DM n°4

Exercice : Variation de la constante en dimension 2

On cherche à résoudre l'équation différentielle à valeurs dans $\mathbb{R}$ suivante sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$: $(E): y'' + 4y = \tan(t)$

1) Résoudre l'équation homogène. On ne donnera que les solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose dans toute la suite :

$$y_1 : \begin{cases} \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \cos(2t) \end{cases} \quad et\ y_2 : \begin{cases} \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \sin(2t) \end{cases}$$

2) a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \left(\mathcal{C}^1\left(\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right)\right)^2$. On cherche à trouver une solution particulière à (E) qui vérifie la relation :

$$\begin{cases} y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ y' = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2' \end{cases}$$

Montrer si y est solution de (E) et vérifie la relation précédente, on a alors :

$$\begin{cases} \lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 = 0 \\ \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' = \tan(t) \end{cases}$$

b) En déduire que :

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \begin{cases} \lambda_1'(t) = -\sin^2(t) \\ \lambda_2'(t) = \frac{1}{2}\cos(2t)\tan(t) \end{cases}$$

c) En déduire toutes les solutions de (E).

3) Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + 4y = \tan(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Problème : Irrationnalité de ln(2)

Partie A : Une suite qui converge vers $\ln(2)$

Dans toute cette partie on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt$$

1) Montrer que I_n est bien définie pour tout entier naturel n.

2) a) Calculer I_0 et I_1.

b) Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall t \in [0;1], \frac{t^2}{1+t} = at + b + \frac{c}{1+t}$$

c) En déduire la valeur de I_2.

3) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - (-1)^{n+1} I_{n+1}$$

2) a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_{n+1} \leq \frac{1}{n+2}$$

b) En déduire la valeur de :

$$S = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

Partie B : Critère de d'Alembert

On veut montrer le théorème suivant :
Soit $(\mathrm{u_n})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \; avec \; \ell < 1 \Longrightarrow u_n \to 0$$

Dans toute cette partie on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

On suppose de plus que :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell \; avec \; 0 \leq \ell < 1$$

1) Démontrer que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, tel \; que \; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, 0 < v_n < 1$$

2) En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
3) Démontrer que la suite (u_n) converge, puis que sa limite est 0.
4) La réciproque du théorème est-elle vraie ?

Partie C : Irrationalité de $\ln(2)$

On va prouver l'irrationalité de $\ln(2)$ en raisonnant par l'absurde. On suppose que :

$$\exists (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2, ln(2) = \frac{p}{q} \; et \; p \wedge q = 1$$

On pose de même :

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_n = \frac{1}{n!} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n e^{tln(2)} dt$$

1) Calculer $\mathrm{J_0}$ et $\mathrm{J_1}$.
2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_n > 0$$

3) Démontrer que :

$$\forall D \in \mathbb{R}, D^n J_n \to 0$$

4) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_{n+2} = \frac{4q^2}{p^2} J_n - \frac{(4n+6)q^2}{p^2} J_{n+1}$$

5) Montrer que pour tout entier naturel n, il existe une fonction polynomiale à coefficients entiers $\mathrm{A_n}$ tel que :

$$J_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{2n+1} \left[2A_n\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{1}{2} A_n\left(-\frac{p}{q}\right)\right]$$

6) Montrer que si $\mathrm{D} = 2\mathrm{p}^3$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, D^n J_n \in \mathbb{N}^*$$

7) En déduire l'irrationalité de $\ln(2)$.