Chapitre 11 : Les Equations différentielles linéaires
Partie A : Le premier ordre

Dans tout ce cours I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère de plus a un réel et b une fonction continue de I dans $\mathbb{K}$. $(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$.

I) Equation différentielle du premier ordre

a) Généralités

Définition : Soit $(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \in \left(\mathcal{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})\right)^2$. On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre l'équation :

$$(E): y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

Remarque : On peut trouver en physique, chimie, SI, d'autres notations :

$$(E): \frac{dx}{dt} + a(t)x(t) = b(t) \qquad (E): \dot{x}(\theta) + a(\theta)x(\theta) = b(\theta) \quad ou \quad (E): y' + ay = b$$

Définition : On dit que $f: I \to \mathbb{K}$ est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si :

$$\forall\, x \in I, f'(t) + a(t)f(t) = b(t)$$

Exemple I.a.1 : On pose :

$$(E): y'(t) + (1+t)y(t) = t^2 + t + 1$$

Montrer que :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \longmapsto e^{-\frac{t^2}{2} - t - 5} + t \end{cases}$$

est solution de (E).

Remarque : Vous verrez cette année en cinétique chimique des équations différentielles du premier ordre non linéaire :

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A]^2$$

b) Résolution de l'équation homogène

Définition : On appelle équation différentielle linéaire homogène du premier ordre l'équation :

$$(E_0): y'(t) + a(t)y(t) = 0$$

Propriété I.b.1 : Les solutions de $(\mathrm{E}_0): \mathrm{y}' + \mathrm{ay} = 0$ sont :

$$f : t \longmapsto \lambda e^{-A(t)}$$

Où A est une primitive de a sur I.

Remarque : On note :

$$S_0 = \left\{t \in I \longmapsto \lambda e^{-A(t)} ; \lambda \in \mathbb{K}\right\}$$

Exemple I.b.2 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(E_1): y' + 3y = 0 \;\; ; \; (E_2): y'(t) + (1+t)y(t) = 0 \; (E_3): y'(t) - \frac{1}{1+t^2}y(t) = 0$$

Application I.b.3 : 1) Résoudre $y' + y = 0$ puis dessiner une allure de l'ensemble des courbes solutions.
2) Trouver l'unique solution de cette équation vérifiant y(0) = 2.

Propriété I.b.4 : Soit $(E_0): y' + ay = 0$ et S_0 l'ensemble de ses solutions. On a alors :

- $\forall (f,g) \in (S_0)^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda f + \mu g \in S_0$

- Il y a une unique solution qui s'annule sur I, c'est la solution nulle.
- Toutes les solutions sont proportionnelles, on dit que la dimension de S_0 est 1.

Remarque : Si on a une équation homogène du type $ay' + by = 0$, on se ramène à une équation du type précédent en divisant par la fonction a là où elle n'est pas nulle !!

Application I.b.5 : Résoudre l'équation $(E_0)\colon sin(t)\,y'(t) - cos(t)\,y(t) = 0 \; sur \; I =]0;\pi[$

Application I.b.6 : Résoudre $2ty' - y = 0$

II) Résolution avec second membre

a) Solution particulière

Propriété II.a.1 : Soit $(\mathrm{E})\colon y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ une équation différentielle linéaire du premier ordre. Alors toute solution de (E) s'obtient en ajoutant à une solution particulière y_p de (E) une solution de l'équation homogène associée (E_0). Ainsi l'ensemble des solutions de (E) satisfait :

$$S = y_p + S_0$$

Exemple II.a.2 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(E_1)\colon y' + 3y = 12 \quad (E_2)\colon y'(t) + (1+t)y(t) = t^2 + t + 1 \quad (E_3) : (1+x^2)y'(x) + y = 1$$

Remarque : Il est parfois difficile de trouver une solution particulière. On va voir ici plusieurs techniques pour les déterminer.

b) Principe de superposition

Propriété II.b.1 : Soit $(\mathrm{a}, \mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2) \in \left(\mathcal{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})\right)^3$. Si f_1 est solution sur I de $y' + ay = b_1$ et f_2 est solution sur I de $y' + ay = b_2$ alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda f_1 + \mu f_2$ est solution sur I de :

$$y' + ay = \lambda b_1 + \mu b_2$$

Application II.b.2 : Résoudre l'équation :

$$\frac{dy}{dx} - y = cos(x) + x$$

c) Produit d'un polynôme et d'une exponentielle

Propriété II.b.3 : Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et P une fonction polynômiale à coefficient dans $\mathbb{K}$. On pose :

$$y' + \lambda y = e^{\mu t}P(t)$$

Alors l'équation a une solution particulière de la forme $t \longmapsto e^{\mu t}t^m Q(t)$ où Q et P ont le même degré et m peut prendre deux valeurs :

$$\begin{cases} m = 0 \; si \; \lambda + \mu \neq 0 \\ m = 1 \; si \; \lambda + \mu = 0 \end{cases}$$

Application II.b.4 : Résoudre : $y' + y = 4ch(t)$

c) Principe de variation de la constante

Propriété II.c.1 : Soit $(\mathrm{E})\colon y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ une équation différentielle linéaire du premier ordre.

- Les solutions de l'équation homogène sont du type $t \longmapsto \lambda e^{-A(t)}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$
- Les solutions de l'équation complète sont du type : $t \longmapsto \lambda(t)e^{-A(t)}$ avec $\lambda \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$

Remarque : On peut utiliser la propriété précédente pour chercher une solution particulière de l'équation différentielle.

A retenir (Méthode de la variation de la constante) :
1) On résout l'équation homogène $y'(t) + a(t)y(t) = 0$: $t \longmapsto \lambda e^{-A(t)}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$
2) On pose $y_p(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$ solution particulière avec $\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ et on trouve $\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ avec l'équation :

$$\lambda'(t)e^{-A(t)} = b(t)$$

Application II.c.2 : Résoudre :

$$(1 + t)y' - ty + 1 = 0 \; sur \; I =]-1; +\infty[$$

III) Conditions initiales et raccordement

a) Problème de Cauchy

Définition : Soit (E): $y' + ay = b$ une équation différentielle sur I. Le problème de Cauchy associée au couple (t_0, y_0) où $\mathrm{t}_0 \in I \; et \; y_0 \in \mathbb{K}$ est la recherche des solutions y de (E) vérifiant la condition initiale (ou condition de Cauchy) : $y(t_0) = y_0$.

Propriété III.a.1 : Pour tout couple $(\mathrm{t}_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$ le problème de Cauchy associée au couple (t_0, y_0) admet une unique solution donnée par :

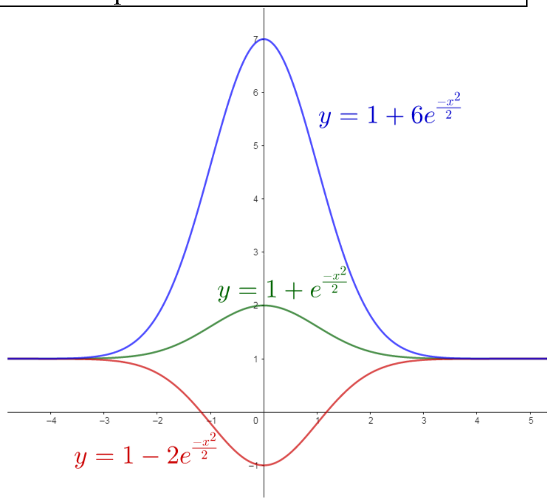
$$y(t) = e^{-A(t)}\left(y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(u)}b(u)du\right)$$

Exemple III.a.2 : Résoudre sur $]0; +\infty[$ le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' - \dfrac{1}{2x}y = \sqrt{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Propriété III.a.3 : Soit (E): $y' + ay = b$ une équation différentielle sur I.
- Une seule courbe solution définie sur I passe par le point $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$
- Deux solutions distinctes ont leur courbe représentative qui ne peut se couper.

Exemple III.a.4 : Voici quelques solutions à l'équation différentielle :
$\mathrm{y}' + \mathrm{xy} = \mathrm{x}$



Application III.a.5 (Ultra rapide) : Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' - \sqrt{3 + arctan(x^2 + 1)}\, y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

b) Problème de raccordements

Remarque : Lorsque l'on cherche à résoudre une équation différentielle du type (E): $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$, il faut faire attention aux lieux où a s'annule. Ainsi on ne peut résoudre cette équation que sur des intervalles où a ne s'annule pas. Mais on peut pourtant prolonger certaines de ces solutions.

Exemple III.b.1 : Résoudre $ty'(t) - 2y(t) = t^3$ sur $\mathbb{R}$

Exemple III.b.2 : $(1 - t)y'(t) - y(t) = t$ sur $\mathbb{R}$