Programme de Colle n°12
(15 au 19 décembre 2025)

Résolution de système linéaire

b) Résolution de petits systèmes linéaires par la méthode du pivot

Système linéaire à coefficients réels de deux ou trois équations à deux ou trois inconnues. Algorithme du pivot et mise en évidence des opérations élémentaires.	Interprétation géométrique : intersection de droites dans $\mathbb{R}^2$, de plans dans $\mathbb{R}^3$. Notations $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ $(\lambda \neq 0)$, $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Equation différentielle

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Équations différentielles linéaires du premier ordre	
Équation différentielle linéaire du premier ordre $$y' + a(x)y = b(x)$$ où a et b sont des fonctions réelles ou complexes définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Ensemble des solutions de l'équation homogène. Principe de superposition. Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée. Méthode de la variation de la constante. Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Équation homogène associée. Cas particulier où la fonction a est constante.
c) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	
Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $$y'' + ay' + by = f(x)$$ où a et b sont des scalaires et f est une fonction réelle ou complexe, définie et continue sur un intervalle.	Équation homogène associée.
Ensemble des solutions de l'équation homogène.	Si a et b sont réels, description des solutions réelles.

Question de cours :

Propriété I.b.1 : Soit $a \in \mathcal{C}^0(I)$. Les solutions de (E_0): $y' + ay = 0$ sont :
$$f : t \longmapsto \lambda e^{-A(t)}$$
Où A est une primitive de a sur I.

Propriété II.b.1 (Principe de superposition) : Soit $(a, b_1, b_2) \in \left(\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})\right)^3$. Si f_1 est solution sur I de $y' + ay = b_1$ et f_2 est solution sur I de $y' + ay = b_2$ alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda f_1 + \mu f_2$ est solution sur I de :
$$y' + ay = \lambda b_1 + \mu b_2$$

Propriété II.a.1 : L'ensemble des solutions (S_0) de (E_0) est stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire que :
$$\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \forall(f, g) \in (S_0)^2, \lambda f + \mu g \in S_0$$

Propriété II.a.2 : Soit $r \in \mathbb{K}$. On a :
$$t \longmapsto e^{rt} \in S_0 \Leftrightarrow ar^2 + br + c = 0$$

Propriété III.a.1 : Soit $(E): ay'' + by' + cy = f(t)$ une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Alors toute solution de (E) s'obtient en ajoutant à une solution particulière y_p de (E) une solution de l'équation homogène associée (E_0).

Exercices du type :

Exercice B.4 : Soit $a \in \mathbb{C}$. Résoudre le système suivant les valeurs de a :

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = a \\ 3x + 2y + z = a + 3 \\ 7x + 4y - 5z = 2a + 5 \end{cases}$$

Exercice B.6 : Résoudre le système suivant d'inconnues complexes :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \cdots + 2x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + 3x_n = 1 \\ \vdots \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = 1 \end{cases}$$

Application II.b.4 : Résoudre : $y' + y = 4\mathrm{ch}(t)$

Application II.c.2 : Résoudre :

$$(1 + t)y' - ty + 1 = 0 \text{ sur } I =]-1; +\infty[$$

Exercice A.1 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

$(E_1): y'' + 2y' + 4y = 0$ dans $\mathbb{R}$ $\qquad$ $(E_2): y'' + 2y' + 4y = 0$ dans $\mathbb{C}$

Exercice B.1 : Résoudre :

$(E_1): y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$ $\qquad$ $(E_2): y'' + 2y' + y = sh(x)$ $\qquad$ $(E_3): y'' - 3y' + 2y = e^x cos(x)$

$(E_4): y'' + 4y = sin(x) + sin(2x)$ $\qquad$ $(E_5): y'' + y = cos^3(x)$

Exercice B.2 : Résoudre :

$$\begin{cases} y'' - 2y' - y = x^2 - x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice B.4 : Soit x et y des fonctions de la variable t. Résoudre les systèmes différentiels suivant :

1) $\begin{cases} x' = y + t^2 \\ y' = x - t^2 \end{cases}$ $\qquad$ 2) $\begin{cases} x' = -7x + y + 1 \\ y' = -2x - 5y \end{cases}$ $\qquad$ 3) $\begin{cases} x' = 2tx - y + tcos(t) \\ y' = x + 2ty + tsin(t) \end{cases}$