φ est surjective.
e) Ainsi φ est injective et surjective, donc bijective.

Problème de Bâle

Le but de ce problème est de démontrer ce résultat au combien célèbre et si cher à Léo :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Pour cela nous allons définir la suite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)\, dt$$

Partie A : Une expression explicite de I_n

1) a) Montrer que $I_0 = \frac{\pi}{2}$.

b) Calculer I_1.

c) Montrer que :

$$I_2 = \frac{3\pi}{16}$$

2) a) Montrer, en utilisant la linéarité de l'intégrale, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(t) \times [-sin(t) \times \cos^{2n}(t)]\, dt$$

b) En déduire à l'aide d'une IPP que :

$$I_{n+1} - I_n = -\frac{1}{2n+1} I_{n+1}$$

c) En déduire que :

$$I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$$

3) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

Partie B : Deux nouvelles suites J_n et K_n

Dans cette partie on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t)\, dt \;\; et \; K_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} J_n$$

1) Calculer J_0.

2) a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$$

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\pi}{4n^2} = K_{n-1} - K_n$$

c) Montrer que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{4n^2} = \frac{\pi^3}{24} - K_N$$

Partie C : Montrons que $\lim K_N = 0$

1) Montrer que :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], 0 \le x \le \frac{\pi}{2} sin(x)$$

2)	En déduire d'après la croissance de l'intégrale et les résultats des parties A et B que : $$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq K_N \leq \frac{\pi^3}{16(n+1)}$$
3)	En déduire la solution du problème de Bâle.

Partie A :

1) a) On a :

$$\boldsymbol{I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\times 0}(t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}}$$

b) On a :

$$\boldsymbol{I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\, dt = \left[t + \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}}$$

c) On cherche :

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(t)\, dt$$

Or on sait que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, (\cos(t))^4 = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{4it} + 4e^{2it} + 6 + 4e^{-2it} + e^{-4it}\right)$$
$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\cos(4t) + \frac{1}{2}\cos(2t)$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(t)\, dt = \left[\frac{3}{8}t + \frac{1}{32}\sin(4t) + \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{16}}$$

2) a) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(n+1)}(t)\, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)\left(\cos^2(t) - 1\right) dt$$
$$\boldsymbol{= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)\left(-\sin^2(t)\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \times \left[-\sin(t) \times \cos^{2n}(t)\right] dt}$$

b) On effectue une IP en posant :

$$u'(t) = -\sin(t) \times \cos^{2n}(t) \text{ et } v(t) = \sin(t)$$

On a alors :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \times [-\sin(t) \times \cos^{2n}(t)]\, dt = \left[\sin(t) \times \frac{\cos^{2n+1}(t)}{2n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\frac{\cos^{2n+1}(t)}{2n+1}\, dt$$
$$= \frac{-1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+2}(t)\, dt = \boldsymbol{-\frac{1}{2n+1} I_{n+1}}$$

c) On a :

$$\boldsymbol{I_{n+1} - I_n = -\frac{1}{2n+1} I_{n+1} \Rightarrow I_{n+1}\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) = I_n \Rightarrow I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n}$$

3) Ici on peut le faire de deux façons différentes.

M1 : Par récurrence (c'est la plus classique)

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) = "I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n)!} \times \frac{\pi}{2}"$$

Initialisation : $n = 0$
On a :

$$I_0 = \frac{\pi}{2}$$
$$\frac{(2 \times 0)!}{2^{2\times 0}(0)!} \times \frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit n un entier naturel. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a alors :

$$I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

De plus on sait que :

$$I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$$

On a donc :

$$I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{2^2(n+1)^2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2} \times \frac{\pi}{2}$$

On a donc :

$$I_{n+1} = \frac{[2(n+1)]!}{2^{2(n+1)}[(n+1)!]^2} \times \frac{\pi}{2}$$

Donc $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.
Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.
M2 : En réitérant le procédé
On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}$$
$$= \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-2}$$
$$= \vdots \;\; \textit{en réitérant le procédé}$$
$$= \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \ldots \times \frac{1}{2} \times I_0$$
$$= \frac{\mathbf{2n}(2n-1)(\mathbf{2n-2})(2n-3)\ldots \times 3 \times \mathbf{2} \times 1}{(\mathbf{2n} \times (\mathbf{2n-2}) \times \ldots \times \mathbf{4} \times \mathbf{2}) \times (2n \times (2n-2) \times \ldots \times 4 \times 2)} \times \frac{\pi}{2}$$
$$= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

Partie B

1) On a :

$$\boldsymbol{J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2\times 0}(t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 dt = \frac{\pi^3}{24}}$$

2) a) On a grâce à une IPP :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times \cos^{2n}(t)\, dt$$
$$= \underbrace{\left[t \times \cos^{2n}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \times \sin(t) \times \cos^{2n-1}(t)\, dt$$

On effectue de nouveau une IPP :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \times \sin(t) \times \cos^{2n-1}(t)\, dt$$

$$= 2n\left(\underbrace{\left[\frac{t^2}{2} \times \sin(t) \times \cos^{2n-1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2} \times \cos(t) \times \cos^{2n-1}(t) - (2n-1)\frac{t^2}{2} \times \sin^2(t)\cos^{2n-2}(t)\, dt\right)$$

$$= -2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2} \times \cos^{2n}(t)\, dt + 2n(2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2} \times (1 - \cos^2(t))\cos^{2n-2}(t)\, dt$$

$$= -nJ_n + n(2n-1)J_{n-1} - n(2n-1)J_n$$

$$= n(2n-1)J_{n-1} - n(1 + 2n - 1)J_n$$

$$= \boldsymbol{n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n}$$

b) On sait que :

$$\begin{cases} I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n \\ I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$$

De plus on sait que :

$$K_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} J_n$$

On en déduit donc que :

$$K_{n-1} = \frac{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}{(2n-2)!} J_{n-1}$$

On a donc :

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$$

$$\Longrightarrow \frac{\pi}{4n^2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n-1}[(n-1)!]^2} = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$$

$$\Longrightarrow \frac{\pi}{4n^2} = n(2n-1) \times \frac{2^{2n-1}[(n-1)!]^2}{(2n)!} J_{n-1} - 2n^2 \times \frac{2^{2n-1}[(n-1)!]^2}{(2n)!} J_n$$

$$= n(2n-1) \times \frac{2^{2n-1}[(n-1)!]^2}{(2n)(2n-1)(2n-2)!} J_{n-1} - \frac{2^{2n}[n!]^2}{(2n)!} J_n$$

$$= \frac{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}{(2n-2)!} J_{n-1} - \frac{2^{2n}[n!]^2}{(2n)!} J_n$$

$$= \boldsymbol{K_{n-1} - K_n}$$

c) On a d'après la question précédente :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\pi}{4n^2} = \sum_{n=1}^{N} (K_{n-1} - K_n) \underset{par\ télescopage}{=} K_0 - K_N$$

Or on a :

$$K_0 = \frac{2^{2\times 0} \times (0!)^2}{(2 \times 0)!} J_0 = \frac{\pi^3}{24}$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\forall N \in \mathbb{N}^*, \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^3}{24} - K_N}$$

Partie C :

1) Montrons que (cf ex B1 du TD 4) :

$$\forall\, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x \leq sin(x)$$

On pose :

$$f : \begin{cases} \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{2}{\pi}x - sin(x) \end{cases}$$

On sait que f est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], f'(x) = \frac{2}{\pi} - cos(x)$$

De plus on sait que :

- cos est continue
- cos est strictement décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
- $\cos(0) = 1$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Donc d'après le théorème de la bijection (ou théorème des valeurs intermédiaires), pour tout $y \in [0; 1]$, il existe un unique $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ telle que $\cos(x) = y$.

Or on sait que :

$$0 < \frac{2}{\pi} < 1$$

On en déduit donc qu'il existe un unique $\alpha \in]0; 1[$ tel que $\cos(\alpha) = \frac{2}{\pi}$

On a donc le tableau de variation suivant :

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}-\cos(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	↘		↗	0

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x - sin(x) \leq 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x \leq sin(x)$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} sin(x)}$$

b) On sait d'après la question précédente que :

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} sin(t)$$

$$\Longrightarrow 0 \leq t^2 \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 sin^2(t) \;\; car\; x \mapsto x^2 \; est\; croissante\; sur\; \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 cos^{2N}(t)\, dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 sin^2(t)\, cos^{2N}(t)\, dt \;\; (par\; croissance\; de\; l'intégrale)$$

$$\Longrightarrow 0 \leq J_N \leq \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2(t)\, cos^{2N}(t)\, dt$$

$$\Longrightarrow 0 \leq J_N \leq \frac{\pi^2}{4}(I_N - I_{N+1})$$

De plus on sait que :

$$I_N - I_{N+1} = \frac{1}{2N+1} I_N$$

On a donc :

$$0 \leq J_N \leq \frac{1}{2N+1} I_N \times \frac{\pi^2}{4}$$
$$\Longrightarrow 0 \leq J_N \leq \frac{1}{2N+1} \times \frac{(2N)!}{2^{2N}(N!)^2} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi^2}{4}$$
$$\boldsymbol{\Longrightarrow 0 \leq \frac{2^{2N}(N!)^2}{(2N)!} J_N \leq \frac{\pi^3}{8} \times \frac{1}{2N+1} \leq \frac{\pi^3}{16N}}$$

3) On sait que :

$$\lim_N \frac{\pi^3}{16N} = 0$$

On en déduit donc d'après le théorème des gendarmes que :

$$\lim_N \mathrm{K_N} = 0$$

On en déduit donc que :

$$\lim \left(\frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\pi^3}{24}$$

On a donc :

$$\boldsymbol{lim_N \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}}$$