DS n°3

Nous rappelons ici que la calculatrice est interdite. Un soin tout particulier sera apporté quant à la rédaction et au soin de la copie. Nous rappelons que les résultats doivent être encadrés ou soulignés, et qu'un trait devra être tiré entre chaque question.

Exercice 1 : Calcul d'une intégral

On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \end{cases}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Démontrer que f est impaire.
3) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

4) Démontrer que f réalise une bijection de f dans un ensemble à déterminer.
5) Démontrer que :

$$f^{-1} = sh$$

Dans toute la suite on cherche à calculer :

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{1}{(\mathrm{x}+1)\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+1}} \mathrm{dx}$$

6) A l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{x+1}$ démontrer que :

$$\mathrm{I} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{u}^2-\mathrm{u}+1}} \mathrm{du}$$

7) En déduire que :

$$I = \frac{1}{2} ln(3)$$

Exercice 2 : Une nouvelle somme de cosinus

On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} cos(kx)$$

1) a) Déterminer la valeur de $S_0(x)$, pour tout $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$.
   b) Déterminer la valeur de $\mathrm{S}_3\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
2) a) Rappeler la formule du binôme de Newton sur $\mathbb{C}$.
   b) En déduire la valeur de $\mathrm{S_n}(0)$ pour tout $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$.

3) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, S_n(x) = \mathcal{R}e\left(\left(1+e^{ix}\right)^n\right)$$

4) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, S_n(x) = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)$$

5) Résoudre $\mathrm{S_n(x) = 0}$

Exercice 3 : Un logarithme complexe

Le but de cet exercice est d'étendre la fonction ln: $]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ en une fonction définie sur le demi-plan complexe :

$$\mathcal{P}^+ = \{a+ib \in \mathbb{C}; a > 0\}$$

On rappelle pour cela la définition de l'exponentielle complexe :

$$\exp: \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ x+iy \mapsto e^x e^{iy} \end{cases}$$

1) a) Représentez $\mathcal{P}^+$ sur votre copie.
   b) Démontrer que :

$$\exp\left(1+\frac{i\pi}{2}\right) = e \times i$$

2) Démontrer que exp n'est pas injective.
3) Démontrer que exp définie une surjection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$.
4) Dans cette question on pose : $z = x + iy, (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :

$$\exp(z) = a + ib \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos(y) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin(y) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

Ce résultat nous invite à poser la fonction suivante :

$$\varphi: \begin{cases} \mathcal{P}^+ \to \mathbb{C} \\ a+ib \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(a^2+b^2) + i\arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) \end{cases}$$

5) a) Montrer que φ est injective.

(*Indication* : On pourra montrer que $\varphi(a+ib) = \varphi(a'+ib')$ si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$).

   b) On pose :

$$\mathcal{D} = \left\{x+iy \in \mathbb{C}, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$$

   Représentez $\mathcal{D}$ sur votre copie.
   c) Montrer que :

$$\forall z \in \mathcal{D}, \exp(z) \in \mathcal{P}^+$$

d) Montrer que :

$$\forall z \in \mathcal{D}, \varphi(\exp(z)) = z$$

e) En déduire que φ définie une bijection de $\mathcal{P}^+$ dans $\mathcal{D}$.

Remarque : On peut ainsi définir le logarithme complexe sur $\mathcal{P}^+$ en posant :

$$\forall a + ib \in \mathcal{P}^+, \ln(a + ib) = \frac{1}{2}\ln(a^2 + b^2) + iarctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

On a alors une extension du logarithme sur $\mathcal{P}^+$.

Problème de Bâle

Le but de ce problème est de démontrer ce résultat au combien célèbre et si cher à Léo :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Pour cela nous allons définir la suite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)\, dt$$

Partie A : Une expression explicite de I_n

1) a) Montrer que $I_0 = \frac{\pi}{2}$.

b) Calculer I_1.

c) Montrer que :

$$I_2 = \frac{3\pi}{16}$$

2) a) Montrer, en utilisant la linéarité de l'intégrale, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(t) \times [-sin(t) \times \cos^{2n}(t)]\, dt$$

b) En déduire à l'aide d'une IPP que :

$$I_{n+1} - I_n = -\frac{1}{2n+1} I_{n+1}$$

c) En déduire que :

$$I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$$

3) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

Partie B : Deux nouvelles suites J_n et K_n

Dans cette partie on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t)\, dt \ \ et\ K_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} J_n$$

1) Calculer J_0.

2) a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$$

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\pi}{4n^2} = K_{n-1} - K_n$$

c) Montrer que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^3}{24} - K_N$$

Partie C : Montrons que $\lim K_N = 0$

1) Montrer que :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], 0 \le x \le \frac{\pi}{2} sin(x)$$

2) En déduire d'après la croissance de l'intégrale et les résultats des parties A et B que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, 0 \le K_N \le \frac{\pi^3}{16 \times N}$$

3) En déduire la solution du problème de Bâle.