Correction TD 11
Equations différentielles

Partie A.1 : Sans second membre

Exercice A.1 : Résoudre les équations différentielles suivantes sur leur domaine de validité :

$$(E_1): y' + 3y = 0 \quad (E_2): y'(t) + \mathrm{ch}(t)y(t) = 0 \quad (E_3): y'(t) - \frac{1}{1-t}y(t) = 0$$

1) On pose :

$$a: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 3 \end{cases} \text{ et } A: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 3x \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$y' + 3y = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda e^{-3x}$$

2) On pose :

$$a: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \mathrm{ch}(t) \end{cases} \text{ et } A: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \mathrm{sh}(t) \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$y'(t) + \mathrm{ch}(t)y(t) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \lambda e^{-\mathrm{sh}(t)}$$

3) **1^er^ cas : $t < 1$**

On pose :

$$a: \begin{cases}]-\infty; 1[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto -\dfrac{1}{1-t} \end{cases} \text{ et } A: \begin{cases}]-\infty; 1[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \ln(1-t) \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$y'(t) - \frac{1}{1-t}y(t) = 0 \text{ et } t \in]-\infty; 1[\Leftrightarrow \exists \lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall t \in]-\infty; 1[, y(t) = \lambda_1 e^{-\ln(1-t)} = \frac{\lambda_1}{1-t}$$

2^ième^ cas : $t > 1$

On pose :

$$a: \begin{cases}]1; +\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto -\dfrac{1}{1-t} \end{cases} \text{ et } A: \begin{cases}]-\infty; 1[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \ln(t-1) \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$y'(t) - \frac{1}{1-t}y(t) = 0 \text{ et } t \in]1; +\infty[\Leftrightarrow \exists \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall t \in]1; +\infty[, y(t) = \lambda_2 e^{-\ln(t-1)} = \frac{\lambda_2}{1-t}$$

Exercice A.2 : Résoudre les équations différentielles suivantes sur leur domaine de validité :

$$(E_1): y' + x\cos(x)y = 0 \quad (E_2): y'(t) + \frac{1}{t^2+t+1}y(t) = 0 \quad (E_3): y'(t) - \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}y(t) = 0$$

1) On pose :

$$a: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\cos(x) \end{cases}$$

La difficulté ici est de trouver une primitive de $x \mapsto x\cos(x)$. On effectue un IPP.

On a :

$$\int x\cos(x)\,dx = [x\sin(x)] - \int \sin(x)\,dx = x\sin(x) + \cos(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

On pose alors :

$$A: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\sin(x) + \cos(x) \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$y' + x\cos(x)y = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda e^{-x\sin(x) - \cos(x)}$$

2) On pose :

$$a:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ t\mapsto \dfrac{1}{t^2+t+1}\end{cases}$$

La difficulté ici est de trouver une primitive de $x\mapsto \frac{1}{t^2+t+1}$. On a :

$$\int\frac{1}{1+t+t^2}dt=\int\frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt=\frac{4}{3}\int\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dt=\frac{4}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

On pose alors :

$$A:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ t\mapsto \dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}t+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$y'+\frac{1}{t^2+t+1}y=0\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R},\forall t\in\mathbb{R},y(t)=\lambda e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

3) On pose :

$$a:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ t\mapsto \dfrac{-1}{\mathrm{ch}(t)}\end{cases}$$

La difficulté ici est de trouver une primitive de $x\mapsto -\frac{1}{ch(t)}$. On a :

$$\int\frac{1}{\mathrm{ch}(t)}dt=\int\frac{2}{e^t+e^{-t}}dt=\int\frac{2e^t}{1+(e^t)^2}dt=2\arctan(e^t)+c,c\in\mathbb{R}$$

On pose alors :

$$A:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ t\mapsto 2\arctan(e^t)\end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$y'-\frac{1}{\mathrm{ch}(t)}y=0\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R},\forall t\in\mathbb{R},y(t)=\lambda e^{2\arctan(e^t)}$$

Exercice A.3 : Résoudre les équations différentielles suivantes sur leur domaine de validité :
$(E_1):\sin(x)\,y'+y=0$ $(E_2):t(t-1)y'(t)+(2t-1)y(t)=0$ $(E_3):ty'(t)-2y(t)=0$

Il faut ici faire attention aux problèmes de raccordement !
1) On sait que $\sin(x)\neq 0\Leftrightarrow x\in\,]k\pi;(k+1)\pi[$
1ère étape : On a alors : $x\in\,]k\pi;(k+1)\pi[,k\in\mathbb{Z}$
On a alors

$$\sin(x)\,y'+y=0\Leftrightarrow y'+\frac{1}{\sin(x)}y=0$$

On pose :

$$a:\begin{cases}]k\pi;(k+1)\pi[\,\to\mathbb{R}\\ t\mapsto \dfrac{1}{\sin(x)}\end{cases}$$

De plus on a :

$$\forall x\in\,]k\pi;(k+1)\pi[,\int\frac{1}{\sin(x)}dx=\int\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(\int\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}dx+\int\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}dx\right)$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left(\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right)$$

On pose :

$$A:\begin{cases}]k\pi;(k+1)\pi[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right) \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\sin(x)\,y' + y = 0 \text{ et } x \in]k\pi;(k+1)\pi[\iff \exists \lambda_k \in \mathbb{R}, \forall x \in]k\pi;(k+1)\pi[, y(x) = \lambda_k e^{-\frac{1}{2}\ln\left(\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right)} = \frac{\lambda_k}{\sqrt{\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|}}$$

$2^{\text{ième}}$ étape : On étudie les raccordements

Il faut à présent étudier les problèmes de raccordement sur $\mathbb{R}$ car $(E_1): \sin(x)\,y' + y = 0$ n'a pas de valeur interdite !

On sait que :

$$\lim_{x \to 2k\pi} \frac{\lambda_k}{\sqrt{\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|}} = \begin{cases} 0 \text{ si } \lambda_k = 0 \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}$$

On en déduit donc que pour avoir une solution définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, on doit avoir :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \lambda_k = 0$$

Ainsi seule la solution $y: x \mapsto 0$ est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$.

2) On sait que $t(t-1) \neq 0 \iff t \in \{0;1\}$

$1^{\text{ère}}$ étape : On a alors : $t \notin \{0;1\}$

On a alors

$$t(t-1)y'(t) + (2t-1)y(t) = 0 \iff y' + \frac{2t-1}{t^2-t}y = 0$$

On pose :

$$a:\begin{cases}]-\infty;0[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{2t-1}{t^2-t} \end{cases}$$

De plus on a :

$$\forall t < 0, \int \frac{2t-1}{t^2-t}dt = \ln(t^2-t)$$

On en déduit donc que :

$$t(t-1)y'(t) + (2t-1)y(t) = 0 \text{ et } t < 0 \iff \exists \lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall t < 0, y(t) = \lambda_1 e^{-\ln(t^2-t)} = \frac{\lambda_1}{t^2-t}$$

$$t(t-1)y'(t) + (2t-1)y(t) = 0 \text{ et } t \in]0;1[\iff \exists \lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall t \in]0;1[, y(t) = \lambda_2 e^{-\ln(t-t^2)} = \frac{-\lambda_2}{t^2-t}$$

$$t(t-1)y'(t) + (2t-1)y(t) = 0 \text{ et } t > 1 \iff \exists \lambda_3 \in \mathbb{R}, \forall t > 1, y(t) = \lambda_3 e^{-\ln(t^2-t)} = \frac{\lambda_3}{t^2-t}$$

$2^{\text{ième}}$ étape : On étudie les raccordements

Il faut à présent étudier les problèmes de raccordement sur $\mathbb{R}$ car $(E_2): t(t-1)y'(t) + (2t-1)y(t) = 0$ n'a pas de valeur interdite !

On sait que :

$$\lim_{x \to 0^-} \left|\frac{\lambda_1}{t^2-t}\right| = \begin{cases} 0 \text{ si } \lambda_1 = 0 \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left|\frac{\lambda_2}{t^2-t}\right| = \begin{cases} 0 \text{ si } \lambda_2 = 0 \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \left|\frac{\lambda_3}{t^2-t}\right| = \begin{cases} 0 \text{ si } \lambda_3 = 0 \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}$$

On en déduit donc que pour avoir une solution définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, on doit avoir :

$$\forall k \in \{1,2,3\}, \lambda_k = 0$$

Ainsi seule la solution $y: x \mapsto 0$ est solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$.

3) $1^{\text{ère}}$ étape : On a alors : $t < 0$

On a alors :

$$ty'(t) - 2y(t) = 0 \iff y' - \frac{2}{t}y = 0$$

On pose :

$$a:\begin{cases}]-\infty;0[\to \mathbb{R} \\ t\mapsto -\dfrac{2}{t} \end{cases}$$

De plus on a :

$$\forall t<0, \int \frac{2}{t}dt = 2\ln(-t)$$

On en déduit donc que :

$$ty'(t)-2y(t)=0 \text{ et } t<0 \Leftrightarrow \exists \lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall t<0, y(t)=\lambda_1 e^{2\ln(-t)}=\lambda_1 t^2$$
$$ty'(t)-2y(t)=0 \text{ et } t>0 \Leftrightarrow \exists \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall t>0, y(t)=\lambda_2 e^{2\ln(t)}=\lambda_2 t^2$$

2ième étape : On étudie les raccordements

Il faut à présent étudier les problèmes de raccordement sur $\mathbb{R}$ car $(E_3): ty'(t)-2y(t)=0$ n'a pas de valeur interdite !
On doit avoir un raccordement où la fonction est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Soit y une solution de (E_3) sur $\mathbb{R}$. On sait alors que :

$$y:\begin{cases} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ t\mapsto \begin{cases} \lambda_1 t^2 \text{ si } t<0 \\ \lambda_2 t^2 \text{ si } t>0 \\ y(0)=? \end{cases} \end{cases}$$

1) On étudie les valeurs possibles pour $y(0)$
On sait que :

$$\lim_{x\to 0^-} \lambda_1 t^2 = 0 = \lim_{t\to 0^+} \lambda_2 t^2$$

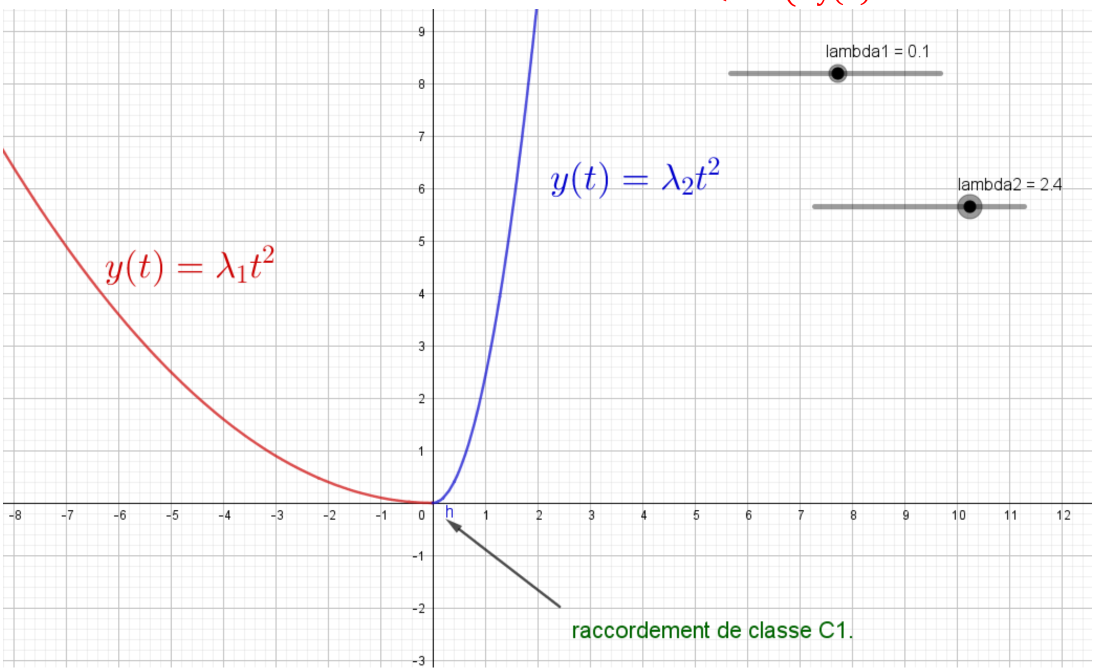
On en déduit donc que pour avoir une solution définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, on doit avoir $y(0)=0$.
2) On étudie si la fonction suivante est de classe $\mathcal{C}^1$.
On a :

$$y:\begin{cases} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ t\mapsto \begin{cases} \lambda_1 t^2 \text{ si } t<0 \\ \lambda_2 t^2 \text{ si } t>0 \\ y(0)=0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{y(t)-y(0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \lambda_2 t = 0 = \lim_{t\to 0^-} \frac{y(t)-y(0)}{t}$$

On en déduit donc que $y \in C^1(\mathbb{R})$ et $y'(0)=0$
On en déduit donc que :

$$(E_3): ty'(t)-2y(t)=0 \Leftrightarrow \exists (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2, y:\begin{cases} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ t\mapsto \begin{cases} \lambda_1 t^2 \text{ si } t<0 \\ \lambda_2 t^2 \text{ si } t>0 \\ y(0)=0 \end{cases} \end{cases}$$



Partie B.1 : Avec second membre

Exercice B.1 : Résoudre les équations différentielles suivantes sur leur domaine de validité :

$(E_1): y' + 3y = 6 \qquad (E_2): y'(t) + ty(t) = t \qquad (E_3): y'(t) + y(t) = 2e^t + 4\sin(t) + 3\cos(t)$

1) **a) On résout : $(E_0): y' + 2y = 0$**

On sait que $y' + 2y = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda e^{-2x}$

b) On cherche une solution particulière de $y' + 2y = 6$

On pose $y_p : x \mapsto 3$. On a alors $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, y_p'(t) + 2y_p(t) = 6$$

Donc y_p est une solution particulière de $y' + 2y = 6$.

c) On additionne

$$y' + 2y = 6 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda e^{-2x} + 3$$

---

2) **a) On résout : $(E_0): y' + ty = 0$**

On sait que $y' + ty = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda e^{-\frac{t^2}{2}}$

b) On cherche une solution particulière de $y' + ty = t$

On pose $y_p : t \mapsto 1$. On a alors $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y_p'(t) + ty_p(t) = t$$

Donc y_p est une solution particulière de $y' + ty = t$.

c) On additionne

$$y' + ty = t \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \lambda e^{-\frac{t^2}{2}} + 1$$

---

3) **a) On résout : $(E_0): y' + y = 0$**

On sait que $y' + y = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \lambda e^{-t}$

b) On cherche une solution particulière de $y' + y = 2e^t + 4\sin(t) + 3\cos(t)$

On applique le principe de superposition.

1) On cherche une solution particulière de $y' + y = 2e^t$

On pose $y_p : t \mapsto e^t$. On a alors $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y_p'(t) + y_p(t) = 2e^t$$

Donc y_p est une solution particulière de $y' + y = 2e^t$.

2) On cherche une solution particulière de $y' + y = 4\sin(t) + 3\cos(t)$

On pose :

$$y_{a,b} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto a\cos(t) + b\sin(t) \end{cases}$$

On a alors $y_{a,b} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y'(x) + y(x) = \big(-a\sin(t) + b\cos(t)\big) + \big(a\cos(t) + b\sin(t)\big)$$

On en déduit donc que :

$${y_{a,b}}' + y_{a,b} = 4\sin(t) + 3\cos(t) \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ b - a = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{7}{2} \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$y_{-\frac{1}{2},\frac{7}{2}} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto -\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{7}{2}\sin(t) \end{cases}$$

Est solution particulière de $y' + y = 4\sin(t) + 3\cos(t)$

3) On additionne les deux solutions particulières

On en déduit donc que la fonction définie par :

$$y\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^t - \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{7}{2}\sin(t) \end{cases}$$

Est solution particulière de $y' + y = 2e^t + 4\sin(t) + 3\cos(t)$

c) On additionne

$$y' + y = 2e^t + 4\sin(t) + 3\cos(t) \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \lambda e^{-t} + e^t - \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{7}{2}\sin(t)$$

Exercice B.2 : Résoudre les équations différentielles suivantes sur leur domaine de validité :

$(E_1): y' + y = xe^x\cos(x)$ $(E_2): y'(t) + 2iy(t) = e^{it}$ $(E_3): y' - y\tan(x) = \cos^2(x)$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

1) Ici le domaine de validité est $\mathbb{R}$.

3) **a) On résout : $(E_0): y' + y = 0$**

On sait que $y' + y = 0 \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda e^{-x}$

b) On cherche une solution particulière de $y' + y = xe^x\cos(x)$

On peut le faire de deux méthodes.

Méthode 1 : Avec les complexes

On sait d'après les formule d'Euler que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \frac{e^{ix}}{2} + \frac{e^{-ix}}{2}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, xe^x\cos(x) = \frac{x}{2}e^{(1+i)x} + \frac{x}{2}e^{(1-i)x}$$

On applique le principe de superposition.

1) On cherche une solution particulière de $y' + y = \frac{x}{2}e^{(1+i)x}$

On pose :

$$y_{a,b}: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto (ax+b)e^{(1+i)x} \end{cases}$$

On a alors $y_{a,b} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, y'_{a,b}(x) + y_{a,b}(x) &= \big(a + (1+i)(ax+b)\big)e^{(1+i)x} + (ax+b)e^{(1+i)x} \\ &= \big((2+i)ax + (2b + a + ib)\big)e^{(1+i)x}\end{aligned}$$

On identifie :

$$\begin{cases} (2+i)a = \frac{1}{2} \\ 2b + a + ib = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2-i}{10} \\ b = -\frac{a}{2+i} = -(2-i)\left(\frac{2-i}{50}\right) = -\frac{3}{50} + \frac{4}{50}i \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$y_{a,b}: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \left(\frac{2-i}{10}x - \frac{3}{50} + \frac{4}{50}i\right)e^{(1+i)x} \end{cases}$$

Est solution particulière de $y' + y = \frac{x}{2}e^{(1+i)x}$.

2) On cherche une solution particulière de $y' + y = \frac{x}{2}e^{(1-i)x}$

On pose :

$$y_{a,b}: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto (ax+b)e^{(1-i)x} \end{cases}$$

On a alors $y_{a,b} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, y'_{a,b}(x) + y_{a,b}(x) &= \big(a + (1-i)(ax+b)\big)e^{(1-i)x} + (ax+b)e^{(1-i)x} \\ &= \big((2-i)ax + (2b + a - ib)\big)e^{(1-i)x}\end{aligned}$$

On identifie :

$$\begin{cases} (2-i)a = \frac{1}{2} \\ 2b + a - ib = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2+i}{10} \\ b = -\frac{a}{2+i} = -(2-i)\left(\frac{2-i}{25}\right) = -\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i \end{cases}$$

On en déudit donc que :

$$y_{a,b}:\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \left(\frac{2-i}{10}x - \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i\right)e^{(1-i)x} \end{cases}$$

Est solution particulière de $y' + y = \frac{x}{2}e^{(1-i)x}$.

3) On rassemble

On en déduit qu'une solution particulière de $\mathbf{y' + y = xe^x\cos(x)}$ **est :**

$$\left(\frac{2-i}{10}x - \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i\right)e^{(1-i)x} + \left(\frac{2-i}{10}x - \frac{3}{50} + \frac{4}{50}i\right)e^{(1+i)x}$$

$$= \left(\frac{2-i}{10}x - \frac{3}{50} + \frac{4}{50}i\right)e^{(1+i)x} + \overline{\left(\frac{2-i}{10}x - \frac{3}{50} + \frac{4}{50}i\right)e^{(1+i)x}}$$

$$= 2\mathcal{R}e\left(\left(\frac{2-i}{10}x - \frac{3}{50} + \frac{4}{50}i\right)e^{(1+i)x}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{5}x - \frac{3}{25}\right)\cos(x)\,e^x + \left(\frac{1}{5}x - \frac{4}{25}\right)\sin(x)\,e^x$$

Méthode 2 : Avec la variation de la constante

On pose $f: x \mapsto \lambda(x)e^{-x}$ avec $\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(x) = \lambda'(x)e^{-x} - \lambda(x)e^{-x} + \lambda(x)e^{-x} = \lambda'(x)e^{-x}$$

On souhaite trouver $\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ tel que :

$$\lambda'(x)e^{-x} = xe^x\cos(x) \Longrightarrow \lambda'(x) = xe^{2x}\cos(x)$$

On cherche alors une pirmitive de $x \mapsto xe^{2x}\cos(x)$

Là encore on peut proceder de deux façons différentes.

Méthode 1 : Avec les complexes et une IPP

On sait que :

$$\int xe^{2x}\cos(x)\,dx = \mathcal{R}e\left(\int xe^{(2+i)x}dx\right)$$

Or on a :

$$\int xe^{(2+i)x}dx = \left[\frac{x}{2+i}e^{(2+i)x}\right] - \frac{1}{2+i}\int e^{(2+i)x}dx$$

$$= \frac{x}{2+i}e^{(2+i)x} - \frac{1}{3+4i}e^{(2+i)x}$$

$$= \left(\frac{x}{5}(2-i) - \frac{3-4i}{25}\right)e^{ix}e^{2x}$$

$$= \left(\left(\frac{2}{5}x - \frac{3}{25}\right) - i\left(\frac{x}{5} - \frac{4}{25}\right)\right)e^{ix}e^{2x}$$

On en déduit donc que :

$$\int xe^{2x}\cos(x)\,dx = \mathcal{R}e\left(\left(\left(\frac{2}{5}x - \frac{3}{25}\right) - i\left(\frac{x}{5} - \frac{4}{25}\right)\right)e^{ix}e^{2x}\right) = \left(\frac{2}{5}x - \frac{3}{25}\right)\cos(x)\,e^{2x} + \left(\frac{x}{5} - \frac{4}{25}\right)\sin(x)\,e^{2x}$$

Méthode 2 : Sans les complexes et une doublé IPP

On pose :

$$u(x) = x \text{ et } v'(x) = e^{2x}\cos(x)$$

On sait que :

$$\int xe^{2x}\cos(x)\,dx = \int u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)] = \int u'(x)v(x)dx$$

On cherche donc une primitive de $v' : x \mapsto e^{2x}\cos(x)$

On sait que :

$$v(x) = \int e^{2x}\cos(x)\,dx = [e^{2x}\sin(x)] - 2\int e^{2x}\sin(x)\,dx$$
$$= e^{2x}\sin(x) - 2([-e^{2x}\cos(x)] + 2\int e^{2x}\cos(x)\,dx$$
$$= e^{2x}\sin(x) + 2e^{2x}\cos(x) - 4v(x)$$

On en déduit donc que :

$$v(x) = \frac{1}{5}e^{2x}\sin(x) + \frac{2}{5}e^{2x}\cos(x)$$

On en déduit donc que :

$$\int xe^{2x}\cos(x)\,dx = \left[x\left(\frac{1}{5}e^{2x}\sin(x) + \frac{2}{5}e^{2x}\cos(x)\right)\right] - \int\left(\frac{1}{5}e^{2x}\sin(x) + \frac{2}{5}e^{2x}\cos(x)\right)dx$$
$$= x\left(\frac{1}{5}e^{2x}\sin(x) + \frac{2}{5}e^{2x}\cos(x)\right) - \frac{1}{5}\int e^{2x}\sin(x)\,dx - \frac{2}{5}\int e^{2x}\cos(x)\,dx$$
$$= \left(\frac{x}{5}\sin(x) + \frac{2}{5}x\cos(x)\right)e^{2x} - \frac{2}{5}\left(\frac{1}{5}e^{2x}\sin(x) + \frac{2}{5}e^{2x}\cos(x)\right) - \frac{1}{5}\int e^{2x}\sin(x)\,dx$$

Or on sait que :

$$\int e^{2x}\sin(x)\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sin(x) - \frac{1}{2}v(x)$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x}\sin(x) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}e^{2x}\sin(x) + \frac{2}{5}e^{2x}\cos(x)\right)$$
$$= \frac{2}{5}e^{2x}\sin(x) - \frac{1}{5}e^{2x}\cos(x)$$

On en déduit donc que :

$$\int xe^{2x}\cos(x)\,dx = \left(\frac{x}{5}\sin(x) + \frac{2}{5}x\cos(x)\right)e^{2x} - \left(\frac{2}{25}\sin(x) - \frac{4}{25}\cos(x)\right)e^{2x} + \left(-\frac{2}{25}\sin(x) - \frac{1}{25}\cos(x)\right)e^{2x}$$
$$= \left(\frac{2}{5}x - \frac{3}{25}\right)\cos(x)\,e^{2x} + \left(\frac{1}{5}x - \frac{4}{25}\right)\sin(x)\,e^{2x}$$

On en déduit donc que :

$$x \mapsto \left(\frac{2}{5}x - \frac{3}{25}\right)\cos(x)\,e^{x} + \left(\frac{x}{5} - \frac{4}{25}\right)\sin(x)\,e^{x}$$

Est une solution particulière de $y' + y = xe^{x}\cos(x)$

c) On rassemble

On sait que :

$$y' + y = xe^{x}\cos(x) \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda e^{-x} + \left(\frac{2}{5}x - \frac{3}{25}\right)\cos(x)\,e^{x} + \left(\frac{x}{5} - \frac{4}{25}\right)\sin(x)\,e^{x}$$

---

a) On résout (E_0): $y'(t) + 2iy(t) = 0$

On sait que :

$$y'(t) + 2iy(t) = 0 \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}, \forall\, t \in \mathbb{R}, y(t) = \lambda e^{-2it}$$

b) On cherche une SP.

On pose :

$$f_\lambda : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \lambda e^{it} \end{cases}, \lambda \in \mathbb{C}$$

On a alors :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, f_\lambda'(t) + 2if_\lambda(t) = e^{it} \Longrightarrow 3i\lambda = 1 \Longrightarrow \lambda = -\frac{i}{3}$$

On en déduit donc que :

$$f_\lambda : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto -\dfrac{i}{3}e^{it} \end{cases}, \lambda \in \mathbb{C}$$

Est une solution particulière de $y'(t) + 2iy(t) = e^{it}$

c) On rassemble

$$y'(t) + 2iy(t) = e^{it} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \lambda e^{-2it} - \frac{i}{3}e^{it}$$

---

a) On résout (E_0): $y' - y\tan(x) = 0$

On pose :

$$a : \begin{cases} \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \tan(x) \end{cases}$$

Alors $a \in \mathcal{C}^0\left(\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\right)$ et on pose :

$$A : \begin{cases} \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\ln(\cos(x)) \end{cases}$$

On en déduit donc que

$$y' - y\tan(x) = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, y(x) = \frac{\lambda}{\cos(x)}$$

b) On cherche une SP

On utilise la variation de la constante.

On pose :

$$f_\lambda : \begin{cases} \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\lambda(x)}{\cos(x)} \end{cases}, \lambda \in \mathcal{C}^1\left(\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\right)$$

On a alors :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, f_\lambda'(x) - \tan(x)\, f_\lambda(x) = \cos^2(x) \Longrightarrow \frac{\lambda'(x)}{\cos(x)} = \cos^2(x) \Longrightarrow \lambda'(x) = \cos^3(x)$$

Il faut alors linéariser $\cos^3$. On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^3(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$$

On en déduit donc que :

$$\int \cos^3(x)\, dx = \frac{1}{12}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)$$

On en déduit donc qu'une solution particulière de $y' - y\tan(x) = \cos^2(x)$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ est :

$$f : \begin{cases} \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{12}\dfrac{\sin(3x)}{\cos(x)} + \dfrac{3}{4}\tan(x) \end{cases}$$

c) On rassemble

$$y' - y\tan(x) = \cos^2(x) \text{ sur } \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, y(t) = \frac{\lambda}{\cos(x)} + \frac{1}{12}\frac{\sin(3x)}{\cos(x)} + \frac{3}{4}\tan(x)$$

Partie C : Cauchy et problème de raccordement

Exercice C.1 : 1) Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' - \frac{2}{x^3}y = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

2) Peut-on prolonger des solutions de $y' - \frac{2}{x^3}y = 0$ sur $\mathbb{R}$?

1) On sait que l'équation différentielle doit être étudié sur $]-\infty;0[$ ou sur $]0;+\infty[$. Comme on veut de plus que $y(1) = 2$, on en déduit qu'on étudie l'équation sur $]0;+\infty[$.

a) On résout (E_0): $y' - \frac{2}{x^3}y = 0$

On pose :

$$a:\begin{cases}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{2}{x^3} \end{cases} \in \mathcal{C}^0(]0;+\infty[) \text{ et } A:\begin{cases}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x^2} \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$y' - \frac{2}{x^3}y = 0 \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}, \forall x > 0, y(x) = \lambda e^{-\frac{1}{x^2}}$$

b) On cherche la valeur de λ

On a :

$$y(1) = 2 \Longrightarrow \lambda e^{-1} = 2 \Longrightarrow \lambda = 2e$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} y' - \frac{2}{x^3}y = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \forall x > 0, y(x) = 2e^{1-\frac{1}{x^2}}$$

2) Pour avoir une solution sur $\mathbb{R}$, on doit avoir :

$$\lim_{x\to 0} \frac{y}{x^3} \in \mathbb{R}$$

On sait que :

$$y' - \frac{2}{x^3}y = 0 \Leftrightarrow \exists(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2, y(x) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x < 0 \\ \lambda_2 e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

De plus on sait que :

$$\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

On peut alors poser :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x < 0 \\ \lambda_2 e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

a) On sait que f est continue car :

$$\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

b) Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

On sait que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \times e^{-\frac{1}{x^2}} = \pm \lim_{X\to+\infty} Xe^{-X^2} = 0 \text{ (par croissance comparée)}$$

On en déduit que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

De plus on sait que :

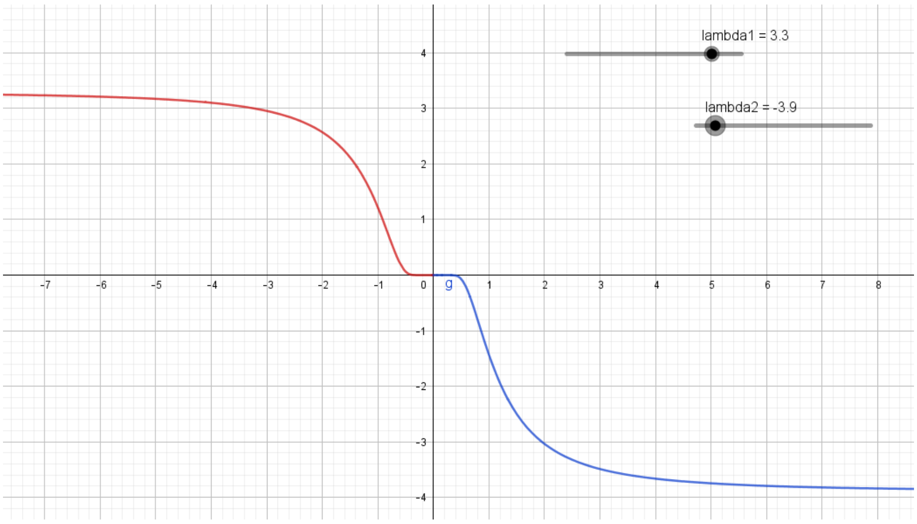
$$\forall x \neq 0, f'(x) = -\frac{2\lambda_i}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} -\frac{2\lambda_i}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} X^3e^{-X^2} = 0 = f'(0)$$

On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi l'on peut dire que l'équation différentielle $y' - \frac{2}{x^3}y = 0$ n'est « pas vraiment » prolongeable sur $\mathbb{R}$ car $\frac{1}{x^3}$ n'est pas définie en 0, par contre on peut dire que :

$$x^3y' - 2y = 0 \Leftrightarrow \exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x < 0 \\ \lambda_2 e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

On peut voir le raccordement $\mathcal{C}^1$ sur la courbe ci-dessous :



Exercice C.2 : Montrer qu'il existe une unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$xy' + y = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

1) On résout (E_0): $xy' + y = 0$

On sait que :

$$\begin{cases} xy' + y = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y' + \frac{1}{x}y = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists\lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall x > 0, y(x) = \frac{\lambda_1}{x}$$

De même on a :

$$\begin{cases} xy' + y = 0 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y' + \frac{1}{x}y = 0 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists\lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall x < 0, y(x) = \frac{\lambda_2}{x}$$

2) On cherche une solution particulière.

On utilise la variation de la constante. On pose :

$$f(x) = \frac{\lambda(x)}{x}, \lambda \in \mathcal{C}^1$$

On a alors :

$$xf'(x) + f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$
$$\Leftrightarrow \lambda'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \lambda(x) = \ln(1 + x^2)$$

On en déduit donc que :

$$f: x \mapsto \frac{\ln(1 + x^2)}{x}$$

Est une solution particulière de $xy' + y = \frac{2x}{x^2+1}$ sur chaque intervalle $I_1 =]-\infty; 0[$ et sur $I_2 =]0; +\infty[$.

3) On rassemble :

$$\begin{cases} xy' + y = \frac{2x}{x^2 + 1} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists\lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall x > 0, y(x) = \frac{\lambda_1}{x} + \frac{\ln(1 + x^2)}{x}$$

$$\begin{cases} xy' + y = \dfrac{2x}{x^2+1} \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall x < 0, y(x) = \frac{\lambda_2}{x} + \frac{\ln(1+x^2)}{x}$$

4) On étudie le raccordement

On sait que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2) - \ln(1+0)}{x-0} = \frac{2\times 0}{1+0^2} = 0 \text{ (c'est un taux de variation)}$$

De plus on sait que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$$

Ainsi pour prolonger la solution sur $\mathbb{R}$, on doit avoir $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$.

On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

On sait déjà que f est continue sur $\mathbb{R}$. Il faut montrer qu'elle est dérivable.

On sait que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln(1+x^2)}{x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

On en déduit donc que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

$$xy' + y = \frac{2x}{x^2+1} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \begin{cases} 2 - \dfrac{2\arctan(x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice C.3 : Considérons un circuit RC monté en série aux bornes d'un générateur qui délivre une tension V(t). On appelle u(t) la tension à l'instant t aux bornes du condensateur. On veut étudier la forme du signal u selon la nature de la tension V.

1) Etablir que :

$$RC\frac{du}{dt} + u = V$$

Par la suite on pose RC = 1.

2) On suppose ici que V(t) = 1V. En déduire alors la courbe représentative de u sur [0 ;3] si u(0) = 0.

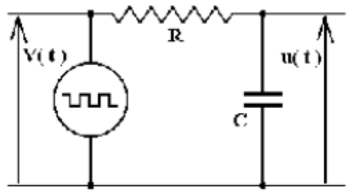


FIGURE 1 – Circuit RC en série

3) a) On suppose que le générateur délivre une tension alternative V telle que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \begin{cases} V(t) = 1 \text{ si } 2p \leq t < 2p+1 \\ V(t) = 0 \text{ si } 2p+1 \leq t < 2p+2 \end{cases}$$

Déterminer la représentation graphique de u entre $t = 0$ et $t = 3$ lorsque $u(0) = 0$.

b) On suppose que le générateur délivre une tension alternative V telle que $V(t) = 2\cos(2\pi t)$.

Déterminer la représentation graphique de u entre $t = 0$ et $t = 3$ lorsque $u(0) = 0$.

1) On utilise la loi des mailles.

On sait que :

$$V = u_C + u_R$$

Avec u_C la tension aux bornes du condensateur et u_R la tension aux bornes de la résistance.

On pose $i(t)$ l'intensité du circuit à l'instant t. On sait que :

$$u_R = Ri \text{ et } i(t) = \frac{dq}{dt} \text{ et } u_C = \frac{q}{C}$$

On en déduit donc que :

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = \frac{1}{C}i$$

On en déduit donc que :

$$u_R = RC\frac{du}{dt}$$

On en déduit donc que u vérifie l'équation différentielle suivante :

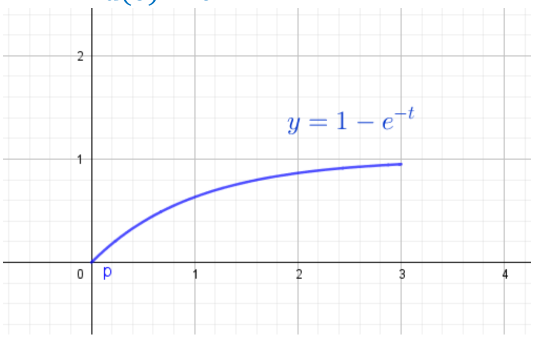
$$RC\frac{du}{dt}+u=V$$

2) On nous demande de résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases}\frac{du}{dt}+u=1\\ u(0)=0\end{cases}$$

On sait que $u(t)=1$ est une solution particulière et $t\mapsto \lambda e^{-t}$ sont les solutions de l'équation homogène. De plus on veut $u(0)=0$. On en déduit donc que :

$$\begin{cases}\frac{du}{dt}+u=1\\ u(0)=0\end{cases}\Leftrightarrow y(t)=1-e^{-t}$$



3) a) On sait que :

$$\begin{cases}\frac{du}{dt}+u=V(t)\\ u(0)=0\end{cases}\Leftrightarrow y(t)=\begin{cases}1-e^{-t}\text{ si }t\in[0;1]\\ \lambda e^{-t}\text{ si }t\in[1;2]\\ 1-\mu e^{-t}\text{ si }t\in[2;3]\end{cases}$$

Si on suppose que la tension est continue, on a :

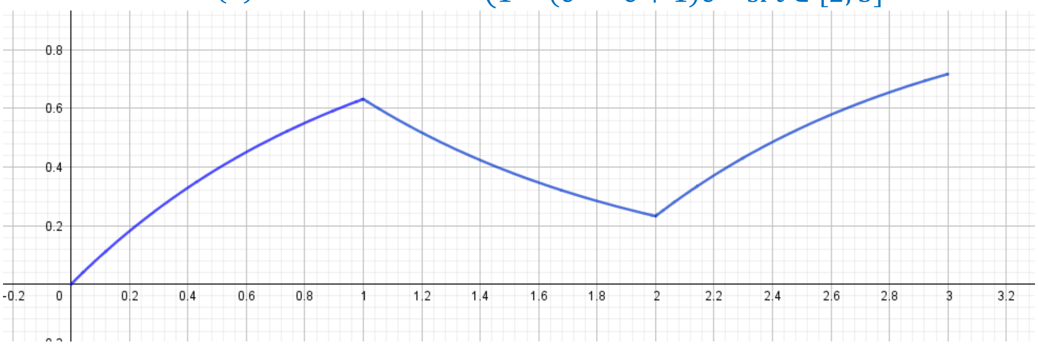
$$y(1)=1-\frac{1}{e}=\frac{\lambda}{e}\Longrightarrow\lambda=e-1$$

De plus on a

$$y(2)=(e-1)e^{-2}=1-\mu e^{-2}\Longrightarrow e-1=e^2-\mu\Longrightarrow\mu=e^2-e+1$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases}\frac{du}{dt}+u=V(t)\\ u(0)=0\end{cases}\Leftrightarrow y(t)=\begin{cases}1-e^{-t}\text{ si }t\in[0;1]\\ (e-1)e^{-t}\text{ si }t\in[1;2]\\ 1-(e^2-e+1)e^{-t}\text{ si }t\in[2;3]\end{cases}$$



b) On veut résoudre :

$$\begin{cases}\frac{du}{dt}+u=2\cos(2\pi t)\\ u(0)=0\end{cases}$$

On cherche une solution particulière. On pose $u(t)=a\cos(2\pi t)+b\sin(2\pi t)$

On a alors :

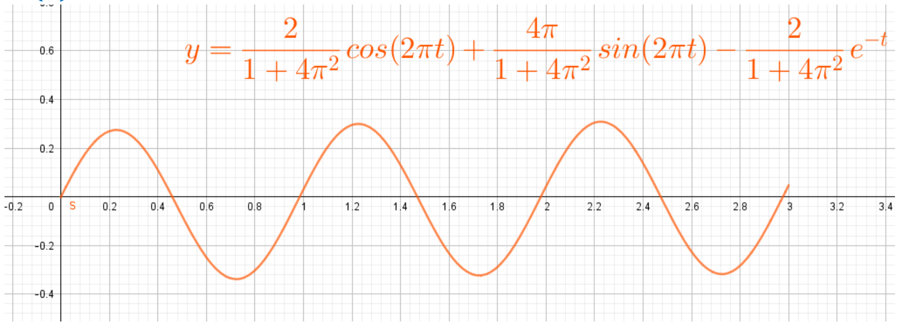
$$u'(t)+u(t)=(2\pi b+a)\cos(2\pi t)+(b-2\pi a)\sin(2\pi t)$$

On identifie :

$$\begin{cases}2\pi b + a = 2\\ b - 2\pi a = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2}{1+4\pi^2}\\ b = \dfrac{4\pi}{1+4\pi^2}\end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt} + u = 2\cos(2\pi t)\\ u(0) = 0\end{cases} \Leftrightarrow y(t) = \frac{2}{1+4\pi^2}\cos(2\pi t) + \frac{4\pi}{1+4\pi^2}\sin(2\pi t) - \frac{2}{1+4\pi^2}e^{-t}$$



Partie D : Equations homogènes du second ordre

Exercice A.1 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

$(E_1): y'' + 2y' + 4y = 0$ dans $\mathbb{R}$ $\qquad$ $(E_2): y'' + 2y' + 4y = 0$ dans $\mathbb{C}$

1) a) On résout : $(E_0): y'' + 2y' + 4y = 0$

On résout $(E_q): r^2 + 2r + 4 = 0 \Longrightarrow \Delta = 4 - 16 = -12 = (2\sqrt{3}i)^2$

On en déduit donc que :

$$r^2 + 2r + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = 1 - \sqrt{3}i\\ \text{ou}\\ r_2 = 1 + \sqrt{3}i\end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$y'' + 2y' + 4y = 0 \Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, y(t) = \left(A\cos(\sqrt{3}t) + B\sin(\sqrt{3}t)\right)e^t$$

2) On résout : $(E_0): y'' + 2y' + 4y = 0$

On résout $(E_q): r^2 + 2r + 4 = 0 \Longrightarrow \Delta = 4 - 16 = -12 = (2\sqrt{3}i)^2$

On en déduit donc que :

$$r^2 + 2r + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = 1 - \sqrt{3}i\\ \text{ou}\\ r_2 = 1 + \sqrt{3}i\end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$y'' + 2y' + 4y = 0 \Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{C}^2, y(t) = Ae^{(1+\sqrt{3}i)t} + Be^{(1-\sqrt{3}i)t}$$

Exercice A.2 : Résoudre :

$$y'' - y' + (1+i)y = 0$$

On résout $(E_q): r^2 - r + (1+i) = 0 \Longrightarrow \Delta = -3 - 4i = (1-2i)^2$

On en déduit donc que :

$$r^2 - r + (1+i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = 1 - i\\ \text{ou}\\ r_2 = i\end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$y'' - y' + (1+i)y = 0 \Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{C}^2, y(t) = Ae^{(1-i)t} + Be^{it}$$

Exercice A.3 : Résoudre :

$$\begin{cases} y'' + 2iy = 1 \\ y(0) = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0 \end{cases}$$

1) On résout l'équation homogène $(E_0): y'' + 2iy = 0$

On sait que $r^2 + 2i = 0 \Leftrightarrow r^2 = -2i = (1-i)^2 \Leftrightarrow r = 1 - i$ ou $r = -1 + i$

On en déduit donc que :

$$y'' + 2iy = 0 \Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{C}^2, y(t) = Ae^{(1-i)t} + Be^{(-1+i)t}$$

2) On cherche une solution particulière

On pose $y: t \mapsto \frac{1}{2i}$. On a alors $\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) + 2iy(t) = 1$.

3) On additionne

$$y'' + 2iy = 1 \Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{C}^2, y(t) = Ae^{(1-i)t} + Be^{(-1+i)t} + \frac{1}{2i}$$

4) On ajoute les conditions initiales.

$$y(0) = A + B + \frac{1}{2i} = 1 \Leftrightarrow A + B = 1 - \frac{1}{2}i$$

De plus on sait que :

$$\lim_{x\to+\infty} \left|e^{(-1+i)x}\right| = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x\to+\infty} e^{(-1+i)x} = 0$$

De plus si $A \neq 0$ on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \left|Ae^{(1-i)x}\right| = |A| \lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0 \Longrightarrow A = 0$$

On en déduit donc que ce problème de Cauchy est impossible car :

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0 \Longrightarrow A = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} y(x) = -\frac{1}{2}i$$

Partie E : Equations homogènes du second ordre avec second membre

Exercice E.1 : Résoudre :

$(E_1): y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$ $\quad$ $(E_2): y'' + 2y' + y = \operatorname{sh}(x)$ $\quad$ $(E_3): y'' - 3y' + 2y = e^{x}\cos(x)$

$(E_4): y'' + 4y = \sin(x) + \sin(2x)$ $\quad$ $(E_5): y'' + y = \cos^3(x)$

1) On résout l'équation homogène $(E_0): y'' - 4y' + 4y = 0$

On sait que $r^2 - 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow (r-2)^2 = 0 \Leftrightarrow r = 2$

On en déduit donc que :

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{C}^2, y(x) = (Ax + B)e^{2x}$$

2) On cherche une solution particulière

Ici comme 2 est racine double de l'équation caractéristique, on va poser :

$$f_a: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ax^2e^{2x} \end{cases}$$

On a alors $f_a \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f_a'(x) = a(2x^2 + 2x)e^{2x} \\ f_a''(x) = a(4x + 2 + 4x^2 + 4x)e^{2x} = a(4x^2 + 8x + 2)e^{2x} \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \Leftrightarrow 2ae^{2x} = e^{2x} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

On en déduit donc que : $x \mapsto \frac{1}{2}x^2e^{2x}$ est solution particulière.

3) On additionne

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \Leftrightarrow \exists(A,B) \in \mathbb{C}^2, y(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + Ax + B\right)e^{2x}$$

---

1) On résout l'équation homogène (E_0): $y'' + 2y' + y = 0$

On sait que $r^2 + 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r+1)^2 = 0 \Leftrightarrow r = -1$

On en déduit donc que :

$$y'' + 2y' + y = 0 \Leftrightarrow \exists(A,B) \in \mathbb{C}^2, y(x) = (Ax+B)e^{-x}$$

2) On cherche une solution particulière

On va utiliser le principe de superposition

1er cas : SP de $y'' + 2y' + y = \frac{1}{2}e^x$

On sait que $f: x \mapsto \frac{1}{8}e^x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et :

$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + 2f'(x) + f(x) = \frac{1}{8}e^x + \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{8}e^x = \frac{1}{2}e^x$

2ième cas : SP de $y'' + 2y' + y = -\frac{1}{2}e^{-x}$

Ici comme -1 est racine double de l'équation caractéristique, on va poser :

$$f_a: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ax^2e^{-x} \end{cases}$$

On a alors $f_a \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f_a'(x) = a(-x^2 + 2x)e^{-x} \\ f_a''(x) = a(-2x + 2 + x^2 - 2x)e^{2x} = a(x^2 - 4x + 2)e^{2x} \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$y'' + 2y' + y = -\frac{1}{2}e^{-x} \Leftrightarrow 2ae^{-x} = -\frac{1}{2}e^{-x} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$$

On en déduit donc que : $x \mapsto -\frac{1}{4}x^2e^{-x}$ est solution particulière de $y'' + 2y' + y = -\frac{1}{2}e^{-x}$

On additionne les deux SP

$$x \mapsto \frac{1}{8}e^x - \frac{1}{4}x^2e^{-x}$$

Est solution particulière de $y'' + 2y' + y = \mathrm{sh}(x)$

3) On additionne

$$y'' + 2y' + y = \mathrm{sh}(x) \Leftrightarrow \exists(A,B) \in \mathbb{C}^2, y(x) = \left(-\frac{1}{4}x^2 + Ax + B\right)e^{-x} + \frac{1}{8}e^x$$

---

1) On résout l'équation homogène (E_0): $y'' - 3y' + 2y = 0$

On sait que $r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow (r-1)(r-2) = 0 \Leftrightarrow r = 1$ ou $r = 2$

On en déduit donc que :

$$\mathbf{y'' - 3y' + 2y = 0} \Leftrightarrow \exists(A,B) \in \mathbb{C}^2, y(x) = Ae^x + Be^{2x}$$

2) On cherche une solution particulière

On peut chercher une solution particulière de plusieurs façons différentes.

Méthode 1 : Principe de superposition et Euler

On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x\cos(x) = \frac{1}{2}e^{(1+i)x} + \frac{1}{2}e^{(1-i)x}$$

1er cas : SP de $y'' + 2y' + y = \frac{1}{2}e^{(1+i)x}$

On sait que $f_\lambda: x \mapsto \lambda e^{(1+i)x} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = \lambda((1+i)^2 - 3(1+i) + 2)e^{(1+i)x} = \lambda(-1-i)e^{(1+i)x}$$

On a alors :

$$\lambda = -\frac{1}{2(1+i)} = -\frac{2-2i}{8} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$$

Ainsi la fonction $f_{-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i}: x \mapsto \left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right)e^{(1+i)x}$ est SP de $y'' + 2y' + y = \frac{1}{2}e^{(1+i)x}$

$2^{\text{ième}}$ cas : SP de $y'' + 2y' + y = \frac{1}{2}e^{(1-i)x}$

On sait que $f_\lambda: x \mapsto \lambda e^{(1-i)x} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = \lambda((1-i)^2 - 3(1-i) + 2)e^{(1-i)x} = \lambda(-1+i)e^{(1-i)x}$$

On a alors :

$$\lambda = -\frac{1}{2(1-i)} = -\frac{1+i}{4} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$$

Ainsi la fonction $f_{-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i}: x \mapsto \left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i\right)e^{(1-i)x}$ est SP de $\mathbf{y'' + 2y' + y} = \frac{1}{2}e^{(1-i)x}$

On additionne les deux SP

$$x \mapsto \left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right)e^{(1+i)x} + \left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i\right)e^{(1-i)x}$$

Est solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = e^x\cos(x)$

Or on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right)e^{(1+i)x} + \left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i\right)e^{(1-i)x} = 2\mathcal{Re}\left(\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right)e^{(1+i)x}\right) = \left(-\frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x)\right)e^x$$

Méthode 2 : On cherche directement une SP

On pose :

$$f_{a,b}: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \big(a\cos(x) + b\sin(x)\big)e^x \end{cases}$$

On sait que $f_{a,b} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'_{a,b}(x) = (a+b)\cos(x)e^x + (-a+b)\sin(x)e^x \\ f''_{a,b}(x) = (a+b-a+b)\cos(x)e^x + (-a+b-a-b)\sin(x)e^x = (2b)\cos(x)e^x - 2a\sin(x)e^x \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''_{a,b}(x) - 3f'_{a,b}(x) + 2f_{a,b}(x) = (2b - 3a - 3b + 2a)\cos(x)e^x + (-2a + 3a - 3b + 2b)\sin(x)e^x$$
$$= (-a-b)\cos(x)e^x + (a-b)\sin(x)e^x$$

On identifie :

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = -\frac{1}{2}$$

On en déduit donc que :

$$x \mapsto \left(-\frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x)\right)e^x$$

Est solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = e^x\cos(x)$

3) On additionne

$y'' - 3y' + 2y = e^x\cos(x) \Leftrightarrow \exists(A,B) \in \mathbb{C}^2, y(x) = \exists(A,B) \in \mathbb{C}^2, y(x) = Ae^x + Be^{2x} - \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x))e^x$

---

1) On résout l'équation homogène (E_0): $y'' + 4y = 0$

On sait que $r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow r = 2i$ ou $r = -2i$

On en déduit donc que :

$$y'' + 4y = 0 \Leftrightarrow \exists(A,B) \in \mathbb{C}^2, y(x) = Ae^{2ix} + Be^{-2ix}$$

Remarque : Si les solutions sont réelles (ici rien ne nous permet de le dire !), nous pouvons utiliser un résultat bien connu en physique :

$$y'' + \omega^2 y = 0 \Leftrightarrow \exists(A,B) \in \mathbb{R}^2, y(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

2) On cherche une solution particulière

On va utiliser le principe de superposition

1^{er} cas : SP de $y'' + 4y = \sin(x)$

On sait que $f: x \mapsto \frac{1}{3}\sin(x) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et :

$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + 4f(x) = -\frac{1}{3}\sin(x) + \frac{4}{3}\sin(x) = \sin(x)$

$2^{\text{ième}}$ cas : SP de $y'' + 4y = \sin(2x)$

Ici comme $x \mapsto \sin(2x)$ est solution de l'équation caractéristique, on va poser :

$$f_a: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ax\cos(2x) \end{cases}$$

On a alors $f_a \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f_a'(x) = a\cos(2x) - 2ax\sin(2x) \\ f_a''(x) = -2\,a\sin(2x) - 2\,a\sin(2x) - 4ax\cos(2x) \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$y'' + 4y = \sin(2x) \Leftrightarrow -4a = 1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$$

On en déduit donc que : $x \mapsto -\frac{1}{4}x\cos(2x)$ est solution particulière de $y'' + 4y = -\frac{1}{2}e^{-x}$

On additionne les deux SP

$$x \mapsto \frac{1}{3}\sin(x) - \frac{1}{4}x\cos(2x)$$

Est solution particulière de $y'' + 4y = \sin(x) + \sin(2x)$

3) On additionne

$$y'' + 4y = \sin(x) + \sin(2x) \Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{C}^2, y(x) = Ae^{2ix} + Be^{-2ix} + \frac{1}{3}\sin(x) - \frac{1}{4}x\cos(2x)$$

---

1) On résout l'équation homogène (E_0): $y'' + y = 0$

On sait que $r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r = i$ ou $r = -i$

On en déduit donc que :

$$y'' + y = 0 \Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{C}^2, y(x) = Ae^{ix} + Be^{-ix}$$

Remarque : Si les solutions sont réelles (ici rien ne nous permet de le dire !), nous pouvons utiliser un résultat bien connu en physique :

$$y'' + \omega^2 y = 0 \Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, y(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

2) On cherche une solution particulière

On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^3(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$$

On va utiliser le principe de superposition

1^{er} cas : SP de $y'' + y = \frac{1}{4}\cos(3x)$

On sait que $f: x \mapsto -\frac{1}{32}\cos(3x) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et :

$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(x) = \frac{9}{32}\cos(3x) - \frac{1}{32}\cos(3x) = \frac{1}{4}\cos(3x)$

$2^{\text{ième}}$ cas : SP de $y'' + y = -\frac{3}{4}\cos(x)$

Ici comme $x \mapsto \cos(x)$ est solution de l'équation caractéristique, on va poser :

$$f_a: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ax\sin(x) \end{cases}$$

On a alors $f_a \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f_a'(x) = a\sin(x) + ax\cos(x) \\ f_a''(x) = a\cos(x) + a\cos(x) - ax\sin(x) \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$y'' + y = \sin(2x) \Leftrightarrow 2a = \frac{3}{4} \Leftrightarrow a = \frac{3}{8}$$

On en déduit donc que : $x \mapsto \frac{3}{8}x\sin(x)$ est solution particulière de $y'' + y = \frac{3}{4}\cos(x)$

On additionne les deux SP

$$x \mapsto -\frac{1}{32}\cos(3x) + \frac{3}{8}x\sin(x)$$

Est solution particulière de $y'' + y = \cos^3(x)$

3) On additionne

$$y'' + y = \cos^3(x) \Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{C}^2, y(x) = Ae^{ix} + Be^{-ix} - \frac{1}{32}\cos(3x) + \frac{3}{8}x\sin(x)$$

Exercice E.2 : Résoudre :

$$\begin{cases} y'' - 2y' - y = x^2 - x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

a) On résout : $(E_0): y'' - 2y' - y = 0$

On résout $(E_q): r^2 - 2r - 1 = 0 \Longrightarrow \Delta = 4 + 4 = \sqrt{8}$

On en déduit donc que :

$$r^2 - 2r - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 - \sqrt{2} \\ \text{ou} \\ r = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

On sait que $y'' - 2y' - y = 0 \Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = Ae^{(1-\sqrt{2})x} + Be^{(1+\sqrt{2})x}$

b) On cherche une solution particulière de $y'' - 2y' - y = x^2 - x$

On pose

$$y_{a,b,c}: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ax^2 + bx + c \end{cases}$$

On a alors $y_{a,b,c} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, y_{a,b,c}''(x) - 2y_{a,b,c}'(x) - y_{a,b,c}(x) = x^2 - x$$
$$\Leftrightarrow 2a - 2(2ax + b) - (ax^2 + bx + c) = x^2 - x$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ -4a - b = -1 \\ 2a - 2b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \\ c = -12 \end{cases}$$

Donc $y: x \mapsto -x^2 + 5x - 12$ est une solution particulière de $y'' - 2y' - y = x^2 - x$.

c) On additionne

$$y'' - 2y' - y = x^2 - x \Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = Ae^{(1-\sqrt{2})x} + Be^{(1+\sqrt{2})x} - x^2 + 5x - 12$$

d) On trouve A et B grâce aux conditions initiales

On a :

$$\begin{cases} y(0) = A + B - 12 = 0 \\ y'^{(0)} = (1-\sqrt{2})A + (1+\sqrt{2})B + 5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 6 - 4\sqrt{2} \\ B = 6 + 4\sqrt{2} \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} y'' - 2y' - y = x^2 - x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = (6 - 4\sqrt{2})e^{(1-\sqrt{2})x} + (6 + 4\sqrt{2})e^{(1+\sqrt{2})x} - x^2 + 5x - 12$$

Exercice E.3 : Résoudre :

$$y'' + y = |x| + 1$$

1) On résout l'équation homogène $(E_0): y'' + y = 0$

On sait que $r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r = i$ ou $r = -i$

On en déduit donc que :

$$y'' + y = 0 \Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{C}^2, y(x) = Ae^{ix} + Be^{-ix}$$

Remarque : Si les solutions sont réelles (ici rien ne nous permet de le dire !), nous pouvons utiliser un résultat bien connu en physique :

$$y'' + \omega^2 y = 0 \Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, y(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

2) On cherche une solution particulière

On peut avoir une solution particulière sur $]0; +\infty[$ en posant $y_p: x \mapsto x + 1$ et de même sur $]-\infty; 0[$ en posant $y_p: x \mapsto -x + 1$. Cependant cette solution ne peut être raccorder sur $\mathbb{R}$ car la fonction sur $\mathbb{R}$ doit être deux fois dérivable donc au minimum de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Il faut alors trouver une solution particulière dérivable (et même deux fois dérivables !). On pose :

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\begin{cases}x+1 \text{ si } x>0\\ -x+1+2\sin(x) \text{ si } x<0\\ 1 \text{ si } x=0\end{cases}\end{cases}$$

On vérifie facilement que f est continue sur $\mathbb{R}$.
De plus on a :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-1}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x}{x}=1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f(x)-1}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{-x+2\sin(x)}{x}=-1+2\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

On peut donc en déduire que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=1$.
De plus on a :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f''(x)=0=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}f''(x)$$

On en déduit donc que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On en déduit donc que f est une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$.

3) On additionne

On a :

$$y''+y=|x|+1\Leftrightarrow \exists(A,B)\in\mathbb{C}^2, y(x)=Ae^{ix}+Be^{-ix}+f(x)$$

Exercice E.4 : Soit x et y des fonctions de la variations t. Résoudre les systèmes différentiels suivant :

1) $\begin{cases}x'=y+t^2\\ y'=x-t^2\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x'=-7x+y+1\\ y'=-2x-5y\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x'=2tx-y+t\cos(t)\\ y'=x+2ty+t\sin(t)\end{cases}$

On peut résoudre ces trois systèmes de deux façons différentes.

1) **Méthode 1 : En dérivant**

On sait que :

$$\begin{cases}x'=y+t^2\\ y'=x-t^2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x''=y'+2t\\ y'=x-t^2\end{cases}\Longrightarrow x''-x=-t^2+2t$$

ATTENTION : Ce n'est pas une équivalence car l'on a dérivé une fonction !

a) On résout : $(E_0): x''-x=0$

On résout $(E_q): r^2-1=0\Longrightarrow r=1 \text{ ou } r=-1$

On en déduit donc que : $x''-x=0\Leftrightarrow\exists(A,B)\in\mathbb{C}^2,\forall t\in\mathbb{R}, x(t)=Ae^t+Be^{-t}$

b) On cherche une solution particulière de $x''-x=-t^2+2t$

On pose

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ t\mapsto t^2-2t+2\end{cases}$$

On a alors $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et :

$$\forall x\in\mathbb{R}, f''(t)-f(t)=2-(t^2-2t+2)=-t^2+2t$$

Donc $x: t\mapsto t^2-2t+2$ est une solution particulière de $x''-x=-t^2+2t$.

c) On additionne

$$x''-x=-t^2+2t\Leftrightarrow\exists(A,B)\in\mathbb{C}^2,\forall t\in\mathbb{R}, x(t)=Ae^t+Be^{-t}+t^2-2t+2$$

De plus on sait que :

$$y=x'-t^2=Ae^t-Be^{-t}-t^2+2t-2$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases}x'=y+t^2\\ y'=x-t^2\end{cases}\Longrightarrow\exists(A,B)\in\mathbb{C}^2,\forall t\in\mathbb{R}\begin{cases}x(t)=Ae^t+Be^{-t}+t^2-2t+2\\ y(t)=Ae^t-Be^{-t}-t^2+2t-2\end{cases}$$

d) Il reste à vérifier que cela est une équivalence.

On pose $(f,g)\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ définie par :

$$\exists(A,B)\in\mathbb{C}^2,\forall t\in\mathbb{R}\begin{cases}f(t)=Ae^t+Be^{-t}+t^2-2t+2\\ g(t)=Ae^t-Be^{-t}-t^2+2t-2\end{cases}$$

On a alors :

$$\forall t\in\mathbb{R}, g(t)=f'(t)-t^2 \text{et } g'(t)=f(t)-t^2$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} x' = y + t^2 \\ y' = x - t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{C}^2, \forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} x(t) = Ae^t + Be^{-t} + t^2 - 2t + 2 \\ y(t) = Ae^t - Be^{-t} - t^2 + 2t - 2 \end{cases}$$

Méthode 2 : Avec une combinaison linéaire

On a :

$$\begin{cases} x' = y + t^2 \\ y' = x - t^2 \end{cases} \Longrightarrow x' + y' = x + y \ et \ x' - y' = y - x + 2t^2$$

On résout séparément :

$$x' + y' = x + y \Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{C} \ tel \ que \ \forall t \in \mathbb{R}, x(t) + y(t) = Ae^t$$

De même on a :

$$x' - y' = y - x + 2t^2 \Leftrightarrow \exists B \in \mathbb{C} \ tel \ que \ \forall t \in \mathbb{R}, x(t) - y(t) = Be^{-t} + 2t^2 - 4t + 4$$

On a donc :

$$\begin{cases} x(t) + y(t) = Ae^t \\ x(t) - y(t) = Be^{-t} + 2t^2 - 4t + 4 \end{cases}$$

On trouve alors :

$$\begin{cases} x' = y + t^2 \\ y' = x - t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{C}^2, \forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} x(t) = Ae^t + Be^{-t} + t^2 - 2t + 2 \\ y(t) = Ae^t - Be^{-t} - t^2 + 2t - 2 \end{cases}$$

---

2) On sait que :

$$\begin{cases} x' = -7x + y + 1 \\ y' = -2x - 5y \end{cases} \Longrightarrow x'' = -7x' - 2x - 5y = -7x' - 2x - 5(x' + 7x - 1) = -12x' - 37x + 5$$

On cherche alors à résoudre l'équation différentielle :

$$x'' + 12x' + 37x = 5$$

ATTENTION : Ce n'est pas une équivalence car l'on a dérivé une fonction !

a) On résout : (E_0): $x'' + 12x' + 37x = 0$

On résout (E_q): $r^2 + 12r + 37 = 0 \Longrightarrow \Delta = 144 - 4 \times 37 = (2i)^2$

On en déduit donc que : $x'' + 12x' + 37x = 0 \Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{C}^2, \forall t \in \mathbb{R}, x(t) = Ae^{(-6-i)t} + Be^{(-6+i)t}$

b) On cherche une solution particulière de $x'' + 12x' + 37x = 6$

On pose

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{5}{37} \end{cases}$$

On a alors $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(t) + 12f'(t) + 37f(t) = 5$$

Donc $x: t \mapsto \frac{6}{37}$ est une solution particulière de $x'' + 12x' + 37x = 5$.

c) On additionne

$$x'' + 12x' + 37x = -4 \Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{C}^2, \forall t \in \mathbb{R}, x(t) = Ae^{(-6-i)t} + Be^{(-6+i)t} + \frac{5}{37}$$

De plus on sait que :

$$\begin{aligned} y = x' + 7x - 1 &= A(-6-i)e^{(-6-i)t} + B(-6+i)e^{(-6+i)t} + 7\left(Ae^{(-6-i)t} + Be^{(-6+i)t} + \frac{5}{37}\right) - 1 \\ &= A(1-i)e^{(-6-i)t} + B(1+i)e^{(-6+i)t} - \frac{2}{37} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} x' = -7x + y + 1 \\ y' = -2x - 5y \end{cases} \Longrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{C}^2, \forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} x(t) = Ae^{(-6-i)t} + Be^{(-6+i)t} + \dfrac{5}{37} \\ y(t) = A(1-i)e^{(-6-i)t} + B(1+i)e^{(-6+i)t} - \dfrac{2}{37} \end{cases}$$

d) Il reste à vérifier que cela est une équivalence.

On pose $(f,g) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ définie par :

$$\exists (A,B)\in\mathbb{C}^2,\forall t\in\mathbb{R}\begin{cases} f(t)=Ae^{(-6-i)t}+Be^{(-6+i)t}+\dfrac{5}{37}\\ g(t)=A(1-i)e^{(-6-i)t}+B(1+i)e^{(-6+i)t}-\dfrac{2}{37}\end{cases}$$

On a alors :

$$\forall t\in\mathbb{R},\begin{cases} f'(t)=-7f(t)+g(t)+1\\ g'(t)=-2f(t)-5g(t)\end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} x'=-7x+y+1\\ y'=-2x-5y\end{cases}\Leftrightarrow \exists (A,B)\in\mathbb{C}^2,\forall t\in\mathbb{R}\begin{cases} x(t)=Ae^{(-6-i)t}+Be^{(-6+i)t}+\dfrac{5}{37}\\ y(t)=A(1-i)e^{(-6-i)t}+B(1+i)e^{(-6+i)t}-\dfrac{2}{37}\end{cases}$$

---

3) On a :

$$\begin{cases} x'=2tx-y+t\cos(t)\\ y'=x+2ty+t\sin(t)\end{cases}\Longrightarrow x'+iy'=(2t+i)x'+(-1+2ti)y+te^{it}=(2t+i)(x+iy)+te^{it}$$

On pose $z=x+iy\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. On résout :

$$z'-(2t+i)z=te^{it}$$

1) On résout $(\mathbf{E_0})$: $\mathbf{z'-(2t+i)z=0}$

On sait que :

$$z'-(2t+i)z=0\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{C},\forall t\in\mathbb{R},z(t)=\lambda e^{t^2+it}=\lambda e^{it}e^{t^2}$$

2) On cherche une SP à $\mathbf{z'-(2t+i)z=te^{it}}$

On peut utiliser la variation de la constante. On a alors :

$$\forall t\in\mathbb{R},f(t)=\lambda(t)e^{it}e^{t^2},\lambda\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$$

On a alors :

$$\lambda'(t)e^{it}e^{t^2}=te^{it}\Longrightarrow\lambda'(t)=te^{-t^2}\Longrightarrow\exists c\in\mathbb{R},\lambda(t)=-\frac{1}{2}e^{-t^2}+c,c\in\mathbb{R}$$

Ainsi on peut en déduire que $t\mapsto -\frac{1}{2}e^{it}$ est une solution particulière de (E).

3) On additionne :

$$z'-(2t+i)z=te^{it}\Leftrightarrow\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{C},\forall t\in\mathbb{R},z(t)=\lambda e^{t^2+it}=\left(\lambda e^{t^2}-\frac{1}{2}\right)e^{it}$$

4) On sait que $\mathbf{x=\mathcal{Re}(z)}$ et $\mathbf{y=\mathcal{Im}(z)}$.

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} x'=2tx-y+t\cos(t)\\ y'=x+2ty+t\sin(t)\end{cases}\Longrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{C},\begin{cases} x(t)=\left(\lambda e^{t^2}-\dfrac{1}{2}\right)\cos(t)\\ y(t)=\left(\lambda e^{t^2}-\dfrac{1}{2}\right)\sin(t)\end{cases}$$

5) On vérifie ensuite que ces fonctions conviennent :

$$\exists\lambda\in\mathbb{C},\begin{cases} x(t)=\left(\lambda e^{t^2}-\dfrac{1}{2}\right)\cos(t)\\ y(t)=\left(\lambda e^{t^2}-\dfrac{1}{2}\right)\sin(t)\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} x'(t)=2tx-y+t\cos(t)\\ y'(t)=x+2ty+t\sin(t)\end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} x'=2tx-y+t\cos(t)\\ y'=x+2ty+t\sin(t)\end{cases}\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{C},\begin{cases} x(t)=\left(\lambda e^{t^2}-\dfrac{1}{2}\right)\cos(t)\\ y(t)=\left(\lambda e^{t^2}-\dfrac{1}{2}\right)\sin(t)\end{cases}$$

Exercice E.5 : On considère sur $]0;+\infty[$ l'équation différentielle d'Euler (E): $at^2y''+bty'+cy=f(t)$ où a,b, c sont des réels $(a\neq 0)$ et $f\in\mathcal{C}^0(]0;+\infty[,\mathbb{R})$.

1) On pose $z(x)=y(e^x)$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants en la variable x.

2) Résoudre l'équation d'Euler $t^2y''+ty'+y=\cos(2\ln(t))$ pour $t>0$.

3) Résoudre l'équation d'Euler $t^2y'' - 2ty' + 2y = 2t^3\sin(2t)$ pour $t > 0$.

1) On pose $z(x) = y(e^x)$.
y est solution de (E) donc y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;+\infty[$. Comme $x \mapsto e^x$ est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ on en déduit par composé que : $x \mapsto y(e^x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;+\infty[$ et :

$$\forall x > 0, z'(x) = e^x y'(e^x), z''(x) = e^x y'(e^x) + e^{2x} y''(e^x)$$

De plus comme $x \mapsto e^x$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0;+\infty[$:

$$\forall t > 0, \exists!\, x \in \mathbb{R}, e^x = t$$

On a donc :

$$\text{y est solution de (E)} \iff : at^2y''(t) + bty'(t) + cy(t) = f(t)$$
$$\iff ae^{2x}y''(e^x) + be^x y'(e^x) + cy(e^x) = f(e^x)$$
$$\iff a\big(z''(x) - z'(x)\big) + bz'(x) + cz(x) = f(e^x)$$
$$\iff az''(x) + (b-a)z'(x) + cz(x) = f(e^x)$$

2) On cherche à résoudre :

$$(E): t^2y''(t) + ty(t) + y(t) = \cos(2\ln(t)) \text{ pour } t > 0$$

D'après la question 1, si on pose $t = e^x$, on a alors $z(x) = y(e^x)$ est solution de :

$$z''(x) + z(x) = \cos(2x)$$

a) On résout l'équation homogène :

$$(E_0): z''(x) + z(x) = 0$$

On résout l'équation caractéristique :

$$r^2 + 1 = 0$$

On a deux racines complexes : $r = i = e^{\frac{i\pi}{2}}$ ou $r = -i = e^{-\frac{i\pi}{2}}$
On a donc :

$$z''(x) + z(x) = 0 \iff z(x) = z(x) = A\cos(x) + B\sin(x), (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

b) On cherche une solution particulière de :

$$z''(x) + z(x) = \cos(2x)$$

On pose :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto a\cos(2x) \end{cases}$$

On sait que $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) + g'(x) = -4\,a\cos(2x) + a\cos(2x) = -3\,a\cos(2x)$$

Ainsi g est solution particulière de (E) si et seulement si :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{1}{3}\cos(2x) \end{cases}$$

c) On rassemble :

$$z''(x) + z(x) = \cos(2x) \iff \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, z(x) = A\cos(x) + B\sin(x) - \frac{1}{3}\cos(2x)$$

On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, z(x) = y(e^x) \implies \forall t > 0, y(t) = z(\ln(t))$$

On en déduit donc que :

$$(E): t^2y''(t) + ty(t) + y(t) = \cos(2\ln(t))$$
$$\iff \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall t > 0, y(t) = A\cos(\ln(t)) + B\sin(\ln(t)) - \frac{1}{3}\cos(2\ln(t))$$

3) On fait de même que précédemment :

$$(E): t^2y''(t) - 2ty(t) + 2y(t) = 2t^3\sin(2t)$$

D'après la question 1, si on pose $t = e^x$, on a alors $z(x) = y(e^x)$ est solution de :

$$z''(x) - 3z'(x) + 2z(x) = 2e^{3x}\sin(2e^x)$$

a) On résout l'équation homogène :

$$(E_0): z''(x) - 3z'(x) + 2z(x) = 0$$

On résout l'équation caractéristique :

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

On a deux racines complexes : $r = 1$ ou $r = 2$

On a donc :

$$z''(x) - 3z'(x) + 2z(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, z(x) = Ae^x + Be^{2x}, (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Ainsi on a :

$$t^2y''(t) - 2ty(t) + 2y(t) = 0 \Leftrightarrow \forall t > 0, y(t) = At + Bt^2, (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

b) On cherche une solution particulière de :

$$(E): t^2y''(t) - 2ty(t) + 2y(t) = 2t^3\sin(2t)$$

On pose :

$$g : \begin{cases}]0; +\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto t\sin(2t) \end{cases}$$

On sait que $g \in \mathcal{C}^\infty(]0; +\infty[)$ et :

$$\begin{aligned} \forall t > 0, t^2g''(t) - 2tg(t) + 2y(t) &= t^2\big(4\cos(2t) - 4t\sin(2t)\big) - 2t\big(\sin(2t) + 2t\cos(2t)\big) + 2t\sin(2t) \\ &= -4t^3\sin(2t) \end{aligned}$$

Ainsi g est solution particulière de (E) si et seulement si :

$$g : \begin{cases}]0; +\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto -\dfrac{1}{2}t\sin(2t) \end{cases}$$

c) On rassemble :

$$\begin{aligned} &(E): t^2y''(t) - 2ty(t) + 2y(t) = 2t^3\sin(2t) \\ &\Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall t > 0, y(t) = At + Bt^2 - \frac{1}{2}t\sin(2t) \end{aligned}$$

Remarque : La solution peut parfaitement être étendue à $\mathbb{R}$ sans problème. Grâce à la dimension 2 de l'espace des solutions (que l'on verra au second semestre), on peut alors démontrer que :

$$(E): t^2y''(t) - 2ty(t) + 2y(t) = 2t^3\sin(2t) \Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = At + Bt^2 - \frac{1}{2}t\sin(2t)$$

Exercice E.6 : On considère une solution y de l'équation différentielle : $(E): ty'' - 2y' - ty = 0$ avec $t > 0$.
1) Montrer que y est indéfiniment dérivable pour t>0.
2) En dérivant l'équation (E), montrer que y vérifie une équation différentielle linéaire du 4ième ordre.
3) En raisonnant comme pour les équations du second ordre à coefficients constants, résoudre l'équation précédente et en déduire les solutions de l'équation différentielle initiale.

1) On peut le montrer par récurrence.

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n): y \in \mathcal{C}^n(]0; +\infty[)$$

Initialisation : $n = 0$ et $n = 1$.

Comme y est dérivable, y est continue sur $]0; +\infty[$ donc $y \in \mathcal{C}^0(]0; +\infty[)$.

De plus y est deux fois dérivables donc $y \in \mathcal{C}^1(]0; +\infty[)$.

Hérédité : Soit n un entier naturel n fixé. On suppose la proposition vraie pour n et $n + 1$.

On a alors :

$$\forall t > 0, y''(t) = \frac{2y'(t)}{t} + y(t) \in \mathcal{C}^n(]0; +\infty[)$$

On en déduit donc que $y \in \mathcal{C}^{n+2}(]0; +\infty[)$.

Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion : On conclut d'après la propriété de récurrence.

On en déduit donc que $y \in \mathcal{C}^\infty(]0; +\infty[)$

2) On sait que l'on $y \in \mathcal{C}^\infty(]0; +\infty[)$. On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} &ty'' - 2y' - ty = 0 \\ &\Rightarrow y'' + ty''' - 2y'' - y - ty' = 0 \\ &\Rightarrow y^{(3)} + y^{(3)} + ty^{(4)} - 2y''' - y' - y' - ty'' = 0 \\ &\Rightarrow ty^{(4)} - 2y' - (2y' + ty) = 0 \\ &\Rightarrow ty^{(4)} + 2(-ty'' + ty) - ty = 0 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow y^{(4)} - 2y'' + y = 0$$

3) On résout (E_q): $r^4 - 2r^2 + 1 = 0$

On sait que :

$$r^4 - 2r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (r^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow r^2 = 1$$

On en déduit donc que :

$$r^4 - 2r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r = 1 \text{ ou } r = -1$$

D'après ce que nous dit l'énoncé, on en déduit donc que :

$$y^{(4)} - 2y'' + y = 0 \Leftrightarrow \exists (A, B, A', B') \in \mathbb{R}^4, y(t) = (At + B)e^t + (A't + B')e^{-t}$$

On doit ensuite vérifier les solutions de :

$$ty'' - 2y' - ty = 0$$

On a :

$$\forall t > 0, y'(t) = (At + A + B)e^t + (-A't - B' + A')e^{-t}$$
$$\forall t > 0, y''(t) = (At + 2A + B)e^t + (A't + B' - 2A')e^{-t}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} ty''(t) = (At^2 + (A+B)t)e^t + (-A't^2 + (-B' + A')t)e^{-t} \\ 2y' + ty = (2At + 2A + 2B)e^t + (-2A't - 2B' + 2A')e^{-t} + (At^2 + Bt)e^t + (A't^2 + B't)e^{-t} \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} ty''(t) = (At^2 + (A+B)t)e^t + (-A't^2 + (-B' + A')t)e^{-t} \\ 2y' + ty = (At^2 + (2A+B)t + 2A + 2B)e^t + (A't^2 + (-2A' + B')t - 2B' + 2A')e^{-t} \end{cases}$$

On identifie :

$$\begin{cases} 2A + 2B = 0 \\ A + B = 2A + B \end{cases} \Leftrightarrow A = B = 0$$

On en déduit donc que $y = 0$ est la seule solution de $ty'' - 2y' - ty = 0$.

Exercice E.7 : On considère une fonction indéfiniment dérivable $f : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ et l'équation $y'' + y = f(x)$. On cherche les solutions y sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ vérifiant $y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et on pose à cet effet :

$$F(x) = -\cos(x) \int_0^x f(t)\sin(t)\,dt + \sin(x) \int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)\cos(t)\,dt$$

1) Préciser les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ vérifiant $y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

2) On envisage ici les deux cas particulier $f(x) = 1$ et $f(x) = x$.

a) Exprimer dans ces deux cas $F(x)$ sans symbole intégral, puis $F''(x) + F(x)$.

b) En déduire dans ces deux cas les solutions y de $y'' + y = f(x)$ telles que $y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

3) a) On revient au cas général. Montrer que F est deux fois dérivable, expliciter $F'(x)$ et $F''(x)$, puis exprimer $F''(x) + F(x)$ en fonction de $f(x)$.

b) En déduire les solutions y de $y'' + y = f(x)$ telle que $y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

1) On pose : $y'' + y = 0 \Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$

De plus on veut que $y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = 0$$

2) a) **1er cas : $f(x) = 1$**

On a :

$$F(x) = -\cos(x) \int_0^x \sin(t)\,dt + \sin(x) \int_{\frac{\pi}{2}}^x \cos(t)\,dt$$
$$= -\cos(x)\,(-\cos(x) + 1) + \sin(x)\,(\sin(x) - 1)$$
$$= \cos^2(x) - \cos(x) + \sin^2(x) - \sin(x)$$

$$= 1 - \cos(x) - \sin(x)$$

On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F''(x) + F(x) = 1$$

2ième cas : $f(x) = x$

On a :

$$F(x) = -\cos(x)\int_0^x t\sin(t)\,dt + \sin(x)\int_{\frac{\pi}{2}}^x t\cos(t)\,dt$$

On calcule à part les deux intégrales :

$$\int_0^x t\sin(t)\,dt = [-t\cos(t)]_0^x + \int_0^x \cos(t)\,dt$$
$$= -x\cos(x) + \sin(x)$$

De même on a :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^x t\cos(t)\,dt = [t\sin(t)]_{\frac{\pi}{2}}^x - \int_{\frac{\pi}{2}}^x \sin(t)\,dt$$
$$= x\sin(x) - \frac{\pi}{2} + \cos(x)$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = x\cos^2(x) - \cos(x)\sin(x) + x\sin^2(x) + \sin(x)\cos(x) - \frac{\pi}{2}\sin(x)$$
$$= x - \frac{\pi}{2}\sin(x)$$

On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F''(x) + F(x) = x$$

b) **1er cas : $f(x) = 1$**

On veut résoudre $y'' + y = 1$. On sait que :

$$y'' + y = 0 \Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$$

On cherche à présent une solution particulière.

On sait d'après la question précédente que $F(x) = 1 - \cos(x) - \sin(x)$ est solution particulière (tout comme $F(x) = 1$ d'ailleurs). On en déduit donc que :

$$y'' + y = 1 \Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = A\cos(x) + B\sin(x) + 1$$

On veut de plus que :

$$y(0) = A + 1 = 0 \text{ et } y\left(\frac{\pi}{2}\right) = B + 1 = 0$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} y'' + y = 1 \\ y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y(x) = 1 - \cos(x) - \sin(x)$$

Remarque : Ici on nous amène finalement à voir que F est la solution du problème de Cauchy. En effet on voit que $F(0) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ car $\int_a^a f(t)dt = 0$ F est solution particulière de (E).

2ième: $f(x) = x$

Comme dans la remarque précédente, on peut donner l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} y'' + y = x \\ y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y(x) = x - \frac{\pi}{2}\sin(x)$$

3) a) On sait par définition de l'intégrale que $F: x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable et que $F'(x) = f(x)$.

On en déduit donc que F est dérivable et :

$$\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], F'(x) = \sin(x)\int_0^x f(t)\sin(t)\,dt - f(x)\cos(x)\sin(x) + \cos(x)\int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)\cos(t)\,dt + f(x)\sin(x)\cos(x)$$

$$= \sin(x)\int_0^x f(t)\sin(t)\,dt + \cos(x)\int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)\cos(t)\,dt$$

De même on peut voir que F' est dérivable pour les mêmes raisons que F et :

$$\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], F''(x) = \cos(x)\int_0^x f(t)\sin(t)\,dt + f(x)\sin^2(x) - \sin(x)\int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)\cos(t)\,dt + f(x)\cos^2(x)$$

$$= f(x) - F(x)$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], F''(x) + F(x) = f(x)$$

b) On sait que $F(0) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. On en déduit donc que :

$$\begin{cases} y'' + y = f(x) \\ y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], y(x) = -\cos(x)\int_0^x f(t)\sin(t)\,dt + \sin(x)\int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)\cos(t)\,dt$$

Exercice E.8 : Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. On définit Φ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \Phi(x) = f(x) - \int_0^x (x-t)f(t)dt$$

1) Montrer que ϕ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et calculer ϕ''.
2) Donner l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^2$ satisfaisant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - \int_0^x (x-t)f(t)dt = x^2$$

1) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On sait que si $f \in \mathcal{C}^1(I)$ alors :

$$\forall a \in I, F: x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt \in \mathcal{C}^1(I) \text{ et } \forall x \in I, F'(x) = f(x)$$

On en déduit donc que Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(x) = f(x) - \int_0^x (x-t)f(t)dt = f(x) - x\int_0^x f(t)dt + \int_0^x tf(t)dt$$

$$\Longrightarrow \Phi'(x) = f'(x) - \int_0^x f(t)dt - xf(x) + xf(x) = f'(x) - \int_0^x f(t)dt$$

On en déduit alors que Φ' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Phi''(x) = f''(x) - f(x)$$

Comme $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ on en déduit que Φ'' est continue donc $\Phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

2) On cherche l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - \int_0^x (x-t)f(t)dt = x^2 = \Phi(x)$$

On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Phi''(x) = f''(x) - f(x) = 2$$

On a donc l'équivalence suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - \int_0^x (x-t)f(t)dt = x^2 \Leftrightarrow f''(x) - f(x) = 2$$

Or on sait que :

$$f''(x)-f(x)=2 \Leftrightarrow \exists (A,B)\in\mathbb{R}^2, \forall x\in\mathbb{R}, f(x)=Ae^x+Be^{-x}-2$$

On en déduit donc que :

$$\left\{f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}), \forall x\in\mathbb{R}, f(x)-\int_0^x (x-t)f(t)dt=x^2\right\}=\{x\mapsto Ae^x+Be^{-x}-2, (A,B)\in\mathbb{R}^2\}$$

Exercice E.9 : Soit $a\in\mathbb{R}$, fixé. On considère une fonction y de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall t\in\mathbb{R}, y'(t)=y(-t)e^{at}$$

1) Montrer que y est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que y vérifie une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.
3) En déduire toutes les fonctions y de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifient la relation précédente sur $\mathbb{R}$.

1) On le démontre par une récurrence immédiate.

$$t\mapsto e^{at}\in\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$$

Initialisation : Pour n = 0 cela est vraie car y est dérivable donc continue.
Hérédité : Soit n un entier naturel n fixé. On suppose alors que $y\in\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$. On sait de plus que :

$$t\mapsto -t \text{ et } t\mapsto e^{at}\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$$

On en déduit donc que $y'(t)=y(-t)e^{at}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. Donc y est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.
Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.
2) On sait que :

$$\forall t\in\mathbb{R}, y''(t)=-y'(-t)e^{at}+ay(-t)e^{at}=-y(t)e^{-at}e^{at}+ay'(t)=-y(t)+ay(t)$$

On en déduit donc que y vérifie l'équation différentielle :

$$y''-ay'+y=0$$

3) On résout l'équation caractéristique :

$$r^2-ar+1=0\Longrightarrow \Delta=a^2-4$$

1^er^ cas : $a=2$.
On a alors :

$$y''-2y'+y=0\Leftrightarrow \exists(A,B)\in\mathbb{R}^2, \forall t\in\mathbb{R}, y(t)=(At+B)e^t$$

2^ième^ cas $a=-2$
On a alors :

$$y''+2y'+y=0\Leftrightarrow \exists(A,B)\in\mathbb{R}^2, \forall t\in\mathbb{R}, y(t)=(At+B)e^{-t}$$

3^ième^ cas : $a\in]-2;2[$
On a alors :

$$r^2-ar+1=0\Leftrightarrow\begin{cases} r=\dfrac{a}{2}+\dfrac{\sqrt{4-a^2}}{2}i\\ \text{ou}\\ r=\dfrac{a}{2}-\dfrac{\sqrt{4-a^2}}{2}i\end{cases}$$

On a alors :

$$y''-ay'+y=0\Leftrightarrow \exists(A,B)\in\mathbb{R}^2, \forall t\in\mathbb{R}, y(t)=\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}t\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}t\right)\right)e^{\frac{a}{2}t}$$

4^ième^ cas : $|a|>2$
On a alors :

$$r^2-ar+1=0\Leftrightarrow\begin{cases} r=\dfrac{a}{2}+\dfrac{\sqrt{a^2-4}}{2}\\ \text{ou}\\ r=\dfrac{a}{2}-\dfrac{\sqrt{a^2-4}}{2}\end{cases}$$

On a alors :

$$y''-ay'+y=0\Leftrightarrow \exists(A,B)\in\mathbb{R}^2, \forall t\in\mathbb{R}, y(t)=Ae^{\left(\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{a^2-4}}{2}\right)t}+Be^{\left(\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{a^2-4}}{2}\right)t}$$

3) Il reste à vérifier que les solutions trouvées ci-dessous fonctionnent, car nous avons raisonné par implication.

1

1^{er} cas : $a = 2$

On a alors :

$$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = (At+B)e^t$$

On a alors :

$$y'(t) = (A + At + B)e^t$$
$$y(-t)e^{2t} = (-At+B)e^{-t}e^{2t} = (-At+B)e^t$$

On doit donc avoir $A = 0$ pour avoir l'égalité.

On en déduit donc que $y(t) = Be^t$ fonctionne pour $a = 2$.

$2^{ième}$ cas : $a = -2$

On a alors :

$$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = (At+B)e^{-t}$$

On a alors :

$$y'(t) = (A - At - B)e^{-t}$$
$$y(-t)e^{-2t} = (-At+B)e^{t}e^{2t} = (-At+B)e^{-t}$$

On doit donc avoir $2B = A$ pour avoir l'égalité.

On en déduit donc que $y(t) = A\left(t + \frac{1}{2}\right)e^{-t}$ fonctionne pour $a = -2$.

$3^{ième}$ cas : $a \in]-2;2[$

On a :

$$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}t\right)\right)e^{\frac{a}{2}t}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{\sqrt{4-a^2}}{2}\left(-A\sin\left(\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}t\right) + B\cos\left(\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}t\right)\right)e^{\frac{a}{2}t} + \frac{a}{2}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}t\right)\right)e^{\frac{a}{2}t} \\ &= \left(\left(\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}B + \frac{aA}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}t\right) + \left(-A\frac{\sqrt{4-a^2}}{2} + \frac{a}{2}B\right)\sin\left(\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}t\right)\right)e^{\frac{a}{2}t} \end{aligned}$$

De plus on a :

$$y(-t)e^{at} = \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}t\right) - B\sin\left(\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}t\right)\right)e^{-\frac{a}{2}t}e^{at} = \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}t\right) - B\sin\left(\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}t\right)\right)e^{\frac{a}{2}t}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} A = \dfrac{\sqrt{4-a^2}}{2}B + \dfrac{aA}{2} \\ B = -A\dfrac{\sqrt{4-a^2}}{2} + \dfrac{a}{2}B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)A + \sqrt{4-a^2}B = 0 \\ \sqrt{4-a^2}A + (2-a)B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A = B = 0$$

$4^{ième}$ cas : $|a| > 2$

On a :

$$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = Ae^{\left(\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{a^2-4}}{2}\right)t} + Be^{\left(\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{a^2-4}}{2}\right)t}$$

On en déduit donc que :

$$y'(t) = A\left(\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{a^2-4}}{2}\right)e^{\left(\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{a^2-4}}{2}\right)t} + B\left(\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{a^2-4}}{2}\right)e^{\left(\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{a^2-4}}{2}\right)t}$$

De plus on a :

$$\begin{aligned} y(-t)e^{at} &= \left(Ae^{-\left(\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{a^2-4}}{2}\right)t} + Be^{-\left(\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{a^2-4}}{2}\right)t}\right)e^{at} \\ &= Ae^{\left(\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{a^2-4}}{2}\right)t} + Be^{\left(\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{a^2-4}}{2}\right)t} \end{aligned}$$

On en déduit donc par identification que :

$$\begin{cases} A = B\left(\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2-4}}{2}\right) \\ B = A\left(\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2-4}}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow A = B\left(\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$$

Remarque : On a utilisé un résultat ici qui n'est pas si évident :

Lemme : Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha \neq \beta$. On a alors l'équivalence suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t} = A'e^{\alpha t} + B'e^{\beta t} \Leftrightarrow \begin{cases} A = A' \\ B = B' \end{cases}$$

Démo :

C'est une équivalence. Evidemment l'implication de droite à gauche est triviale ! Démontrons l'implication de gauche à droite.

Il suffit de prendre deux valeurs de t différentes pour obtenir un système à deux équations deux inconnues dont le rang est 2.

Ici on prend $t = 0$ et $t = 1$. On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t} = A'e^{\alpha t} + B'e^{\beta t} \Longrightarrow \begin{cases} (A-A') + (B-B') = 0 \\ (A-A')e^{\alpha} + (B-B')e^{\beta} = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (A-A') + (B-B') = 0 \\ (A-A')e^{\alpha-\beta} + (B-B') = 0 \end{cases} \text{car } e^{\beta \neq 0}$$

$$\Longrightarrow (A-A')\left(1-e^{\alpha-\beta}\right) = 0$$

Or on sait que $\alpha \neq \beta \Longrightarrow 1 - e^{\alpha-\beta} \neq 0$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} (A-A') + (B-B') = 0 \\ (A-A')e^{\alpha} + (B-B')e^{\beta} = 0 \end{cases} \Longrightarrow A = A' \text{et } B = B'$$

On en déduit donc que :

$$y(t) = B\left(\left(\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2-4}}{2}\right)e^{\left(\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{a^2-4}}{2}\right)t} + e^{\left(\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{a^2-4}}{2}\right)t}\right) \text{ fonctionne pour } |a| > 2$$