Correction TD 10

Partie A : Système linéaire

Exercice A.1 : Résoudre les systèmes linéaires suivants

$$(S_1):\begin{cases} x+2y=3 \\ x-4y=6 \end{cases} \qquad (S_2):\begin{cases} -3x+4y=6 \\ 6x-8y=-12 \end{cases} \qquad (S_3):\begin{cases} -2x+y=5 \\ 2x-y=-6 \end{cases}$$

$$(S_4):\begin{cases} x+y+2z=5 \\ x-y-z=1 \\ x+z=3 \end{cases} \qquad (S_5):\begin{cases} 3x+4y+z+2t=3 \\ 6x+8y+2z+6t=7 \\ 9x+12y+3z+10t=0 \end{cases}$$

1) On a :

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=3 \\ x-4y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6y=-3 \\ x-4y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2} \\ x=4 \end{cases}$$

2) On a :

$$(S_2):\begin{cases} -3x+4y=6 \\ 6x-8y=-12 \end{cases} \Leftrightarrow -3x+4y=6 \Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$$

Donc (S_2) admet une infinité de couple-solutions.

3) On a :

$$(S_3):\begin{cases} -2x+y=5 \\ 2x-y=-6 \end{cases} \Leftrightarrow -1=0$$

Donc le système (S_3) est incompatible.

4) On a :

$$\begin{cases} x+y+2z=5 \\ x-y-z=1 \\ x+z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2(3-x)=5 \\ x-y-(3-x)=1 \\ x+z=3 \end{cases}$$

On résout :

$$\begin{cases} -x+y=-1 \\ 2x-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} x+y+2z=5 \\ x-y-z=1 \\ x+z=3 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z)=(3,2,0)$$

5) On a :

$$\begin{cases} 3x+4y+z+2t=3 \\ 6x+8y+2z+6t=7 \\ 9x+12y+3z+10t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4y+z+2t=3 \\ 3x+4y+z+3t=\frac{7}{3} \\ 9x+12y+3z+10t=0 \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$t=-\frac{2}{3}$$

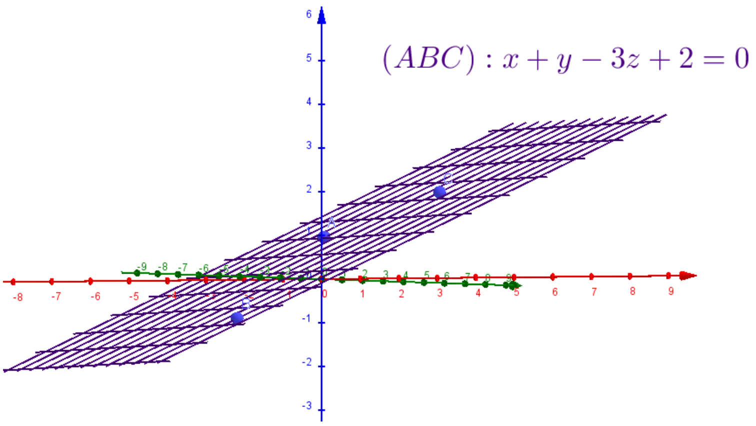
On en déduit donc que :

$$(S_5) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4y+z=\frac{13}{3} \\ 9x+12y+3z=\frac{20}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4y+z=\frac{13}{3} \\ 3x+4y+z=\frac{20}{9} \end{cases}$$

On en déduit donc que (S_5) est incompatible.

Exercice A.2 : L'espace est rapporté à $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
1) On considère dans l'espace trois points $A(-1;2;1), B(1,-6,-1)$ et $C(2,2,2)$. Donner un système d'équations paramétriques du plan $(\mathcal{P})$ défini par les points A,B, C puis une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$.
2) Même question avec les points $A'(1,1,1), B'(1,2,3)$ et $C'(4,0,0)$.
3) On considère la droite $(\mathcal{D})$: $\begin{cases} x+y-3z=-6 \\ -2x-4y+3z=-1 \end{cases}$. Donner une écriture paramétrique de $(\mathcal{D})$.

1) **Méthode 1 : Avec la méthode classique**
On sait que :
$$\exists(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4, (ABC): ax+by+cz+d=0$$
On a alors :
$$A(-1;2;1)\in(ABC) \Leftrightarrow -a+2b+c+d=0$$
$$B(1;-6;-1)\in(ABC) \Leftrightarrow a-6b-c+d=0$$
$$C(2;2;2)\in(ABC) \Leftrightarrow 2a+2b+2c+d=0$$
On a donc :
$$\begin{cases} -a+2b+c+d=0 \\ a-6b-c+d=0 \\ 2a+2b+2c+d=0 \end{cases}$$
On a alors trois équations quatre inconnues. Ce qui est normal car il existe une infinité d'équation de droite !
On a :
$$\begin{cases} -a+2b+c+d=0 \\ a-6b-c+d=0 \\ 2a+2b+2c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2b+d=0 \\ a-6b-c+d=0 \\ 2a+2b+2c+d=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{1}{2}d \\ a-c=2d \\ 2a+2c=-2d \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{1}{2}d \\ a=\dfrac{1}{2}d \\ c=-\dfrac{3}{2}d \end{cases} ;d\in\mathbb{R}^*$$
Comme on cherche une valeur de d non nul, on pose $d=2$, on obtient alors :
$$a=1, b=1 \text{ et } c=-3$$
On en déduit donc que :
$$(ABC): x+y-3z+2=0$$
Remarque : On peut vérifier que les points A, B et C vérifient l'équation du plan !

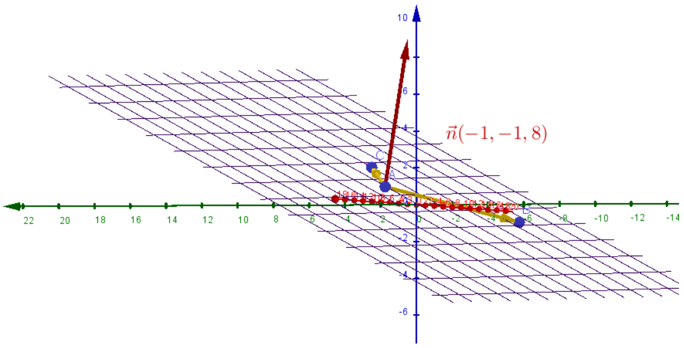


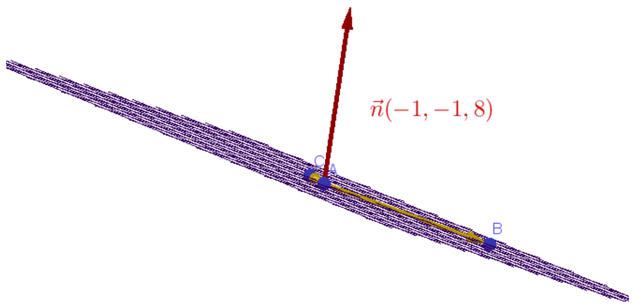
Méthode 2 : Avec un vecteur normal et le produit vectoriel
On sait que $A(-1,2,1), B(1,-6,-1)$ et $C(2,2,2)$
On en déduit donc que :
$$\overrightarrow{AB}(2,-8,-2), \overrightarrow{AC}(3,0,1)$$

Donc le plan (ABC) est engendré par les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}(2,-8,-2)$ et $\overrightarrow{AC}(3,0,1)$. Grâce au produit vectoriel, il est très facile de déterminer un vecteur normal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2\\-8\\-2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\-8\\24\end{pmatrix}$$

On en déduit donc que $\vec{n}(1,1,-3)$ est normal au plan (ABC).





On en déduit donc que :

$$\exists!\, d\in\mathbb{R}, (ABC): x+y-3z+d=0$$

Il suffit alors de remplacer par les coordonnées d'un point, que ce soit A, B ou C. On a :

$$C(2,2,2)\in(ABC)\Leftrightarrow 2+2-6+d=0\Longrightarrow d=2$$

On en déduit donc que :

$$(ABC):\ x+y-3z+2=0$$

2) **Méthode 1 : Avec la méthode classique**

On sait que :

$$\exists(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4, (ABC): ax+by+cz+d=0$$

On a alors :

$$A'(1,1,1)\in(A'B'C')\Leftrightarrow a+b+c+d=0$$
$$B'(1,2,3)\in(A'B'C')\Leftrightarrow a+2b+3c+d=0$$
$$C'(4,0,0)\in(A'B'C')\Leftrightarrow 4a+d=0$$

On a donc :

$$\begin{cases} a+b+c+d=0\\ a+2b+3c+d=0\\ 4a+d=0\end{cases}$$

On a alors trois équations quatre inconnues. Ce qui est normal car il existe une infinité d'équation de droite !

On a :

$$\begin{cases} a+b+c+d=0\\ a+2b+3c+d=0\\ 4a+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b+c=-\frac{3}{4}d\\ b+2c=0\\ a=-\frac{1}{4}d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=-\frac{3}{2}d\\ c=\frac{3}{4}d\\ a=-\frac{1}{4}d\end{cases}$$

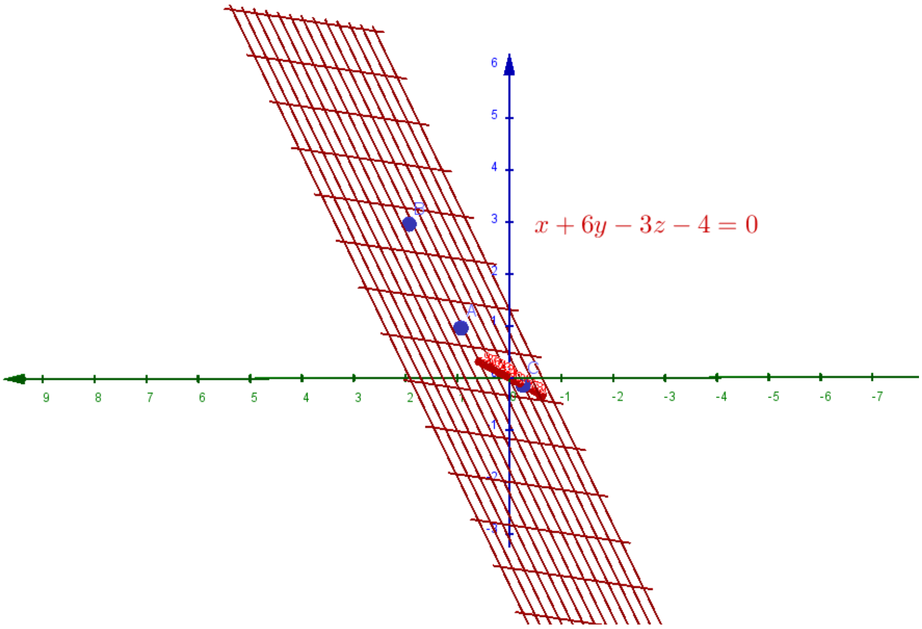
Comme on cherche une valeur de d non nul, on pose $d=4$, on obtient alors :

$$a=-1, b=-6 \text{ et } c=3$$

On en déduit donc que :

$$(A'B'C'): -x-6y+3z+4=0$$

Remarque : On peut vérifier que les points A, B et C vérifient l'équation du plan !



Méthode 2 : Avec un vecteur normal et le produit vectoriel

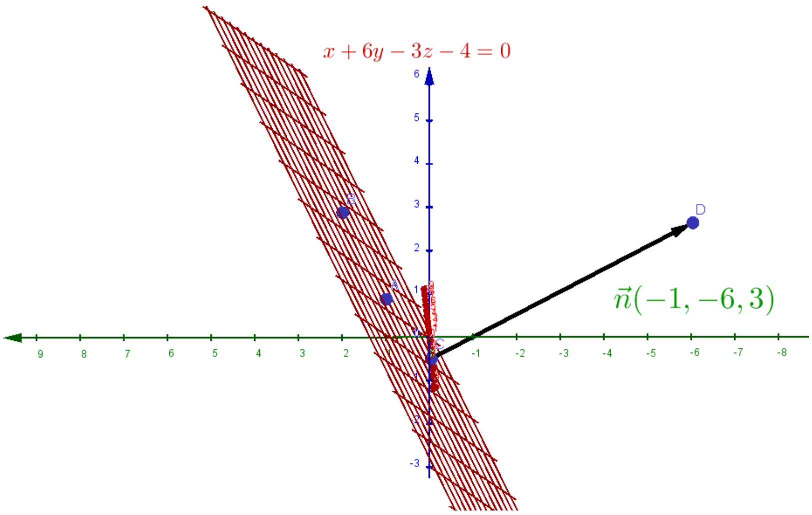
On sait que $A'(1,1,1), B'(1,2,3)$ et $C(4,0,0)$. On en déduit donc que :

$$\overrightarrow{A'B'}(0,1,2), \overrightarrow{AC}(3,-1,-1)$$

Donc le plan $(A'B'C')$ est engendré par les deux vecteurs $\overrightarrow{A'B'}(0,1,2)$ et $\overrightarrow{A'C'}(3,-1,-1)$. Grâce au produit vectoriel, il est très facile de déterminer un vecteur normal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que $\vec{n}(1,6,-3)$ est normal au plan (ABC).



On en déduit donc que :

$$\exists!\, d \in \mathbb{R}, (A'B'C') : x + 6y - 3z + d = 0$$

Il suffit alors de remplacer par les coordonnées d'un point, que ce soit A, B ou C. On a :

$$C(1,1,1) \in (A'B'C') \Leftrightarrow 1 + 6 - 3 + d = 0 \Longrightarrow d = 4$$

On en déduit donc que :

$$(A'B'C') : \ x + 6y - 3z + 4 = 0$$

3) On a :

$$(\mathcal{D}) : \begin{cases} x + y - 3z = -6 \\ -2x - 4y + 3z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -6 + 3z \\ 2x + 4y = 1 + 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{25}{2} + \dfrac{9}{2} z \\ y = \dfrac{13}{2} - \dfrac{3}{2} z \end{cases}$$

On en déduit donc qu'une représentation paramétrique de $(\mathcal{D})$ est :

$$\begin{cases} x = -\frac{25}{2} + \frac{9}{2}t \\ y = \frac{13}{2} - \frac{3}{2}t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Exercice A.3 : L'espace est rapporté à $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Discuter suivant les valeurs de $m \in \mathbb{R}$, l'intersection de la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $\begin{cases} mx + 2y - 3z = 3 \\ (m-1)x + my + z = 1 \end{cases}$ et du plan d'équation $(m+1)x + my + (m-1)z = m - 1$.

On va résoudre le système suivant :

$$(S_m) : \begin{cases} mx + 2y - 3z = 3 \\ (m-1)x + my + z = 1 \\ (m+1)x + my + (m-1)z = m - 1 \end{cases}$$

On fait la matrice des coefficients du système (cela vient dans la partie B mais c'est plus facile ici) :

$$\begin{pmatrix} m & 2 & -3 \\ m-1 & m & 1 \\ m+1 & m & m-1 \end{pmatrix}$$

1er cas : Si $m = 0$

On a alors :

$$(S_0) : \begin{cases} 2y - 3z = 3 \\ -x + z = 1 \\ x - z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z - 1 \\ y = \frac{3}{2}z + \frac{3}{2} \end{cases}$$

On obtient donc que la droite $(D_0) : \begin{cases} x = z - 1 \\ y = \frac{3}{2}z + \frac{3}{2} \end{cases}$ est incluse dans le plan $(\mathcal{P}_0)$.

2ième cas : $m \neq 0$

On a alors :

$$\begin{pmatrix} m & 2 & -3 \\ m-1 & m & 1 \\ m+1 & m & m-1 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow \frac{1}{m}L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{m} & -\frac{3}{m} \\ m-1 & m & 1 \\ m+1 & m & m-1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - (m-1)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (m+1)L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{m} & -\frac{3}{m} \\ 0 & m - \frac{(m-1)2}{m} & 1 + \frac{(m-1)3}{m} \\ 0 & m - \frac{(m-1)2}{m} & m - 1 + \frac{(m-1)3}{m} \end{pmatrix}$$

On a :

$$\begin{pmatrix} m & 2 & -3 \\ m-1 & m & 1 \\ m+1 & m & m-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{m} & -\frac{3}{m} \\ 0 & \frac{2-m}{m} & \frac{4-3m}{m} \\ 0 & \frac{2-m}{m} & \frac{m^2+2m-3}{m} \end{pmatrix}$$

On peut chercher une équation paramétrique de $(\mathcal{D})$: $\begin{cases} mx + 2y - 3z = 3 \\ (m-1)x + my + z = 1 \end{cases}$.

On a :

$$\begin{cases} mx + 2y - 3z = 3 \\ (m-1)x + my + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{m}{2}x + \frac{3}{2}z + \frac{3}{2} \\ (m-1)x + m\left(-\frac{m}{2}x + \frac{3}{2}z + \frac{3}{2}\right) = -z + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{m}{2}x + \frac{3}{2}z + \frac{3}{2} \\ (m-1)x + m\left(-\frac{m}{2}x + \frac{3}{2}z + \frac{3}{2}\right) = -z + 1 \end{cases}$$

Exercice A.4 : Soient les droites du plan cartésien d'équation $(AB): x - 2y + 3 = 0$, $(AC): 2x - y - 3 = 0$ et $(BC): x + 2y + 1 = 0$.
Quelles sont les coordonnées des points A,B et C ?

Il suffit de voir que $A(x_A, y_A)$ vérifie le système d'équations linéaire :
$$\begin{cases} x_A - 2y_A + 3 = 0 \\ 2x_A - y_A - 3 = 0 \end{cases}$$
De même on a $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$ vérifie :
$$\begin{cases} x_B - 2y_B + 3 = 0 \\ x_B + 2y_B + 1 = 0 \end{cases} et \begin{cases} x_C - 2y_C + 3 = 0 \\ x_C + 2y_C + 1 = 0 \end{cases}$$
On résout les 3 équations et on trouve :
$$\boldsymbol{A(3;3), B\left(-2;\frac{1}{2}\right)\ et\ C(1;-1)}$$

Exercice A.5 : Déterminer une équation du plan de l'espace parallèle à l'axe (Ox), passant par les points $A(0,1,2)$ et $B(2,-1,0)$.

On pose $(\mathcal{P}): ax + by + cz + d = 0$. On cherche 4 inconnues, a, b, c et d.
On sait déjà que $A(0;1;2) \in (\mathcal{P})$ et $B(2,-1,0) \in (\mathcal{P})$. On a donc :
$$\begin{cases} b + 2c + d = 0 \\ 2a - b + d = 0 \end{cases}$$
De plus on sait que (O_x) est parallèle à $(\mathcal{P})$. On en déduit donc que $\vec{u}(1;0;0)$ appartient au plan $(\mathcal{P})$. Ainsi on a : $C(1;1;2)$ et $D(2;1;2)$ deux nouveaux points du plan. On résout alors le système :
$$\begin{cases} b + 2c + d = 0 \\ 2a - b + d = 0 \\ a + b + 2c + d = 0 \\ 2a + b + 2c + d = 0 \end{cases}$$
On résout le système et on trouve $a = 0, b = d = -c$.
On peut donc poser :
$$\boldsymbol{(\mathcal{P}) : y - z = -1}$$

Partie B : Matrice échelonnée

Exercice B.1 : Déterminer la matrice échelonnée réduite par lignes équivalente par lignes aux matrices suivantes.
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

1) On a :
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow 2L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
On en déduit donc que A a deux pivots. Donc le rang de A est 2 ! De plus on a :
$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
On en déduit donc que :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{4}L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

De plus :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow \frac{2}{3}L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

On en déduit que B admet 3 pivots donc $\mathrm{rg}(B) = 3$. De plus on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{3}{4}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + L_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

3) On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & -8 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 + L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que C admet 3 pivots. Donc $\mathrm{rg}(C) = 3$. De plus on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & -8 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice B.2 : Résoudre les systèmes suivants :

$$1) \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases}, 2) \begin{cases} 2x - 3y + 6z + 2t = 5 \\ y - 2z + t = 1 \\ z - 3t = 2 \end{cases}, 3) \begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = -1 \\ x + 11y - z = 5 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x + y - z + t = 2 \\ 2x - 2y + z - 2t = 1 \\ -x + y + z - 2t = -2 \end{cases}, 5) \begin{cases} 3x + y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 6t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 0 \end{cases}, 6) \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ 3x - y + t = 3 \\ 4x - 3y + z + 2t = 4 \end{cases}$$

1) $\begin{cases} x+y+2z=5 \\ x-y-z=1 \\ x+z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{(x,y,z)=(3;2;0)}$

2) $\begin{cases} 2x-3y+6z+2t=5 \\ y-2z+t=1 \\ z-3t=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=5+3y-6z-2t \\ y=1+2z-t \\ z=2+3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{x=4-\frac{5}{2}t} \\ \mathbf{y=5+5t} \\ \mathbf{z=2+3t} \end{cases}$

On a donc :

$$\begin{cases} 2x-3y+6z+2t=5 \\ y-2z+t=1 \\ z-3t=2 \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{(x,y,z,t) \in \left\{\left(4-\frac{5}{2}t;5+5t;2+3t;t\right);t\in\mathbb{R}\right\}}$$

3) $\begin{cases} x-3y+2z=1 \\ 2x+y+z=-1 \\ x+11y-z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{8}{3} \\ y=1 \\ z=\frac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z)=\left(-\frac{8}{3};1;\frac{10}{3}\right)$

4) $\begin{cases} x+y-z+t=2 \\ 2x-2y+z-2t=1 \\ -x+y+z-2t=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{(x,y,z,t) \in \left\{\left(1+\frac{1}{6}t;-\frac{1}{2}t;-1+\frac{2}{3}t;t\right);t\in\mathbb{R}\right\}}$

5) $\begin{cases} 3x+y+z+2t=3 \\ 6x+8y+2z+6t=7 \\ 9x+12y+3z+10t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{46}{9}-\frac{1}{3}z \\ y=\frac{8}{3} \\ t=-\frac{15}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{(x,y,z,t) \in \left\{\left(\frac{46}{9}-\frac{1}{3}z;\frac{8}{3};z;-\frac{15}{2}\right);z\in\mathbb{R}\right\}}$

6) $\begin{cases} 2x+y-z=2 \\ 3x-y+t=3 \\ 4x-3y+z+2t=4 \end{cases}$

On peut voir ici que (L_3) est liée avec (L_1) et (L_2) car :

$(L_3)=2(L_2)-(L_1)$

On a donc :

$$\begin{cases} 2x+y-z=2 \\ 3x-y+t=3 \\ 4x-3y+z+2t=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-z=2 \\ 3x-y+t=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+\frac{1}{5}z-\frac{1}{5}t \\ y=\frac{3}{5}z+\frac{2}{5}t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{(x,y,z,t) \in \left\{\left(1+\frac{1}{5}z-\frac{1}{5}t;\frac{3}{5}z+\frac{2}{5}t;z;t\right);(z,t)\in\mathbb{R}^2\right\}}$$

Exercice B.3 : Déterminer les valeurs de m réels pour lesquelles le système suivant, donné sous forme matricielle, admet des solutions non nulles. Donner alors les solutions sous forme paramétrique et géométrique :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1+m & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1+m & 0 \end{array}\right)$$

On peut déjà voir que le système est compatible car c'est un système homogène. On a donc (0,0,0) solution.
Nous allons voir lorsque nous avons une infinité de solutions. On a :

$$A_m=\begin{pmatrix} 1+m & 1 & 1 \\ 1 & 1+m & 1 \\ 1 & 1 & 1+m \end{pmatrix} \underset{L_2\leftarrow L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1+m & 1 \\ 1+m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+m \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-(1+m)L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1+m & 1 \\ 0 & -m(2+m) & -m \\ 0 & -m & m \end{pmatrix}$$

1er cas : Si $m=0$

On a alors le système :

$$(S_0) \Leftrightarrow x+y+z=0 \Leftrightarrow x=-y-z$$

On en déduit donc qu'il y a une inconnues principales et deux inconnues secondaires.
Donc (x,y,z) est solution si et seulement si $(x,y,z) \in \{(-y-z;y;z);(y;z)\in\mathbb{R}^2\}$.

On part du principe ici que $m \neq 0$

On a donc :

$$A_m \underset{\substack{L_2 \leftarrow -\frac{1}{m}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{-1}{m}L_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1+m & 1 \\ 0 & 2+m & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1+m & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2+m & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1+m & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2+m & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3-(2+m)L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1+m & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3+m \end{pmatrix}$$

2ième cas : $m = -3$

On a alors :

$$A_{-3} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc qu'il y a deux inconnues principales et une inconnue secondaire :

$$(S_{-3}) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \{(-\boldsymbol{z}; -\boldsymbol{z}; \boldsymbol{z}); \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}\}$$

Exercice B.4 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants, en discutant suivant les valeurs des paramètres a ou m.

$$1) \begin{cases} 2x+y-3z=a \\ 3x+2y+z=a+3 \\ 7x+4y-5z=2a+5 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} mx+y+z+t=1 \\ x+my+z+t=m \\ x+y+mz+t=m+1 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x-my+m^2z=m \\ mx-m^2y+mz=1 \\ mx+y-m^3z=1 \end{cases}$$

1) (S_a): $\begin{cases} 2x+y-3z=a \\ 3x+2y+z=a+3 \\ 7x+4y-5z=2a+5 \end{cases}$

Ici on peut constater que :

$$2 \times (2;1;-3) + (3;2;1) = (7;4;-5)$$

Ainsi le système est compatible si et seulement si $2 \times a + a + 3 = 2a + 5$.

On en déduit donc que le système est compatible si est seulement si $a = 2$. On a alors :

$$(S_2): \begin{cases} 2x+y-3z=2 \\ 3x+2y+z=5 \\ 7x+4y-5z=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-3z=2 \\ 3x+2y+z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7z-1 \\ y=4-13z \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z) \in \{(7\boldsymbol{z}-1; 4-13\boldsymbol{z}; \boldsymbol{z}); \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}\}$$

2) (S_m): $\begin{cases} mx+y+z+t=1 \\ x+my+z+t=m \\ x+y+mz+t=m+1 \end{cases}$. On pose :

$$A_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 1 \\ 0 & 1-m^2 & 1-m & 1-m \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1er cas : Si $m = 1$

On a alors :

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x+y+z+t=2 \end{cases}$$

Donc le système est incompatible !

2ième cas : $m \neq 1$

$$A_m \sim \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+m & 1 \end{pmatrix}$$

- Si $m = -2$, alors le rang de la matrice est 3 et on a un paramètre z et trois inconnues x, y, t :

$$(S_{-2}): \begin{cases} -2x+y+z+t=1 \\ x-2y+z+t=-2 \\ x+y-2z+t=-1 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z,t) \in \{(-5+z; z-1; z; 1); z \in \mathbb{R}\}$$

- Si $m \neq -2$, alors le rang de la matrice est 3 et on a un paramètre t et trois inconnues x, y, z :

$$(S_m): \begin{cases} mx+y+z+t=1 \\ x+my+z+t=m \\ x+y+mz+t=m+1 \end{cases} \Leftrightarrow (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{t}) \in \left\{\left(\frac{2m^2+3m-1-t}{m+2}; -\frac{1+m+t}{2+m}; \frac{1-t}{2+m}; \boldsymbol{t}\right); \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}\right\}$$

3) $(S_m):\begin{cases} x-my+m^2z=m \\ mx-m^2y+mz=1 \\ mx+y-m^3z=1 \end{cases}$

1er cas $m=0$

On a alors :

$(S_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x=0} \\ \boldsymbol{0=1} \\ \boldsymbol{y=1} \end{cases}$ **Donc le système est incompatible** !

2ième cas : $m=1$

On a alors :

$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=1 \\ x-y+z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases}$. Donc le système est compatible et admet une infinité de solutions !

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{(x,y,z) \in \{(1;z;z);z\in\mathbb{R}\}}$$

3ième cas : $m=-1$

$$(S_{-1}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=-1 \\ -x-y-z=1 \\ -x+y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=-1 \\ -x+y+z=1 \end{cases}$$

Donc le système est compatible et admet une infinité de solutions !

$$(S_{-1}) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-z \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{(x,y,z) \in \{(-1;-z;z);z\in\mathbb{R}\}}$$

4ième cas : $m\notin\{0;1;-1\}$

$$(S_m):\begin{cases} \mathbf{x-my+m^2z=m} \\ \mathbf{mx-m^2y+mz=1} \\ \mathbf{mx+y-m^3z=1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x=\dfrac{m+2m^3}{1+m^2}} \\ \boldsymbol{y=\dfrac{2m^2+1}{1+m^2}} \\ \boldsymbol{z=\dfrac{1}{m}} \end{cases}$$

Exercice B.5 : Soit $k\in\mathbb{R}$. Trouver les solutions (x,y,z) du système dont la matrice est A et le second membre est B avec :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 \\ k+5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On précisera dès que possible le rang du système et le nombre de solutions, en fonction de k.

On peut déjà travailler avec la matrice $A_k=\begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ pour savoir pour quelle valeur de k le rang de la matrice est 3 ou bien inférieur.

On a :

$A_k\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ 0 & 1 & 1+2k \\ 0 & 0 & 4+k \end{pmatrix}$ (*Avec les opérations* $L_2\leftarrow L_2-3L_1, L_3\leftarrow L_3-2L_1, L_3\leftarrow L_2, L_2\leftarrow -L_2, L_3\leftarrow L_3+L_2$)

1er cas : Si $k=-4$

On a alors :

$$\begin{cases} x+2y-4z=1 \\ 3x+4y+2z=1 \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$$

On sait que (L_3) est liée à (L_1) *et* (L_2). Il faut trouver comment !

On a :

$$(L_3) = \frac{1}{2}(L_1) + \frac{1}{2}(L_2)$$

De plus cela fonctionne pour les seconds membres.
On a donc :

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ 3x + 4y + 2z = 1 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ 3x + 4y + 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -10z - 1 \\ y = 7z + 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) \in \{(-10z - 1; 1 + 7z; z); z \in \mathbb{R}\}$$

2[ième] cas : Si $k \neq -4$

Ici le système est compatible et admet une unique solution, peut importe la valeur de k.

$$\begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ 3x + 4y + 2z = k + 4 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4k^2 + 14k + 4}{k + 4} \\ y = \dfrac{-2k^2 - 8k}{k + 4} = -2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Il y a une erreur mais c'est du calcul ! Si l'un d'entre vous à la solution ! J'ai la flemme de refaire le calcul ! ^^

Exercice B.6 : Résoudre le système suivant d'inconnues complexes :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \cdots + 2x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + 3x_n = 1 \\ \vdots \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \forall i \in [\![1; n]\!], L_i : \sum_{k=1}^{n} \min(i, k)\, x_k = 1$$

On peut déjà voir que $(x_1, \dots, x_n) = (1,0, \dots, 0)$ est solution de ce système. Voyons si c'est la seule solution.
On pose A la matrice des coefficients du système. On a alors :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\forall i \in [\![1; n]\!], L_i = (x_j)_{1 \le j \le n} \text{ avec } x_j = \min(j, i)$$

On effectue les opérations suivantes (dans l'ordre décroissant) :

$$\forall i \in [\![2; n]\!], L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$$

On a alors :

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que A admet n pivots donc $\mathrm{rg}(A) = n$ donc le système admet une unique solution.
On a donc :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \cdots + 2x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + 3x_n = 1 \\ \vdots \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (1,0, \dots, 0)$$

Exercice B.7 : Soient $A_1, \dots, A_n$ des points du plan complexe. Déterminer à quelles conditions il existe au moins un polygone à n sommets $M_1(z_1), \dots, M_n(z_n)$ tel que A_i est le milieu de $[M_i M_{i+1}]$ et A_n est le milieu de $[A_n A_1]$.

On pose a_i l'affixe du point A_i pour tout $i \in [\![1; n]\!]$.
Le problème revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2a_1 \\ z_2 + z_3 = 2a_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} + z_n = 2a_{n-1} \\ z_n + z_1 = 2a_n \end{cases}$$

On effectue les opérations successives $L_n \leftarrow L_n - L_1, L_n \leftarrow L_n + L_2, \dots, L_n \leftarrow L_n + (-1)^{n-1}L_{n-1}$ donnent :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2a_1 \\ z_2 + z_3 = 2a_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} + z_n = 2a_{n-1} \\ (1-(-1)^n)z_n = 2(a_n - a_1 + a_2 + \dots + (-1)^n a_{n-1}) \end{cases}$$

On peut alors conclure :

_ Si n est **impair**, le système admet une **unique solution**.

_ Si n est **pair**, alors le système possède une solution si et seulement si :

$$\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} a_k = 0$$

Exercice B.8 : Résoudre le système suivant, où a,b et c sont trois réels deux à deux distincts et d un réel quelconque.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$$

On résout le système et on trouve :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{(b-d)(c-d)(c-b)}{(b-a)(c-a)(c-b)} \\ y = \dfrac{(a-d)(c-d)(c-a)}{(b-a)(c-a)(c-b)} \\ z = \dfrac{(a-d)(b-d)(b-a)}{(b-a)(c-a)(c-b)} \end{cases}$$

Exercice B.9 : Trouver suivant la valeur de $a \in \mathbb{C}$, l'ensemble des solutions du système suivant :

$$\begin{cases} ax_1 = x_2 + 1 \\ ax_2 = x_3 + 1 \\ \vdots \\ ax_{n-1} = x_n + 1 \\ ax_n = x_1 + 1 \end{cases}$$

Ici l'on a envie de faire :

$$ax_1 = x_2 + 1 \Leftrightarrow a^2x_1 = ax_2 + a = x_3 + a + 1 \Leftrightarrow a^3x^1 = ax_3 + a^2 + a = x_4 + a^2 + a + 1$$

Cependant on ne peut faire cela que si $a \neq 0$.

1er cas : $a = 0$

On a alors :

$$\forall i \in [\![1; n]\!], x_i = -1$$

On a donc une unique solution $(-1; -1; \dots; -1)$

2ième cas : $a \neq 0$

On obtient par récurrence que :

$$\forall i \in [\![1; n-1]\!], a^i x_1 = x_{i+1} + \sum_{k=0}^{i-1} a^i$$

On en déduit grâce à la dernière ligne que :

$$a^n x_1 = x_1 + \sum_{k=0}^{n-1} a^i \Leftrightarrow (a^n - 1)x_1 = \sum_{k=0}^{n-1} a^i$$

Là encore on a plusieurs cas à considérer.

3ième cas : $\boldsymbol{a = 1}$

On a alors :

$$x_1 = x_1 + n$$

Donc cela est impossible. Le système est **incompatible** !

4ième cas : Si $\boldsymbol{a \neq 0 \; et \; a \notin \mathbb{U}_n}$

On a alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^i = \frac{a^n - 1}{a - 1} \Longrightarrow x_1 = \frac{1}{a-1} = x_i, \forall i \in [\![1; n]\!]$$

5ième cas : $\boldsymbol{a \in \mathbb{U}_n \backslash \{1\}}$

On démontre que le système admet une infinité de solutions, dont le paramètre est x_n :
$(x_1, \dots, x_n)$ est solution si et seulement si :

$$\forall i \in [\![1; n-1]\!], x_i = a^i x_n - \sum_{k=0}^{i-1} a^k$$