Fiche TD 11- Equations différentielles

Partie A.1 : Sans second membre

Exercice A.1 : Résoudre les équations différentielles suivantes sur leur domaine de validité :

$$(E_1): y' + 3y = 0 \quad (E_2): y'(t) + ch(t)y(t) = 0 \quad (E_3): y'(t) - \frac{1}{1-t}y(t) = 0$$

Exercice A.2 : Résoudre les équations différentielles suivantes sur leur domaine de validité :

$$(E_1): y' + xcos(x)y = 0 \quad (E_2): y'(t) + \frac{1}{t^2+t+1}y(t) = 0 \quad (E_3): y'(t) - \frac{1}{ch(t)}y(t) = 0$$

Exercice A.3 : Résoudre les équations différentielles suivantes sur leur domaine de validité :

$$(E_1): sin(x)\, y' + y = 0 \quad (E_2): t(t-1)y'(t) + (2t-1)y(t) = 0 \quad (E_3): ty'(t) - 2y(t) = 0$$

Partie B.1 : Avec second membre

Exercice B.1 : Résoudre les équations différentielles suivantes sur leur domaine de validité :

$$(E_1): y' + 3y = 6 \qquad (E_2): y'(t) + ty(t) = t \qquad (E_3): y'(t) + y(t) = 2e^t + 4\,sin(t) + 3\,cos(t)$$

Exercice B.2 : Résoudre les équations différentielles suivantes sur leur domaine de validité :

$$(E_1): y' + y = xe^x\,cos(x) \qquad (E_2): y'(t) + 2iy(t) = e^{it} \qquad (E_3): y' - ytan(x) = cos^2(x)\ sur\ \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$$

Partie C.1 : Cauchy et problème de raccordement

Exercice C.1 : 1) Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' - \dfrac{2}{x^3}y = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

2) Peut-on prolonger des solutions de $y' - \frac{2}{x^3}y = 0$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice C.2 : Montrer qu'il existe une unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$xy' + y = \frac{2x}{x^2+1}$$

Exercice C.3 : Considérons un circuit RC monté en série aux bornes d'un générateur qui délivre une tension V(t). On appelle u(t) la tension à l'instant t aux bornes du générateur. On veut étudier la forme du signal u selon la nature de la tension V.

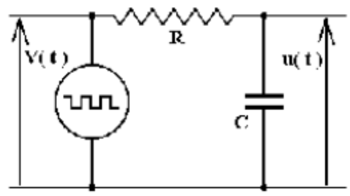

FIGURE 1 – Circuit RC en série

1) Etablir que :

$$RC\frac{du}{dt} + u = V$$

Par la suite on pose RC = 1.

2) On suppose ici que V = 1V. En déduire alors la courbe représentative de u sur [0 ;3] si u(0) = 0.

3) a) On suppose que le générateur délivre une tension alternative V telle que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \begin{cases} V(t) = 1\ si\ 2p \leq t < 2p+1 \\ V(t) = 0\ si\ 2p+1 \leq t < 2p+2 \end{cases}$$

Déterminer la représentation graphique de u entre $t = 0$ et $t = 3$ lorsque $u(0) = 0$.

b) On suppose que le générateur délivre une tension alternative V telle que $V(t) = 2\cos(2\pi t)$.

Déterminer la représentation graphique de u entre $t = 0$ et $t = 3$ lorsque $u(0) = 0$.

Partie A.2 : Equations homogènes

Exercice A.1 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(E_1): y'' + 2y' + 4y = 0 \quad dans\ \mathbb{R} \qquad\qquad (E_2): y'' + 2y' + 4y = 0\ dans\ \mathbb{C}$$

Exercice A.2 : Résoudre :

$$y'' - y' + (1+i)y = 0$$

Exercice A.3 : Résoudre :

$$\begin{cases} y'' + 2iy = 1 \\ y(0) = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0 \end{cases}$$

Partie B.2 : Equations non homogènes

Exercice B.1 : Résoudre :

$$(E_1): y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \qquad (E_2): y'' + 2y' + y = sh(x) \qquad (E_3): y'' - 3y' + 2y = e^x\, cos(x)$$

$$(E_4): y'' + 4y = sin(x) + sin(2x) \qquad (E_5): y'' + y = cos^3(x)$$

Exercice B.2 : Résoudre :

$$\begin{cases} \mathrm{y}'' - 2\mathrm{y}' - \mathrm{y} = \mathrm{x}^2 - \mathrm{x} \\ \mathrm{y}(0) = 0 \\ \mathrm{y}'(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice B.3 : Résoudre :

$$y'' + y = |x| + 1$$

Exercice B.4 : Soit x et y des fonctions de la variable t. Résoudre les systèmes différentiels suivant :

$$1) \begin{cases} x' = y + t^2 \\ y' = x - t^2 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x' = -7x + y + 1 \\ y' = -2x - 5y \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x' = 2tx - y + tcos(t) \\ y' = x + 2ty + tsin(t) \end{cases}$$

Exercice B.5 : On considère sur $]0; +\infty[$ l'équation différentielle d'Euler (E): $\mathrm{at^2y'' + bty' + cy = f(t)}$ où a,b, c sont des réels ($\mathrm{a} \neq 0$) et $\mathrm{f} \in \mathcal{C}^0(]0; +\infty[, \mathbb{R})$.
1) On pose $\mathrm{z(x) = y(e^x)}$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants en la variable x.
2) Résoudre l'équation d'Euler $t^2y'' + ty' + y = cos(2\, ln(t))$ pour $\mathrm{t} > 0$.
3) Résoudre l'équation d'Euler $t^2y'' - 2ty' + 2y = 2t^3\, sin(2t)$ pour $\mathrm{t} > 0$.

Exercice B.6 : On considère une solution y de l'équation différentielle : (E): $\mathrm{ty'' - 2y' - ty = 0}$ avec $\mathrm{t} > 0$.
1) Montrer que y est indéfiniment dérivable pour t>0.
2) En dérivant l'équation (E), montrer que y vérifie une équation différentielle linéaire du 4ième ordre.
3) En raisonnant comme pour les équations du second ordre à coefficients constants, résoudre l'équation précédente et en déduire les solutions de l'équation différentielle initiale.

Exercice B.7 : On considère une fonction indéfiniment dérivable f : $\left[0; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ et l'équation $\mathrm{y'' + y = f(x)}$. On cherche les solutions y sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ vérifiant $\mathrm{y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0}$ et on pose à cet effet :

$$F(x) = -\,cos(x) \int_0^x f(t)\, sin(t)\, dt + sin(x) \int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)\, cos(t)\, dt$$

1) Préciser les solutions de l'équation différentielle $\mathrm{y'' + y = 0}$ vérifiant $\mathrm{y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0}$.

2) On envisage ici les deux cas particulier $f(x) = 1$ *et* $f(x) = x$.
a) Exprimer dans ces deux cas F(x) sans symbole intégral, puis $F''(x) + F(x)$.
b) En déduire dasn ces deux cas les solutions y de $y'' + y = f(x)$ telles que $y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
3) a) On revient au cas général. Montrer que F est deux fois dérivable, expliciter $F'(x)$ et $F''(x)$, puis exprimer $F''(x) + F(x)$ en fonction de *f(x)*.
b) En déduire les solutions y de $y'' + y = f(x)$ telle que $\mathrm{y}(0) = \mathrm{y}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Exercice B.8 : Soit f $\in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. On définit Φ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \Phi(x) = f(x) - \int_0^x (x-t)f(t)dt$$

1) Montrer que ϕ est $\mathcal{C}^2$ sur ℝ et calculer ϕ″.
2) Donner l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^2$ satisfaisant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - \int_0^x (x-t)f(t)dt = x^2$$

Exercice B.9 : Soit $a \in \mathbb{R}$, fixé. On considère une fonction y de classe $\mathcal{C}^1$ de ℝ dans ℝ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) = y(-t)e^{at}$$

1) Montrer que y est indéfiniment dérivable sur ℝ.
2) Montrer que y vérifie une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.
3) En déduire toutes les fonctions y de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifient la relation précédente sur ℝ.